B. Maurey

Type et cotype dans les espaces munis de structures locales inconditionnelles

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 24 et 25, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A25_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

TYPE ET COTYPE DANS LES ESPACES MUNIS DE STRUCTURES LOCALES INCONDITIONNELLES

par B. MAUREY

Exposés XXIV et XXV — 22 et 29 Mai 1974

La notion d'espace muni d'une structure locale inconditionnelle a été introduite par Dubinsky, Pelczynski et Rosenthal dans [3]. Rappelons tout d'abord que si $x = (x_1,\dots,x_n)$ est une suite algébriquement indépendante dans un espace normé, la constante d'inconditionnalité $\rho(x)$ de la suite est définie par :

$$\rho(x) = \sup \{ \|\Sigma\, \varepsilon_i a_i x_i\| \;;\; \varepsilon_i = \pm 1 ,\ a_i \in \mathbb{R} ,\ \|\Sigma\, a_i x_i\| \leq 1 \} .$$

On dira qu'un espace de Banach E est muni d'une structure locale inconditionnelle s'il existe une constante λ telle que pour tout sous-espace de dimension finie X de E, il existe un sous-espace Y de dimension finie, contenant X, et possédant une base de constante d'inconditionnalité $\leq \lambda$.

On voit que cette notion généralise la notion d'espace à base inconditionnelle. On vérifie assez facilement que les espaces L^p ou C(K) possèdent une structure locale inconditionnelle (alors que L^1 ou C(K) n'a pas en général de base inconditionnelle).
Plus généralement, nous avons :

<u>Proposition 1</u> : Tout treillis normé complet possède une structure locale inconditionnelle.

<u>Démonstration</u> : Nous commencerons par une remarque évidente, mais qui est la raison d'être de la proposition 1:

<u>Lemme 1</u> : Dans un treillis normé L, une suite $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments deux à deux étrangers (c'est-à-dire que $|x_i| \wedge |x_j| = 0$ pour $i \neq j$) est inconditionnelle de constante 1.

Rappelons que dans un treillis, on a pour une suite (y_i) d'éléments deux à deux étrangers : $|\Sigma\, y_i| = \Sigma\, |y_i|$.
Alors, si $\varepsilon_i = \pm 1$ et $a_i \in \mathbb{R}$, les éléments $(\varepsilon_i a_i x_i)$ sont deux à deux étrangers et :

$$\|\Sigma\, \varepsilon_i a_i x_i\| = \|\,|\Sigma\, \varepsilon_i a_i x_i|\,\| = \|\Sigma\, |\varepsilon_i a_i x_i|\,\| = \|\Sigma\, |a_i x_i|\,\| = \|\Sigma\, a_i x_i\|$$

L'idée de la démonstration de la proposition est simple : soient $(x_1,\dots,x_n) \in L$ et $\varepsilon > 0$. Nous voulons trouver un sous-espace à base inconditionnelle contenant $(x_1,\dots,x_n)$.
Pour cela, il suffit de trouver des éléments deux à deux étrangers (y_j) tels que l'espace engendré $[y_1,\dots,y_m]$ contienne $(x_1,\dots,x_n)$.
En fait, cela n'est pas possible en général, et ce sont des éléments 'voisins" de $(x_1,\dots,x_n)$, soient $(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n)$, que nous pourrons inclure dans un espace $[y_1,\dots,y_m]$. Nous utiliserons pour conclure un argument de perturbation : (cf. [6], p. 198).

<u>Lemme 2</u> : Soient F un espace normé de dimension finie et $(x_1,\dots,x_n)$ une base de F.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout espace de Banach E contenant F on ait la propriété suivante :
si $(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n)$ est une suite d'éléments de E telle que $\|\widetilde{x}_i - x_i\| \le \alpha$ pour chaque i, il existe un opérateur linéaire T de E dans lui-même tel que : $T(\widetilde{x}_i) = x_i$ pour chaque i, et

$$\forall\, x \in E, \qquad (1-\varepsilon)\,\|x\| \;\le\; \|T(x)\| \;\le\; (1+\varepsilon)\,\|x\| \,.$$

<u>Démonstration</u> : On peut trouver une constante K telle que

$$\forall\, (a_i)\,, \qquad K^{-1} \max |a_i| \le \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \Big\| \le K \max |a_i| \,.$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné, posons $\alpha = \dfrac{\inf(\varepsilon,1)}{2nK}$, et soient $(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n)$ dans E tels que $\|\widetilde{x}_i - x_i\| \le \alpha$. On a alors :

$$\forall\, (a_i)\,, \qquad \max |a_i| \le 2K \,\Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i \widetilde{x}_i \Big\| \,.$$

Cela signifie que les formes linéaires ξ_j définies sur $[\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n]$ par $\xi_j(\Sigma\, a_i \widetilde{x}_i) = a_j$ sont de norme $\le 2K$, donc admettent d'après Hahn-Banach des prolongements $\widetilde{\xi}_j$ à E, de norme $\le 2K$.
Posons alors :

$$\forall\, x \in E\,, \qquad Tx = x + \sum_{i=1}^{n} \langle \widetilde{\xi}_i , x \rangle \,(x_i - \widetilde{x}_i) \,.$$

On vérifie que T convient.

Soient donc $(x_1,\dots,x_n) \in L$ et $\varepsilon > 0$. On peut supposer $(x_1,\dots,x_n)$ algébriquement libre et
$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} |x_i| \Big\| = 1.$$

Soit α le réel > 0 associé à $(x_1,\dots,x_n)$ et ε par le lemme 2.
Posons
$$a = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$ et considérons l'idéal I_a de L engendré par a.

Sur I_a définissons la norme :

$$\|y\|_\infty = \sup \{c > 0 \ ; \ c\,|y| \leq |a|\} .$$

Dans la suite, nous noterons $I_{a,\infty}$ l'idéal muni de cette norme.
Le complété $\hat{I}_{a,\infty}$ est alors isomorphe à un espace C(K) (cf. exposés XXII-XXIII), et on a une application canonique de norme ≤ 1 :

$$u : C(K) \simeq \hat{I}_{a,\infty} \to L ,$$

qui est un homomorphisme fort, et par suite sa bitransposée $u'' : (C(K))'' \to L''$ est encore un homomorphisme (cf. exposés XXII-XXIII).

Considérons maintenant $(x_1,\dots,x_n)$ comme des fonctions continues sur le compact K.
Par continuité uniforme, on peut trouver des fonctions boréliennes (g_j) à supports disjoints, et des fonctions (h_i), combinaisons linéaires des (g_j), telles que pour chaque i :

$$\|h_i - x_i\|_\infty \leq \alpha \quad .$$

(Les (g_j) et les (h_i) étant considérés comme éléments de $C(K)''$).

