Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

J. T. Lapreste

Sous-espaces l_n^p complémentés dans un espace à base inconditionnelle, d'après L. Tzafriri

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 19, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A21_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

SEMINAIRE MAUREY-SCHWARTZ 1973-1974

SOUS-ESPACES l_n^p COMPLEMENTES DANS UN ESPACE A BASE INCONDITIONNELLE, D'APRES L. TZAFRIRI

par J.T LAPRESTE

Exposé N° XIX

10 Avril 1974

Donnons dès à présent le résultat principal de cet exposé :

<u>Théorème 1</u> : Soit X un espace de Banach à base inconditionnelle. Alors, il existe une constante M et une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de projections de rang n sur X, telles que :

1) $\sup_n \|P_n\| \leq M$.

2) Pour au moins un p appartenant à $\{1,2,\infty\}$

$$d(P_n X , l_p^n) \leq M .$$

Rappelons diverses définitions pour clarifier cet énoncé.

Un espace de Banach X étant donné, une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de X sera dite basique inconditionnelle de constante d'inconditionnalité K, si pour toute partie finie J de $\mathbb{N}$, on a :

$$\Big\| \sum_{\substack{i \in J \\ i \leq n}} t_i X_i \Big\| \leq K \Big\| \sum_{i \leq n} t_i X_i \Big\| ,$$

et cela pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et toute famille de scalaires $(t_i)_{i \leq n}$.

D'autre part, une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments non nuls sera dite basique monotone (à droite) si pour tous entiers n, p :

$$\Big\| \sum_1^n t_i X_i \Big\| \leq \Big\| \sum_1^{n+p} t_i X_i \Big\| ,$$

pour toute suite de scalaires $(t_i)_{i \leq n+p}$.

Remarquons que le théorème 1 n'est pas un énoncé presque isométrique (hélas !) et que nous pourrons toujours remplacer la norme initiale sur X par une norme équivalente "judicieuse", au cours de la démonstration.

Nous supposerons (et c'est possible en toute généralité) que si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base (resp. une base inconditionnelle) dans X, la norme dans X en fait une suite monotone (resp. une base inconditionnelle de constante $K = 1$), (cf. par exemple Singer Bases in Banach spaces, Springer Verlag).

Soit donc X un espace de Banach muni d'une base monotone normalisée (pour tout n $\|X_n\| = 1$), alors une modification aisée de l'argument de Brunel (exposé XV) donne le résultat suivant :

<u>Proposition 1</u> : Pour tout ε positif, il existe une suite croissante de réels positifs $(\lambda(j))_{j \in \mathbb{N}}$ et une sous suite basique de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, soit $z_j = X_{k_j}$ telle que :

$$0 \leq \lambda(j) - \|z_{k_1} + z_{k_2} + \dots + z_{k_j}\| \leq \varepsilon ,$$

pour toute suite d'entiers $(k_1, \dots, k_j)$ telle que $j < k_1 < \dots < k_j$.

□ D'après le théorème de Brunel-Sucheston, exposé XV, proposition 1, il existe une suite (e_n) extraite de (x_n) et une suite de réels $L(j)$ tels que :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \nu \in \mathbb{N} ,\ \nu < n_1 < n_2 < \dots < n_j \Rightarrow \left| \left\| \sum_{i=1}^{j} e_{n_i} \right\| - L(j) \right| \leq \varepsilon .$$

La base (x_n) étant monotone, on voit immédiatement que la suite $(L(j))$ est croissante. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On peut trouver une suite (ν_j), que l'on peut supposer croissante, telle que :

$$\nu_j < n_1 < \dots < n_j \quad \Rightarrow \quad \left| \left\| \sum_{i=1}^{j} e_{n_i} \right\| - L(j) \right| \leq \varepsilon/2 .$$

La sous suite $z_j = e_{\nu_j}$ convient alors, en posant $\lambda(j) = L(j) + \varepsilon/2$. ■

<u>Proposition 2</u> : Fixons $0 < \varepsilon < 1$ dans la proposition 1 et soient $(\lambda(j))_{j \in \mathbb{N}}$ et $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$, les deux suites définies plus haut.