Posons $y_j = u''(g_j)$, $\tilde{x}_i = u''(h_i)$. Les éléments (y_j) sont deux à deux étrangers puisque u'' est un homomorphisme, et l'on a pour chaque i :

$$\tilde{x}_i \in [y_1,\dots,y_m] \quad ; \quad \|\tilde{x}_i - x_i\| \leq \alpha \ .$$

D'après le lemme 2, on peut trouver un opérateur T de L'' dans lui-même, tel que $T(\tilde{x}_i) = x_i$, et :

$$\forall\, y \in L'' \qquad (1-\varepsilon)\,\|y\| \le \|Ty\| \le (1+\varepsilon)\,\|y\| ,$$

ce qui implique, compte tenu du lemme 1, que la suite $(T(y_j))$ a une constante d'inconditionnalité $\le \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, et $x_i \in [Ty_1,\dots,Ty_m]$.
Pour conclure, il suffit de ramener les éléments Ty_i dans L lui-même, au moyen du "principe de réflexivité locale" de Lindenstrauss et Rosenthal [cf. [6], p. 196].

Théorème : Soient E un espace de Banach, X un sous-espace de dimension finie de E'' et $\varepsilon > 0$. Il existe un opérateur linéaire S de X dans E, tel que

$$S|_{X\cap E} = Id_{X\cap E} ,$$

et $\qquad \forall\, x \in X \qquad (1-\varepsilon)\,\|x\| \le \|S(x)\| \le (1+\varepsilon)\,\|x\|$.

Si on applique cet énoncé à $X = [Ty_1,\dots,Ty_m]$, et $E = L$, on aura $Sx_i = x_i$, donc $x_i \in [STy_1,\dots,STy_m]$, et la suite $ST(y_i)$ sera une suite d'éléments de L, de constante d'inconditionnalité $\le \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2$, ce qui achève la démonstration de la proposition 1.

Nous allons voir maintenant une sorte de réciproque de la proposition 1, due à T. Figiel et W.B. Johnson. Pour cela nous utiliserons la notion d'ultraproduit.
Rappelons brièvement que si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces de Banach et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I, on définit une semi-norme p sur $l^\infty((E_i))$ par $p((x_i)) = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|$.

On en déduit une norme $\bar{p}$ sur le quotient $l^\infty((E_i))/p^{-1}(0)$, et on montre que ce dernier espace est complet pour $\bar{p}$ (cf. [1], proposition 1).
Par définition, ce quotient est appelé ultraproduit des espaces $(E_i)_{i\in I}$, et noté $\prod E_i/\mathcal{U}$.
Si chaque E_i est un treillis normé complet, l'ultraproduit est un treillis normé complet pour l'ordre défini par :

$$x \leq y \iff \left(\begin{array}{l} \text{il existe des représentants } (x_i) \text{ et } (y_i) \text{ tels que :} \\ \qquad \forall\, i \in I \qquad x_i \leq y_i \end{array} \right).$$

Si on a pour chaque i un opérateur linéaire u_i de E_i dans F_i tel que :

$$\forall\, x \in E_i \,, \qquad \|u_i(x)\| \leq M\,\|x\| \quad (\text{resp} : m\,\|x\| \leq \|u_i(x)\| \leq M\,\|x\|\,)\,,$$

on en déduit de façon naturelle un opérateur linéaire u de $\prod E_i/\mathcal{U}$ dans $\prod F_i/\mathcal{U}$, tel que :

$$\forall\, x \,, \qquad \|u(x)\| \leq M\,\|x\| \quad (\text{resp}: m\,\|x\| \leq \|u(x)\| \leq M\,\|x\|\,).$$

Si on désigne par $(E_i)_{i \in I}$ la famille ordonnée par inclusion des sous-espaces de dimension finie d'un espace normé E, et si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre tendant vers l'infini sur I, on définit une isométrie linéaire j de E dans $\prod E_i/\mathcal{U}$, en prenant pour j(x) la classe d'équivalence de la famille (x_i) définie par :

$$x_i = \begin{cases} x & \text{si } x \in E_i \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de sous-espaces de E, on définit une application linéaire π de norme ≤ 1 de $\prod E_i/\mathcal{U}$ dans E'' par :

$$\forall\, \xi \in E' \qquad < \pi(x), \xi > \; = \lim_{\mathcal{U}} < x_i, \xi > \,,$$

où (x_i) est un représentant de x.

Soient E et F deux espaces de Banach. Nous dirons que E est finiment représentable au sens large dans F (en abrégé : E f.r.l.F.) s'il existe une constante λ telle que pour tout sous-espace de dimension finie E_o de E, il existe un sous-espace de dimension finie F_o de F tel que :

$$d(E_o, F_o) \leq \lambda \;.$$

(Dire que E est finiment représentable dans F signifie que la propriété précédente est vraie pour tout $\lambda > 1$).

Les notions d'espace finiment représentable s'expriment de façon agréable en termes d'ultraproduits :

<u>Proposition 2</u> : Soient E et F deux espaces de Banach. L'espace E est finiment représentable au sens large dans F (resp. finiment représentable dans E) si et seulement si E est isomorphe (resp : isométrique) à un sous-espace d'un ultraproduit $\prod F_i/\mathcal{U}$ d'une famille $(F_i)_{i \in I}$ de sous-espaces de F.

<u>Démonstration</u> : Nous supposerons E de dimension infinie (l'autre cas est facile et laissé au lecteur). Supposons E f.r.l.F. Désignons par $(E_i)_{i \in I}$ la famille des sous-espaces de dimension finie de E, ordonnée par inclusion. Par hypothèse, on peut trouver $\lambda \geq 1$ tel que pour chaque $i \in I$, il existe un sous-espace de dimension finie F_i de F et un opérateur linéaire $u_i : E_i \to F_i$ tel que :

$$\forall\, x \in E_i \qquad \|x\| \leq \|u_i(x)\| \leq \lambda\, \|x\| \quad .$$

Par passage à l'ultraproduit, on obtient un opérateur $u : \prod E_i/\mathcal{U} \to \prod F_i/\mathcal{U}$ tel que :

$$\forall\, x \, , \qquad \|x\| \leq \|u(x)\| \leq \lambda\, \|x\| \, ,$$

c'est-à-dire que u est un isomorphisme.
En composant u avec l'isométrie $j : E \to \prod E_i/\mathcal{U}$ construite ci-dessus, on voit bien que E est isomorphe (plus précisément λ-isomorphe) à un sous-espace de $\prod F_i/\mathcal{U}$.

Dans le cas E f.r. F, il faut raffiner un tout petit peu la méthode précédente. Remarquons que l'on peut trouver une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de nombres réels, telle que :

$$\forall\, i \in I \; , \qquad \lambda_i > 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\mathcal{U}} \lambda_i = 1 \; .$$

(Soit $(x_j)_{j \in J}$ une base algébrique de E, $J = \bigcup J_n$ une partition de J en une suite de sous-ensembles infinis, (u_n) une suite décroissante de reels telle que $u_n > 1$ pour chaque n, et $\lim u_n = 1$.
Si $j \in J$, on pose $\mu_j = u_n$ si $j \in J_n$. Si E_i est un sous-espace de dimension finie de E, on désigne par A_i le sous-ensemble (fini) minimal de J tel que

$E_i \subset [(x_j) ; j \in A_i]$. On pose enfin : $\lambda_i = \inf_{j \in A_i} \mu_j$).

Si E f.r. F, on peut trouver pour chaque $i \in I$ un opérateur $u_i : E_i \to F_i$ tel que :

$$\forall x \in E_i , \qquad \|x\| \leq \|u_i(x)\| \leq \lambda_i \|x\| ,$$

d'où par ultraproduit un opérateur u isométrique.

La réciproque dans la proposition 2 résulte du lemme suivant :

Lemme 3 : Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-espaces de F, $\prod F_i/\mathcal{U}$ est finiment représentable dans F.

Démonstration : Soient X un sous-espace de dimension finie de $\prod F_i/\mathcal{U}$, $(e^1,\ldots,e^n)$ une base de X, $(e_i^j)_{i \in I}$ un représentant de e^j, $j = 1,\ldots,n$. Définissons pour chaque $i \in I$ un opérateur linéaire u_i de X dans F_i par $u_i(e^j) = e_i^j$.

Si $x \in X$, on peut écrire $x = \sum a_j e^j$, donc x admet pour représentant $(\sum_j a_j e_i^j)_{i \in I}$.

Par définition de l'ultraproduit :

$$\|x\| = \lim_{\mathcal{U}} \|\sum_j a_j e_i^j\| = \lim_{\mathcal{U}} \|u_i(x)\| .$$

On voit donc que pour tout $x \in X$, $\|u_i(x)\| \underset{\mathcal{U}}{\to} \|x\|$, mais on vérifie facilement que la famille des $x \to \|u_i(x)\|$ est équicontinue, donc $\|u_i(x)\| \underset{\mathcal{U}}{\rightrightarrows} \|x\|$ uniformément sur la boule unité de X.

Autrement dit si $\varepsilon > 0$ est donné, on a pour $i \in I$ "assez grand" :

$$\forall x \in X , \qquad (1-\varepsilon) \|x\| \leq \|u_i(x)\| \leq (1+\varepsilon) \|x\| ,$$

ce qui montre que $d(X,u_i(X)) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, et démontre le lemme.

Nous pouvons maintenant obtenir :

<u>Théoreme 1</u> : (Figiel-Johnson) : soit E un espace de Banach muni d'une structure locale inconditionnelle. Il existe un treillis normé complet L, finiment représentable au sens large dans E, et deux opérateurs linéaires continus $u : E \to L$, $v : L \to E''$, tels que $v \circ u$ soit l'injection canonique de E dans E''. En particulier, le bidual E'' s'identifie à un sous-espace complémenté de L''.

<u>Démonstration</u> : Soit $(E_i)_{i \in I}$ la famille des sous-espaces de dimension finie de E, ordonnée par inclusion.
Par hypothèse, il existe λ tel que pour chaque $i \in I$ on puisse trouver une suite $(y_n^i)_{1 \leq n \leq N_i}$ de constante d'inconditionnalité $\leq \lambda$, telle que

$$E_i \subset F_i = [(y_n^i) \; ; \; 1 \leq n \leq N_i] .$$

Désignons par $\tilde{F}_i$ l'espace F_i muni de la nouvelle norme :

$$\left| \sum_n a_n y_n^i \right| = \sup_{\varepsilon_n = \pm 1} \left\| \sum_n \varepsilon_n a_n y_n^i \right\| .$$

Si on désigne par w_i l'opérateur identique de F_i dans $\tilde{F}_i$, on voit que :

$$\forall x \in F_i \qquad \|x\| \leq |w_i(x)| \leq \lambda \|x\| .$$

Par ailleurs, la suite (y_n^i) a une constante d'inconditionnalité égale à 1 dans $\tilde{F}_i$, ce qui permet de munir $\tilde{F}_i$ d'une structure de treillis en posant :

$$\left(\sum_n a_n y_n^i \right) \leq \left(\sum_n b_n y_n^i \right) \Leftrightarrow (\forall n , a_n \leq b_n) .$$

En passant à l'ultraproduit, on obtient un treillis normé complet $L = \prod \tilde{F}_i / \mathcal{U}$ et un opérateur linéaire w de $\prod F_i / \mathcal{U}$ dans L tel que :

$$\forall x \in \prod F_i / \mathcal{U} \qquad \|x\| \leq \|w(x)\| \leq \lambda \|x\| .$$

Désignons par j_1 l'opérateur : $E \xrightarrow{j} \prod E_i / \mathcal{U} \longrightarrow \prod F_i / \mathcal{U}$, où j est l'opérateur défini précédemment et où la deuxième flèche correspond à

l'ultraproduit des injections $E_i \to F_i$. Pour finir, puisque (F_i) est une famille de sous-espaces de E, on peut définir un opérateur $\pi : \prod F_i/\mathcal{U} \to E''$ comme il a été dit précédemment, et on vérifie immédiatement que $\pi \circ j_1$ est l'injection canonique de E dans E''.
Alors, la décomposition :

$$E \xrightarrow{j_1} \prod F_i/\mathcal{U} \xrightarrow{w} L \xrightarrow{w^{-1}} \prod F_i/\mathcal{U} \xrightarrow{\pi} E''$$

fournit le résultat voulu, puisque L, étant isomorphe à $\prod F_i/\mathcal{U}$, et $(\prod F_i/\mathcal{U})$ f.r. E d'après le lemme 3, est finiment représentable au sens large dans E.
Par ailleurs, en transposant deux fois, on obtient :

$$E'' \xrightarrow{u''} L'' \xrightarrow{v''} E'''' ,$$

où $v'' \circ u''$ est l'injection de E'' dans E'''', et on sait qu'il existe une projection π de E'''' sur E''.♦
On obtient :

$$E'' \xrightarrow{u''} L'' \xrightarrow{\pi \circ v''} E'' ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

<u>Remarque 1</u> : L'énoncé du théorème 1 se simplifie lorsque E est réflexif. C'est en particulier le cas lorsque E est B-convexe (cf. exposé VII) : W. Johnson a en effet montré [5] qu'un espace B-convexe muni d'une s.l.i. est superréflexif.
Dans ce cas, E s'identifie à un sous-espace complémenté d'un treillis L, lui-même super-réflexif.

Dans la deuxième partie de cet exposé, nous allons examiner les relations entre les notions de type $\leq q$ ou $\geq p$ définies par Krivine dans les treillis normés (exposés XXII-XXIII), et les notions de type p-Rademacher ou de cotype q-Rademacher, introduites dans l'exposé III.

♦ Si $x \in E''''$, $\pi(x)$ désigne la restriction de la forme linéaire x sur E''' au sous-espace E' de E'''.