Supposons l'existence d'un entier h strictement supérieur à 1, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda(hn) \geq (1+\varepsilon)\,\lambda(n) .$$

Alors il existe une constante A et un réel q tels que :

$$\frac{\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j z_{m+K_j} \right\|}{\lambda(n)} \leq A \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^q \right)^{1/q}}{n^{1/q}} ,$$

cela pour $n \in \mathbb{N}$, $m > n$; $0 < K_1 < K_2 < \ldots < K_n$ et pour toute famille $(a_i)_{i \leq n}$ de scalaires.

□ Choisissons tout d'abord un nombre réel r tel que l'on ait $1 < h^{1/r} \leq 1+\varepsilon$. On aura :

$$\lambda(hn) \geq h^{1/r} \lambda(n)$$

et donc :

$$\lambda(h^s n) \geq (h^s)^{1/r} \lambda(n)$$

pour tout entier s. On en déduit immédiatement, si α et β sont deux entiers tels que $\alpha \geq \beta$:

$$\frac{\lambda(\alpha)}{\lambda(\beta)} \geq h^{-1/r} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/r} .$$

(Considérer un entier s tel que $h^s \beta \leq \alpha < h^{s+1}\beta$).

Fixons à présent $n < m$, et $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$.

Alors pour toute suite $(a_i)_{i \leq n}$ de scalaires, on peut écrire :

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j z_{m+K_j} \right\| \leq \sum_{S=1}^{4} \left\| \sum_{j=1}^{n} b_j^{(s)} z_{m+K_j} \right\|$$

où $a_j = (b_j^{(1)} - b_j^{(2)}) + i(b_j^{(3)} - b_j^{(4)})$, $1 \leq j \leq n$, et $0 \leq b_j^{(s)} \leq |a_j|$, $s = 1,2,3,4$;

$j = 1,\dots,n$.

Soient donc $\sum_{j=1}^{n} b_j \, z_{m+K_j}$ une des quatre sommes avec $0 \le b_j \le |a_j|$, et π une permutation de $\{1,2,\dots,n\}$ telle que :

$$b_{\pi(1)} \ge b_{\pi(2)} \ge \dots \ge b_{\pi(n)} .$$

Alors :

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} b_j \, z_{m+K_j} \Big\| = \Big\| \sum_{j=1}^{n} b_{\pi(j)} \, z_{m+K_{\pi(j)}} \Big\|$$

$$\le \sum_{j=1}^{n-1} (b_{\pi(j)} - b_{\pi(j+1)}) \Big\| \sum_{j=1}^{j} z_{m+K_{\pi(j)}} \Big\| + $$

$$+ \, b_{\pi(n)} \Big\| \sum_{j=1}^{n} z_{m+K_j} \Big\|$$

$$\le \sum_{j=1}^{n-1} (b_{\pi(j)} - b_{\pi(j+1)}) \, \lambda(j) + b_{\pi(n)} \, \lambda(n).$$

Donc $[\lambda(n)]^{-1} \Big\| \sum_{j=1}^{n} b_j \, z_{m+K_j} \Big\| \le h^{1/r} \Big[\sum_{j=1}^{n-1} (b_{\pi(j)} - b_{\pi(j+1)}) \left(\frac{j}{n}\right)^{1/r} + b_{\pi(n)} \Big]$

$$\le h^{1/r} \sum_{j=1}^{n} b_{\pi(j)} \Big[\left(\frac{j}{n}\right)^{1/r} - \frac{j-1}{n}^{1/r} \Big].$$

Soit r' tel que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

En remarquant que l'on a $j^{1/r} - (j-1)^{1/r} \le j^{-1/r'}$, puis en appliquant l'inégalité de Hölder à un couple conjugué (q,q'), $q > r$, on a successivement

$$[\lambda(n)] \, \Big\| \sum_{j=1}^{n} b_j \, z_{m+K_j} \Big\| \le \frac{h^{1/r}}{n^{1/r}} \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{\pi(j)}}{j^{1/r'}}$$

$$\le \frac{h^{1/r}}{n^{1/r}} \Big[\sum_{j=1}^{n} |b_{\pi(j)}|^q \Big]^{1/q} \Big[\sum_{j=1}^{n} j^{-q'/r'} \Big]^{1/q'}$$

$$\leq \frac{h^{1/r}}{n^{1/r}} \left[\sum_{j=1}^{n} |a_j|^q \right]^{1/q} n^{\frac{1}{q'} - \frac{1}{r'}} \left(1 - \frac{q'}{r'}\right)^{-1/q'}$$

(cette dernière inégalité obtenue en intégrant $X \to X^{-q'/r'}$ de 0 à n)

$$\leq \frac{h^{1/r}}{n^{1/q}} \left(1 - \frac{q'}{r'}\right)^{-1/q'} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^q \right)^{1/q}$$

et enfin

$$[\lambda(n)]^{-1} \left\| \sum_{j=1}^{n} a_i \, z_{m+K_j} \right\| \leq 4\, h^{1/r} \left(1 - \frac{q'}{r'}\right)^{-1/q'} \frac{(\Sigma\, |a_j|^q)^{1/q}}{n^{1/q}}$$

ce qui est le résultat désiré avec $A \geq 4\, h \left(1 - \frac{q'}{r'}\right)^{-1/q'}$. ∎

<u>Proposition 3</u> : Soit V un espace vectoriel de dimension 2^n engendré par $(v_1, v_2, \ldots, v_{2^n})$. S'il existe une constante K et un réel $p \geq 2$ tels que :

$$K^{-1}\, 2^{-n/p'} \left[\sum_{j=1}^{2^n} |a_j|^{p'} \right]^{1/p'} \leq \frac{\left\| \sum_{j=1}^{2^n} a_j\, v_j \right\|}{\left\| \sum_{j=1}^{2^n} v_j \right\|} \leq K\, 2^{-n/p} \left[\sum_{j=1}^{2^n} |a_j|^p \right]^{1/p},$$

pour toute famille $(a_j)_{j=1,2,\ldots,2^n}$ de scalaires $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$; il existe une constante M ne dépendant que de K et p (i e. indépendante de V et n) et une projection P de V dans lui-même telle que $\|P\| \leq M$ et $d(PV, l_2^n) \leq M$.

□ Soit $r_n(t)$ la $n^{\text{ième}}$ fonction de Rademacher sur $[0,1]$ (i.e. $r_n(t) = \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi t))$) ; posons :

$$\varepsilon_k^{(j)} = r_k \left(\frac{j-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \right).$$

On a évidemment pour $K \leq n$:

$$r_K = \sum_{j=1}^{2^n} \varepsilon_K^j \; 1_{\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right[}.$$

Considérons $w_K = \sum_{j=1}^{2^n} \varepsilon_K^j v_j$; suivant la terminologie classique, nous appellerons $(w_K)_{K=1,2,\dots,n}$ le système de Rademacher associé à $(v_j)_{j=1,\dots,2^n}$ dans V.

A présent, par l'inégalité bien connue de Khintchin, il existe pour tout réel $r \geq 1$ une constante K_r telle que :

$$K_r^{-1}(\Sigma\ |a_K|^2)^{1/2} \leq \|\sum_{K=1}^{n} a_K\ r_K\|_r \leq K_r(\Sigma\ |a_K|^2)^{1/2}$$

pour toute famille $(a_K)_{K=1,\dots,n}$ de scalaires. ($\|F\|_r$ désigne ici la norme dans $L^r([0\ 1],dt)$ de la fonction F).

Par conséquent, on a successivement :

$$\|\sum_{K=1}^{n} a_K\ w_K\| = \|\sum_{n=1}^{n} a_K \sum_{j=1}^{2^n} \varepsilon_K^{(j)}\ v_j\| ,$$

$$= \|\sum_{j=1}^{2^n} (\sum_{K=1}^{n} a_K\ \varepsilon_K^{(j)}\ v_j\|$$

$$\leq \|\sum_{j=1}^{2^n} v_j\|\ K\ \ 2^{-n/p}[\sum_{j=1}^{2^n} |\sum_{n=1}^{n} a_K\ \varepsilon_K^{(j)}|^p]^{1/p}$$

par hypothèse

$$\leq \|\sum_{j=1}^{2^n} v_j\|\ K\ \|\sum_{K=1}^{n} a_K\ r_K\|_p$$

d'après la définition des fonctions de Rademacher

$$\leq \|\sum_{j=1}^{2^n} v_j\|\ K\ K_p\ (\sum_{K=1}^{n} |a_K|^2)^{1/2}$$

par l'inégalité de Khintchin.