Soient L un treillis, v un opérateur linéaire de L dans un espace quasi-normé F et q un nombre réel.
Selon Krivine, v est dit de type $\leq q$ s'il existe une constante C telle que :

$$\forall\, (x_1,\dots,x_n) \in L \quad , \quad (\Sigma \|v(x_i)\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq C \; \|(\Sigma\, |x_i|^q)^{\frac{1}{q}}\|_L \; .$$

On peut aussi introduire des "types mixtes". Si p,q sont tels que $1 \leq p \leq q < \infty$, nous dirons que v est de type $\leq (p,q)$ s'il existe une constante C telle que :

$$\forall\, (x_1,\dots,x_n) \in L \quad , \qquad (\Sigma \|v(x_i)\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq C \, \|(\Sigma\, |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}\|_L \; ,$$

et nous noterons $K_{p,q}(v)$ la plus petite constante C telle que la propriété précédente soit réalisée.

Par ailleurs, si E et F sont deux espaces quasi-normés, v un opérateur linéaire de E dans F et q un nombre réel, nous dirons que v est de cotype q-Rademacher s'il existe une constante C telle que :

$$\forall\, (x_1,\dots,x_n) \in E \quad , \quad (\Sigma \|v(x_i)\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq C \int \|\Sigma\, x_i \; \varepsilon_i(t)\| \, dt$$

(où $(\varepsilon_i(t))$ désigne la suite des variables de Rademacher sur $[0,1]$).

<u>Proposition 3</u> :Soient L un treillis normé complet, F un espace quasi-normé, v un opérateur linéaire continu de L dans F, q un nombre réel, et C une constante.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout opérateur linéaire <u>positif</u> u d'un espace C(K) dans L, l'opérateur $v \circ u$ est (p,q)-sommant (cf. exposé X), avec

$$\pi_{p,q}(v \circ u) \leq C \, \|u\| \; .$$

b) Pour tout homomorphisme fort u d'un espace C(K) dans L,

$$\pi_{p,q}(v \circ u) \leq C \, \|u\| \; .$$

c) $$K_{p,q}(v) \leq C \; .$$

<u>Démonstration</u> : a) $\Rightarrow$ b) est trivial. Montrons que b) $\Rightarrow$ c).
Soient $(x_1,\dots,x_n) \in L$, et posons $a = (\Sigma\, |x_i|^p)^{1/p}$.
Supposons $\|a\| = 1$ pour simplifier. Considérons l'espace $\hat{I}_{a,\infty} \simeq C(K)$, (cf. démonstration de la proposition 1), et soit u l'application naturelle de $\hat{I}_{a,\infty}$ dans L : c'est un homomorphisme fort de norme ≤ 1.
Si on désigne par (y_i) l'élément x_i, considéré comme élément de $C(K) \simeq \hat{I}_{a,\infty}$, on aura $(\Sigma\, |y_i|^p)^{1/p} = 1$, fonction constante sur K.

Par ailleurs, on a par convexité, puisque $p \geq 1$:

$$\sup_{\|\xi\| \leq 1} (\Sigma\, |<y_i,\xi>|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup_{t \in K} (\Sigma\, |y_i(t)|^p)^{\frac{1}{p}} = 1 ,$$

donc, d'après b) :

$$(\Sigma\, \|v(x_i)\|^q)^{\frac{1}{q}} = (\Sigma\, \|v \circ u(y_i)\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_{p,q}(v \circ u) \leq C ,$$

ce qui prouve que b) $\Rightarrow$ c).

Pour montrer que c) $\Rightarrow$ a), il suffit de remarquer (cf. exposés XXII-XXIII) que l'on a pour un opérateur positif u et pour $p \geq 1$:

$$(\Sigma\, |u(y_i)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq u\,(\,(\Sigma\, |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}) ,$$

donc :

$$(\Sigma\, \|v \circ u(y_i)\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq C\, \|(\Sigma\, |u(y_i)|^p)^{\frac{1}{p}}\|_L \leq C\, \|u\|\, \|(\Sigma\, |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}\|_{C(K)}$$

$$= C\, \|u\| \sup_{\|\xi\| \leq 1} (\Sigma\, |<y_i,\xi>|^p)^{\frac{1}{p}} ,$$

ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire</u> : a) Soient p_o et q tels que $1 \leq p_o < q$.
Si un opérateur $v : L \to F$ est de type $\leq (p_o,q)$, il est aussi de type $\leq (p,q)$ pour tout p tel que $1 \leq p < q$.

b) Si $v : L \to F$ est de type $\leq (p,q)$, il est aussi de type $\leq r$ pour tout r tel que $q < r$.

Démonstration . C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente et des résultats sur les opérateurs (p,q)-sommants issus d'un espace C(K), démontrés dans l'exposé 12, proposition 3 :

$$\Pi_{p_o,q}(C(K),F) = \Pi_{p,q}(C(K),F), \text{ et } \Pi_{p,q}(C(K),F) \subset \Pi_r(C(K),F).$$

Le corollaire précédent ramène l'étude des "types mixtes" aux types $\leq (1,q)$, qui sont a priori l'hypothèse la plus faible, et aux opérateurs (1,q)-sommants issus d'un espace C(K), d'après la proposition 3.
A cet effet, le lemme suivant sera important :

Lemme 4 : Soient n un entier et K un espace topologique compact.
Désignons par A l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(l_n^\infty, C(K))$ qui sont de la forme $u(e_i) = g_i$, où (e_i) désigne la base de l_n^∞ et (g_i) une suite de fonctions de norme ≤ 1, à supports deux à deux disjoints.
L'enveloppe convexe de A est dense dans la boule unité de $\mathcal{L}(l_n^\infty, C(K))$.

Démonstration : On peut identifier $\mathcal{L}(l_n^\infty, C(K))$ à $l_n^1 \underset{\varepsilon}{\otimes} C(K)$.

L'enveloppe convexe de A est dense dans la boule unité si et seulement si on a pour tout élément ξ du dual, i.e. $\xi \in l_n^\infty \underset{\pi}{\otimes} M(K)$:

$$\|\xi\| = \sup_{x \in A} < x , \xi > .$$

L'élément ξ s'identifie à une suite $(\mu_1,\dots,\mu_n)$ de mesures de Radon sur K, et on voit facilement que la norme dans $l_n^\infty \underset{\pi}{\otimes} M(K)$ est donnée par :

$$\|\xi\| = \| \, |\mu_1| \vee |\mu_2| \vee \dots \vee |\mu_n| \, \|_{M(K)} .$$

On peut trouver des boréliens $S_1,\dots,S_n$, $T_1,\dots,T_n$, tels que $S_i \cap T_i = \emptyset$ et que S_i porte μ_i^+, et T_i porte μ_i^-. On peut ensuite trouver des boréliens $A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_n$ deux à deux disjoints tels que $A_i \subset S_i$, $B_i \subset T_i$ et tels que l'on ait en posant $\mu_i' = \chi_{A_i} \mu_i^+$, $\mu_i'' = \chi_{B_i} \mu_i^-$:

$$|\mu_1| \vee |\mu_2| \vee \dots \vee |\mu_n| = \Sigma \mu_i' + \Sigma \mu_i'' .$$