De même, on voit facilement que l'on a :

$$\|\sum_{j=1}^{2^n} v_j\| \; K^{-1} K_{p'}^{-1} \; (\sum_{K=1}^{n} |a_K|^2)^{1/2} \le \|\sum_{K=1}^{n} a_K w_K\| \; ;$$

ce qui montre que $d(W, l_2^n) \le K^2 K_p K_{p'}$, si $W = [(w_K)_{K=1,\dots,n}]$.

D'autre part, soit Q la projection orthogonale de $L^2([0\ 1],dt)$ sur $[r_1, r_2, \dots, r_n]$. On sait que Q est alors une projection continue dans tous les $L^r([0\ 1],dt)$ $1 < r < +\infty$ et que la norme $\|Q\|_r$ dans $L^r([0\ 1],dt)$ est majorée par une constante indépendante de n.

Si $Q(\sum_{j=1}^{2^n} a_j 1_{]\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]}) = \sum_{n=1}^{n} b_K r_K$, alors posons :

$$P\,(\sum_{j=1}^{2^n} a_j v_j) = \sum_{K=1}^{n} b_K w_K \quad ;$$

il est alors facile de voir que P est une projection de V sur W.

De plus

$$\begin{aligned}
\|P\,(\sum_{j=1}^{2^n} a_j v_j\| &= \|\sum_{K=1}^{n} b_K w_K\| \\
&\le K\, K_p \; \|\sum_{j=1}^{2^n} v_j\| \; (\sum_{K=1}^{n} |b_K|^2)^{1/2} \\
&\le K\, K_p\, K_{p'} \; \|\sum_{j=1}^{2^n} v_j\| \; \|\sum_{K=1}^{n} b_K r_K\|_{p'} \\
&\le K\, K_p\, K_{p'} \; \|Q\|_{p'} \; \|\sum_{j=1}^{2^n} v_j\| \; 2^{-n/p'} (\sum_{j=1}^{2^n} |a_j|^{p'})^{1/p'} \\
&\le K^2 K_p\, K_{p'} \; \|Q\|_{p'} \; \|\sum_{j=1}^{2^n} a_j v_j\| \; ;
\end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat avec $M = \|Q\|_{p'} \; K^2 K_p K_{p'}$. ■

Nous sommes à présent en mesure d'attaquer la démonstration du théorème 1.

Soit donc $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base inconditionnelle normalisée d'un espace de Banach X, base dont on pourra sans restreindre la généralité supposer la constante d'inconditionnalité égale à 1, et soit $0 < \varepsilon < 1$.

Par la proposition 1, on associe à $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et à sa suite biorthogonale $(X_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites croissantes de réels $(\lambda(j))_{j \in \mathbb{N}}$, $(\mu(j))_{j \in \mathbb{N}}$ et deux sous suites $z_i = X_{n_i}$, $z_i^* = X_{n_i}^*$, $i \in \mathbb{N}$.

$$0 < \lambda(j) - \| z_{K_1} + z_{K_2} + \ldots + z_{K_j} \| < \varepsilon$$

$$0 < \mu(j) - \| z^*_{K_1} + z^*_{K_2} + \ldots + z^*_{K_j} \| < \varepsilon$$

pour toutes familles d'indices telles que :

$$j < K_1 < K_2 < \ldots < K_j \quad , \; j \in \mathbb{N} \; .$$

Nous allons à présent distinguer 3 cas.

<u>Cas I</u> : Pour tout entier $h > 1$, il existe un entier $n = n(h)$ tel que $\lambda(h\,n) < (1+\varepsilon)\,\lambda(n)$.