Par la propriété de régularité intérieure des mesures de Radon, on peut trouver des compacts $L_1,\dots,L_n$, $M_1,\dots,M_n$, avec $L_i \subset S_i$, $M_i \subset T_i$, et des compacts deux à deux disjoints $H_1,\dots,H_n$, $K_1,\dots,K_n$, avec $H_i \subset A_i$, $K_i \subset B_i$, tels que l'on ait en posant $\nu_i' = \chi_{H_i}\,\mu_i'$, $\nu_i'' = \chi_{K_i}\,\mu_i''$:

$$(*)\quad \begin{cases} \Sigma\ \|\mu_i^+ - \chi_{L_i}\,\mu_i^+\| + \Sigma\ \|\mu_i^- - \chi_{M_i}\,\mu_i^-\| \leq \varepsilon \\ \Sigma\ \|\nu_i' - \mu_i'\| + \Sigma\ \|\nu_i'' - \mu_i''\| \leq \varepsilon . \end{cases}$$

On peut maintenant trouver (en supposant pour simplifier que tous les compacts introduits soient non vides) des fonctions continues $(\varphi_1,\dots,\varphi_n,\psi_1,\dots,\psi_n)$, à supports deux à deux disjoints, $0 \leq \varphi_i$, $\psi_i \leq 1$, et telles que $\varphi_i = 1$ sur H_i, $\varphi_i = 0$ sur M_i, $\psi_i = 1$ sur K_i, $\psi_i = 0$ sur L_i pour chaque indice $i = 1,\dots,n$.
(Il résulte des hypothèses que pour $j \neq i$, $\varphi_i = 0$ et $\psi_i = 0$ sur $H_j \cup K_j$.)

Posons maintenant $f_i = \varphi_i - \psi_i$, et considérons l'élément $x = (f_1,\dots,f_n) \in A$. Nous aurons :

$$\begin{aligned} < x , \xi > &= \Sigma < f_i , \mu_i > \\ &= \Sigma < \varphi_i , \mu_i^+ > + < \psi_i , \mu_i^- > - \Sigma (< \varphi_i , \mu_i^- > + < \psi_i , \mu_i^+ >) \\ &\geq \Sigma < \varphi_i , \mu_i^+ > + \Sigma < \psi_i , \mu_i^- > - \varepsilon \quad \text{d'après } (*) \\ &\geq \Sigma < \varphi_i , \nu_i' > + \Sigma < \psi_i , \nu_i'' > - \varepsilon \\ &= \Sigma\ \|\nu_i'\| + \Sigma\ \|\nu_i''\| - \varepsilon \\ &\geq \|\Sigma\ \mu_i' + \Sigma\ \mu_i''\| - 2\varepsilon \quad (\text{d'après } (*)) \\ &\geq \|\xi\| - 2\varepsilon , \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme.

Corollaire : Soient K un espace topologique compact · ' $q \geq 1$. Pour qu'un opérateur linéaire u de C(K) dans un espace normé F soi· (1,q)-sommant, avec $\pi_{1,q}(u) \leq C$, il faut et il suffit que l'on ait pour toute suite $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ de fonctions à supports deux à deux disjoints, et telles que $\|\varphi_i\| \leq 1$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|v(\varphi_i)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C .$$

Démonstration immédiate par des arguments de densité et de convexité (convexité de la norme de $l^q(F)$: a priori cela ne marche pas si F est quasi-normé).

Lemme 5 : Il existe une constante B telle que l'on ait pour tout treillis normé L, en désignant par $(\varepsilon_1(t),\ldots,\varepsilon_n(t),\ldots)$ la suite des variables de Rademacher :

$$\forall\ (x_1,\ldots,x_n) \in L \qquad \left\| \left(\Sigma\ |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_L \leq B \int \left|\Sigma\ x_i\ \varepsilon_i(t)\right|\ dt .$$

Les deux membres sont des fonctions positivement homogènes continues sur $\mathbb{R}^n$. D'après les propriétés de l'interprétation des fonctions homogènes dans un treillis, (exposés XXII-XXIII), on aura pour tout treillis normé L :

$$\forall\ x_1,\ldots,x_n \in L \qquad \left(\Sigma\ |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq B \int \left|\Sigma\ x_i\ \varepsilon_i(t)\right|\ dt,$$

d'où :

$$\left\|\left(\Sigma\ |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\| \leq B \left\| \int \left|\Sigma\ x_i\ \varepsilon_i(t)\right|\ dt\right\| \leq B \int \left\|\ \left|\Sigma\ x_i\ \varepsilon_i(t)\right|\ \right\|\ dt$$

$$= B \int \left\|\Sigma\ x_i\ \varepsilon_i(t)\right\|\ dt .$$

Théorème 2 : Soient L un treillis normé, $q > 2$ et v un opérateur linéaire de L dans un espace normé F. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) L'opérateur v est (1,q)-sommant.

b) L'opérateur v est de type $\leq (p,q)$ pour tout $p \in [1,q[$.

c) L'opérateur v est de cotype q-Rademacher.

d) Il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite $(x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments deux à deux étrangers dans L :

$$(\Sigma \|v(x_i)\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq C \|\Sigma x_i\| .$$

<u>Démonstration</u> : Montrons d'abord que a) $\Rightarrow$ b). D'après le corollaire de la proposition 3, il suffit de montrer que v est de type $\leq (1,q)$, ce qui est évident par la proposition 3.

Pour montrer b) $\Rightarrow$ c), nous pouvons supposer que $p = 2$. Il existe donc une constante C telle que :

$$\forall\, x_1,\ldots,x_n \in L \qquad (\Sigma \|v(x_i)\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq C \,\|\, (\Sigma |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}\|_L$$

$$\leq B.C \int \|\Sigma x_i\ \varepsilon_i(t)\| \, dt$$

d'après le lemme 5, ce qui démontre que v est de cotype q-Rademacher.

L'implication c) $\Rightarrow$ d) est évidente, puisque l'on a pour une suite $(x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments deux à deux étrangers :

$$\forall\, \varepsilon_i = \pm 1 \qquad \|\Sigma \varepsilon_i\ x_i\| = \|\Sigma x_i\| \qquad \text{(lemme 1),}$$

donc :

$$\int \|\Sigma x_i\ \varepsilon_i(t)\| \, dt = \|\Sigma x_i\| .$$

Nous montrerons maintenant que d) $\Rightarrow$ b), c'est-à-dire en fait que nous allons montrer que v est de type $\leq (1,q)$.
D'après la proposition 3, nous devons montrer que pour tout homomorphisme fort $u : C(K) \to L$, l'opérateur $v \circ u$ est $(1,q)$-sommant.
D'après le corollaire du lemme 4, il suffit de considérer des éléments $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) \in C(K)$ à supports disjoints, et $\|\varphi_i\| \leq 1$ pour chaque i.
Puisque u est un homomorphisme, les éléments $x_i = u(\varphi_i)$ sont deux à deux étrangers dans L, et nous pouvons écrire :

$$(\Sigma \|v \circ u(\varphi_i)\|^q)^{\frac{1}{q}} = (\Sigma \|v(x_i)\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq C \|\Sigma x_i\| \leq C \|u\| \|\Sigma \varphi_i\| \leq C \|u\| .$$

Pour finir c) $\Rightarrow$ a) est évident, puisque l'on a dans tout espace de Banach :

$$\int \|\Sigma x_i\ \varepsilon_i(t)\| \, dt \leq \sup \{ \|\Sigma \varepsilon_i x_i\| \; ; \; \varepsilon_i = \pm 1\} = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \Sigma |<x_i, \xi>| .$$

Corollaire : Soient L un treillis normé et $q > 2$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a) L'identité de L est $(1,q)$-sommante.

b) L est de type $\leq (2,q)$.

c) L est de cotype q-Rademacher.

d) Il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments deux à deux étrangers dans L :

$$(\Sigma \, \|x_i\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq C \, \|\Sigma \, x_i\| \quad .$$

Remarque 2 : On voit que pour $q > 2$, les opérateurs $(1,q)$-sommants partant d'un treillis quelconque vérifient le corollaire du lemme 4.
Par contre le corollaire (et a fortiori le théorème 2) est faux pour $q = 2$. G. Pisier a remarqué que l'espace de Lorentz $L^{2,p}$, $1 \leq p < 2$, (cf. exposé 11, p.3) vérifie le d) du corollaire, avec $q = 2$, mais que l'identité de cet espace n'est pas $(1,2)$-sommante.
Cependant nous ne connaissons pas de contre exemple pour l'équivalence de a) et c) lorsque $q = 2$.

Remarquons aussi que pour $q > 2$, l'espace $L^{q,p}$, $1 \leq p \leq q$, est de cotype q-Rademacher, car on vérifie facilement la propriété d) dans cet espace.

Pour $q = 2$, on a le résultat suivant (démontré dans [3] pour des espaces munis de s.l.i, donc en particulier pour les treillis normés).

Théorème 3 : Soit L un treillis normé. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) L est de cotype 2-Rademacher.

b) L est de type ≤ 2.

c) Tout opérateur linéaire d'un espace $C(K)$ dans L est 2-sommant.

Démonstration : On voit que b) $\Rightarrow$ a) comme on a vu que b) $\Rightarrow$ c) dans le théorème 2. Si L est de cotype 2-Rademacher, on sait que pour tout espace normé F, on a $\Pi_2(L,F) = \Pi_1(L,F)$, ([7], exposé XXII, théorème 2).
On en déduit c) par un argument d'adjonction d'idéaux d'opérateurs.
Enfin c) $\Rightarrow$ b) d'après la proposition 3.

Nous allons voir maintenant les liens entre les notions de type p-Rademacher, et de type $\geq p$ dans un treillis.
Plus précisément, nous dirons qu'un opérateur linéaire v d'un espace normé F dans un treillis L est de type $\geq (q,p)$, $1 \leq p \leq q < \infty$, s'il existe une constante C telle que :

$$\forall\, x_1, \ldots, x_n \in E \qquad \| (\Sigma\, |x_i|^q)^{\frac{1}{q}} \|_L \leq C\, (\Sigma \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} .$$

On généralise assez facilement les résultats de dualité démontrés dans l'exposé XXII-XXIII : l'opérateur v est de type $\geq (q,p)$ si et seulement si son transposé v' est de type $\leq (q',p')$ de L' dans E', avec $1/q + 1/q' = 1/p + 1/p' = 1$. Il en résulte encore que toutes les notions de type $\geq (q,p)$ coïncident lorsque $q > p$ (corollaire de la proposition 3).

Nous adopterons la terminologie suivante : nous dirons qu'un opérateur linéaire v d'un treillis L dans un espace quasi-normé F est de type fini s'il existe $q < \infty$ tel que v soit de type $\leq q$. Nous dirons que L est de type fini si son identité est de type fini. On a alors immédiatement :

<u>Lemme 6</u> : Soit v un opérateur linéaire de type fini d'un treillis normé L dans un espace quasi-normé F. Il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de L :

$$\int \|\Sigma\, v(x_i)\, \varepsilon_i(t)\| \,dt \leq C\, \|(\Sigma\, |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}\| .$$

<u>Démonstration</u> : D'après les inégalités de Khintchine, il existe pour tout q fini une constante C_q telle que :

$$\forall\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \qquad \left(\int |\Sigma\, x_i\, \varepsilon_i(t)|^q \,dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_q\, (\Sigma\, |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Cette inégalité entre fonctions positivement homogènes reste vraie pour des éléments d'un treillis normé. Si l'opérateur v est de type $\leq q$, on peut écrire :

$$\int \|\Sigma\, v(x_i)\, \varepsilon_i(t)\| \,dt \leq \left(\int \|\Sigma\, v(x_i)\, \varepsilon_i(t)\|^q \,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C\, \| \left(\int |\Sigma\, x_i\, \varepsilon_i(t)|^q \,dt\right)^{\frac{1}{q}} \|_L \leq C \cdot C_q\, \| (\Sigma\, |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \| .$$

(La constante C étant la constante $K_q(v)$ de type $\leq q$ de l'opérateur v ; on a utilisé l'inégalité du type $\leq q$ étendue aux intégrales , cf. exposés XXII-XXIII, lemme 1).

Le résultat qui suit est à rapprocher du théorème 2, mais l'analogie n'est pas parfaite :

Proposition 4 : Soient E et F deux espaces quasi-normés, L un treillis normé, u un opérateur de type $\geq (2,p)$ de E dans L $(1 \leq p \leq 2)$ et v un opérateur linéaire de type fini de L dans F. L'opérateur $v \circ u$ est de type p-Rademacher (cf. exposé III).

La démonstration est triviale, compte tenu du lemme 6 :

$$\int \| v \circ u\ (x_i)\ \varepsilon_i(t) \|\ dt \leq C\ \|\ (\Sigma\ |u(x_i)|^2)^{\frac{1}{2}} \|_L \leq C\ K^{(2,p)}(u)(\Sigma \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Signalons dans le même ordre d'idées, le résultat suivant :

Proposition 5 : Soient E un espace normé dont le dual est de cotype 2-Rademacher, F un espace normé de cotype 2-Rademacher.
Si un opérateur linéaire de E dans F se factorise par un treillis normé, il peut aussi se factoriser par un espace de Hilbert.

Démonstration : Soient L un treillis normé, et $u : E \to L$, $v : L \to F$ deux opérateurs linéaires.
Nous devons montrer que $v \circ u$ se factorise par un espace de Hilbert.
Tout d'abord v est de type ≤ 2. En effet, puisque F est de cotype 2-Rademacher, tout opérateur $C(K) \to L \xrightarrow{v} F$ est 2-sommant (cf. démonstration du théorème 3), donc v est de type ≤ 2 d'après la proposition 3 ; par le même argument le transposé u' de u est de type ≤ 2 de L' dans E', donc par dualité (exposés XXII-XXIII, théorèmes 5 et 6) u est de type ≥ 2. Il suffit alors d'appliquer le théorème 2 des exposés XXII-XXIII.

Remarque 3 : On peut se demander si la proposition 5 reste vraie sans supposer a priori que l'opérateur de E dans F se factorise par un treillis normé.

On peut penser à l'exemple intéressant où $E = H \hat{\otimes}_{\varepsilon} H$ (ou $\mathcal{L}(H,H)$) et $F = H \hat{\otimes}_{\pi} H$, H étant un espace de Hilbert. Un autre cas très particulier de ce problème est le suivant : si E et son dual E' sont de cotype 2-Rademacher, sont-ils isomorphes à des espaces de Hilbert ?

Nous allons maintenant étudier un problème analogue à celui de l'exposé VII, mais en nous intéressant principalement aux treillis : le problème est de savoir si un treillis normé contient ou non des sous-espaces de dimension n "proches" de l_n^∞, pour tout entier n.
La méthode d'étude emprunte des idées dues à Pisier et développées dans l'exposé VII.

Soit L un treillis normé. Pour tout entier $n \geq 1$ désignons par a_n la plus petite constante a telle que pour tout n-uple $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de L, deux à deux étrangers, on ait :

$$\inf_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| \leq a \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| .$$

On voit que : $0 \leq a_n \leq 1$ pour tout n (car $|x_j| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|$).

<u>Lemme 7</u> : $a_{nm} \leq a_n\, a_m$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\{(x_{i,j})\ ;\ 1 \leq i \leq n\ ,\ 1 \leq j \leq m\}$ un nm-uple d'éléments deux à deux étrangers. Pour i fixé, on a :

$$\inf_{1 \leq j \leq m} \|x_{i,j}\| \leq a_m \left\| \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \right\| .$$

Les $y_i = \sum_{j=1}^{m} x_{i,j}$ forment un n-uple d'éléments deux à deux étrangers, et on peut écrire :

$$\inf_i \|y_i\| \leq a_n \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i \right\| = a_n \left\| \sum_{i,j} x_{i,j} \right\| ,$$

d'où finalement :

$$\inf_{i,j} \|x_{i,j}\| \leq a_n\, a_m \left\| \sum_{i,j} x_{i,j} \right\| .$$

<u>Proposition 6</u> · Si L est un treillis normé, on a l'alternative suivante :

a) ou bien pour tout entier n et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n éléments $x_1, \ldots, x_n$, deux à deux étrangers, tels que $\|x_i\| = 1$

$$\text{et} \quad \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \leq 1 + \varepsilon .$$

(L'espace engendré par $(x_1, \ldots, x_n)$ est alors $(1+\varepsilon)$-isomorphe à l_n^∞).

b) ou bien il existe un nombre réel $q < \infty$ tel que l'identité de L soit $(1,q)$-sommante.

<u>Démonstration</u> : La fonction $n \to a_n$ étant sous-multiplicative, deux cas seulement sont possibles:

a) ou bien pour tout n, $a_n = 1$. Dans ce cas, par définition de a_n, on peut trouver n éléments $(x_1, \ldots, x_n)$, deux à deux étrangers, tels que $\|x_i\| \geq 1$, et $\|\Sigma\, x_i\| \leq 1 + \varepsilon$
(on peut se ramener à $\|x_i\| = 1$ puisque $\left\|\Sigma \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\| \leq \|\Sigma\, x_i\|$).

Si $(a_1, \ldots, a_n)$ est une suite de nombres réels, on aura :

$$\sup |a_i| \leq \sup \|a_i\, x_i\| \leq \left\| \bigvee_{i=1}^{n} |a_i\, x_i| \right\| = \|\, |\Sigma\, a_i\, x_i|\, \|$$

$$= \|\Sigma\, a_i\, x_i\| \leq \|\sup |a_i|\, \Sigma\, |x_i|\, \| = \sup |a_i|\, \|\Sigma\, x_i\| \leq (1+\varepsilon) \sup |a_i|$$

b) ou bien il existe $\alpha > 0$ et une constante C tels que l'on ait pour tout n, $a_n \leq C\, n^{-\alpha}$. (Cela résulte immédiatement de la sous-multiplicativité, s'il existe un n_o tel que $a_{n_o} < 1$).

Choisissons un nombre réel $q > 2$ tel que $q\alpha > 1$.
Pour montrer que l'identité de L est $(1,q)$-sommante, il suffit d'après le théorème 2 de considérer une suite $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments deux à deux étrangers. Supposons que les éléments $x_1, \ldots, x_n$ soient rangés de façon que $\|x_{j+1}\| \leq \|x_j\|$.

On pourra écrire pour chaque entier $j = 1,\dots,n$:

$$\|x_j\| = \inf_{1 \le i \le j} \|x_i\| \le a_j \, \Big\|\sum_{i=1}^{j} x_i\Big\| \le C\, j^{-\alpha} \, \Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big\| .$$

D'où :

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \le C\Big(\sum_{j=1}^{n} j^{-q\alpha}\Big)^{\frac{1}{q}} \Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big\| \le C\Big(\sum_{j=1}^{\infty} j^{-q\alpha}\Big)^{\frac{1}{q}} \Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big\|,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

En combinant la proposition précédente avec le théorème 2, on obtient un certain nombre de conditions équivalentes que nous allons récapituler dans un théorème :

<u>Théorème 4</u> : Soit L un treillis normé. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) c_o n'est pas finiment représentable au sens large dans L.

a bis) c_o n'est pas finiment représentable dans L.

a ter) Il existe $\varepsilon > 0$ et un entier n tels que l'on ait pour tout n-uple $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments deux à deux étrangers :

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big\| \ge (1+\varepsilon) \inf \|x_i\| .$$

b) Il existe un nombre réel $q < \infty$ tel que l'identité de L soit $(1,q)$-sommante.

c) Il existe un nombre réel $r < \infty$ tel que tout opérateur linéaire d'un espace $C(K)$ dans L soit r-sommant.

d) L est de type fini.

e) Il existe un nombre réel $q < \infty$ tel que L soit de cotype q-Rademacher.

<u>Démonstration</u> : e) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ a bis) $\Rightarrow$ a ter) est évident.
D'autre part a ter) $\Rightarrow$ b) d'après la proposition 6, c) $\Rightarrow$ d) d'après la proposition 3 et d) $\Rightarrow$ e) d'après le théorème 2. Pour finir, si l'identité de L est $(1,q)$-sommante, tout opérateur de $C(K)$ dans L est $(1,q)$-sommant, donc r-sommant pour $r > q$ d'après l'exposé XII, proposition 3, ce qui démontre que b) $\Rightarrow$ c).

Remarque 4 : L'équivalence de a), a bis), b), c) et e) est vraie dans tout espace de Banach (cf. [8]). Ce résultat est l'analogue du théorème 2 de l'exposé VII.

Corollaire 1 : Un treillis normé L est de type fini si et seulement si il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de L :

$$\frac{1}{C}\ \|(\Sigma\,|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}\| \ \le \int \|\Sigma\, x_i\ \varepsilon_i(t)\|\,dt \le C\ \|\Sigma\,|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}\| \ .$$

Démonstration : L'inégalité de gauche est toujours vraie (lemme 5). Si L est de type fini, l'inégalité de droite est vérifiée d'après le lemme 6. Inversement, si L n'est pas de type fini, on peut trouver pour tout entier n des éléments $(x_1,\dots,x_{2^n})$ deux à deux étrangers, avec $\|x_i\| = 1$, et $\|\sum_{i=1}^{2^n} x_i\| \le 2$. Considérons le "système de Rademacher" $(y_1,\dots,y_n)$ associé aux (x_i) (cf. exposé XIX, proposition 3) c'est-à-dire :

$$y_j = \sum_{i=1}^{2^n} \text{sign} \ \sin\left(\frac{\pi i}{2^{n-j}}\right) x_i \ .$$

On voit que

$$\|(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2)^{\frac{1}{2}}\| \le \sqrt{n}\ \|\sum_{i=1}^{2^n} x_i\| \le 2\sqrt{n} \ ,$$

alors que pour toute suite $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ de nombres égaux à ± 1, il existe au moins un indice i entre 1 et 2^n tel que :

$$|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j\ y_j| \ \ge \ n\ |x_i|$$

(C'est l'indice i tel que $\varepsilon_j = \varepsilon_1$ sign $\sin\left(\frac{\pi i}{2^{n-j}}\right)$ pour $j = 1,\dots,n$).

Par conséquent :

$$\int \|\sum_{j=1}^{n} y_j\ \varepsilon_j(t)\|\,dt \ \ge \ n \ ,$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire 2 . Soient L un treillis normé et $p \in]1,2[$. Le treillis L est de type p-Rademacher si et seulement si il est de type fini et de type $\geq (2,p)$.

Démonstration : Si L est de type fini, le corollaire 1 implique l'équivalence des types p-Rademacher et $\geq (2,p)$.
Inversement si L n'est pas de type fini, on a c_0 f.r. L, donc l^1 f.r. L et L ne peut pas être de type p-Rademacher pour $p > 1$.

Corollaire 3 : Soit L un treillis normé de type fini. Le treillis L est de type p-Rademacher si et seulement si le treillis dual L' est de cotype p'-Rademacher ($1/p + 1/p' = 1$).

Démonstration : Pour tout espace de Banach, E' est de cotype p'-Rademacher dès que E est de type p-Rademacher. Nous avons seulement à voir la réciproque : si L' est de cotype p'-Rademacher, il est de type fini d'après le théorème 4 (nous excluons le cas trivial $p = 1$), donc de type $\leq (2,p')$ en utilisant le corollaire 1. Par dualité L'' est de type $\geq (2,p)$, donc aussi L par restriction, et on conclut au moyen du corollaire 2.

Nous allons maintenant voir comment certains des résultats démontrés pour les treillis restent valables pour les espaces de Banach munis de structures locales inconditionnelles.

Théorème 2 bis : Soient E un espace de Banach muni d'une s.l.i, v un opérateur linéaire de E dans un espace normé G et $q > 2$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) v est $(1,q)$-sommant.

b) v est de cotype q-Rademacher.

Démonstration : Lorsque E est réflexif c'est évident puisque l'on peut factoriser l'identité de E sous la forme $E \to L \to E$, où L est un treillis normé (théorème 1). Il suffit donc d'appliquer le théorème 2 à l'opérateur $L \to E \xrightarrow{v} F$. Dans tous les cas, le bitransposé v'' est $(1,q)$-sommant de E'' dans F'' (cf. [10]) et on utilise la factorisation $E \to L \to E''$ de l'injection canonique $E \to E''$ (théorème 1).

Corollaire bis : Soient E un espace de Banach muni d'une s.l.i, et $q > 2$. L'identité de E est $(1,q)$-sommante si et seulement si E est de cotype q-Rademacher.

Les énoncés qui suivent s'obtiennent sensiblement par la même technique. Nous laissons les démonstrations au lecteur.

Théorème 3 bis [3] : Soit E un espace de Banach muni d'une s.l.i. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\Pi_2(c_0,E) = \mathcal{L}(c_0,E)$.

b) E est de cotype 2-Rademacher.

Corollaire 3 bis du théorème 4 : Soit E un espace de Banach muni d'une s.l.i, et tel que c_0 ne soit pas finiment représentable dans E. L'espace E est de type p-Rademacher si et seulement si son dual E' est de cotype p'-Rademacher $(1/p + 1/p' = 1)$.

Pour finir nous indiquerons quelques résultats négatifs qui montrent que les espaces munis de s.l.i sont une classe très particulière d'espaces. Gordon et Lewis ont montré [4] que pour $p \neq 2$, $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $S_p(H)$ n'a pas de s.l.i ($S_p(H)$ désigne le sous-espace de $\mathcal{L}(H,H)$ formé des opérateurs u tels que $\mathrm{Tr}\,(uu^*)^{p/2} < \infty$, H étant un espace de Hilbert). Ils ont montré également que les espaces $l_p \hat{\otimes}_\pi l_q$ ou $l_{p'} \hat{\otimes}_\varepsilon l_{q'}$ n'ont pas de s.l.i pour $1 < p,q \leq \infty$.

Plus récemment A. Pelczynski a montré [9] que l'algèbre A des fonctions holomorphes dans le disque $\{ |z| < 1 \}$ du plan complexe, et continues pour $|z| = 1$, n'a pas de s.l.i.

***

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. DACUNHA-CASTELLE : Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971-1972, exposé IX.

[2] D. DACUNHA-CASTELLE et J.L. KRIVINE : Applications des ultraproduits à l'étude des espaces et des algèbres de Banach, Studia Math. 41 (1972) p. 315-334.

[3] E. DUBINSKY, A. PEŁCZYNSKI, H.P. ROSENTHAL : On Banach spaces X for which $\pi_2(\mathcal{L}_\infty,X) = B(\mathcal{L}_\infty,X)$, Studia Math. 44 (1972) p. 617-648.

[5] W.B. JOHNSON : On finite dimensional subspaces of Banach spaces with local unconditional structures, (à paraître).

[4] Y. GORDON et D.R. LEWIS : Absolutely summing operators and local unconditional structures (à paraître).

[6] J. LINDENSTRAUSS et L. TZAFRIRI : Classical Banach spaces, Springer Verlag, Lecture Notes 338.

[7] Séminaire Maurey-Schwartz 1972-1973.

[8] B. MAUREY et G. PISIER : C.R.A.S. t.277, p. 687-690.

[9] A. PEŁCZYNSKI : C.R.A.S. (1973, à paraître).

[10] S. SIMMONS : Local reflexivity and (p,q)-summing maps, Math. Ann. 198, p. 335-344 (1972).

****