Fixons h et $n = n(h)$; posons

$$u_K = [\lambda(n)]^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} z_{h\,n + (K-1)n + j} \right) , \; K = 1, \ldots, h \; .$$

On a :

$$\| u_K \| = [\lambda(n)]^{-1} \left\| \sum_{j=1}^{n} z_{h\,n + (K-1)n + j} \right\|$$

$$\geq \frac{\lambda(n) - \varepsilon}{\lambda(n)}$$

$$\geq 1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

$$\geq \frac{1}{1+\varepsilon} \geq \frac{1}{2}$$

Donc, pour toute famille $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ de scalaires :

$$\frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \right\|$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \right\|$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| [\lambda(n)]^{-1} \left\| \sum_{j=1}^{hn} z_{n+j} \right\|$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \frac{\lambda(hn)}{\lambda(n)}$$

$$\leq 2 \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$$

ce qui montre que $d(F_n, l_\infty^h) \leq 4$ si F_h désigne $[(u_i)_{1 \leq i \leq h}]$. Comme l_∞ est un P_1 espace il existe alors automatiquement une projection P telle que

$$PX = F_h \text{ et } \|P\| \leq 4 .$$

<u>Cas II</u> : Pour tout entier h il existe un entier $n(h) = n$ tel que

$$\mu(hn) < (1+\varepsilon) \mu(n) .$$

Par le même argument que dans le cas I, on construit alors une famille $(y_1^*,\dots,y_h^*)$ de vecteurs de X' à supports disjoints (sur $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$) et tels que

$$\frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{h} a_i y_i^* \right\| \leq 2 \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| .$$

Soient y_i, $i = 1,\dots,h$ des vecteurs de X tels que

1) $\|y_i\| = 1$,

2) $2 \geq \langle y_i^*, y_i \rangle \geq \frac{1}{2}$,

et tels que le support de y_i soit contenu dans celui de y_i^* .

Alors :

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} b_i\, y_i\Big\| \leq \sum_{i=1}^{n} |b_i|$$

$$\leq 2 \langle [\sum_{i=1}^{h} \mathrm{sgn}(b_i)\, y_i^*], [\sum_{i=1}^{h} b_i\, y_i] \rangle$$

$$\leq 4 \,\Big\|\sum_{i=1}^{h} b_i\, y_i\Big\| .$$

Définissons ensuite

$$P_h(X) = \sum_{i=1}^{h} \frac{\langle y_i^*, X \rangle}{\langle y_i^*, y_i \rangle}\, y_i$$

On vérifie facilement que P_h est une projection de X sur G_h, où $G_h = [(y_i)_{1 \leq i \leq h}]$; et

$$\|P_h(X)\| \leq \sum_{i=1}^{h} \frac{|\langle y_i^*, X \rangle|}{\langle y_i^*, y_i \rangle}$$

$$= \sum_{i=1}^{h} \frac{\mathrm{sgn}(\langle y_i^*, X \rangle)}{\langle y_i^*, y_i \rangle} \langle y_i^*, X \rangle$$

$$\leq 4 \|X\|$$

i.e. $\|P_h\| \leq 4$.

Cas III : Supposons que nous ne sommes dans aucun des cas I et II ; alors la proposition 2 s'applique à la fois à X et X' et on obtient une constante $B > 1$ et un réel $p > 2$ avec simultanément :

$$[\lambda(n)]^{-1} \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j z_{n+j} \right\| \leq B\, n^{-1/p} [\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p]^{1/p} \qquad (*)$$

$$[\mu(n)]^{-1} \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j z^*_{n+j} \right\| \leq B\, n^{-1/p} [\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p]^{1/p} \qquad (**)$$

pour tout entier n, et toute famille $(a_j)_{j=1,\dots,n}$ de scalaires.

Si nous réussissons à trouver une constante K indépendante de n telle que l'on ait :

$$\mu(n)\, \lambda(n) \leq K\, n ,$$

alors si p' est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on aura :

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j z_{n+j} \right\| \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} |a_j|^{p'}}{\left\| \sum_{j=1}^{n} |a_j|^{p'-1} \operatorname{sgn}(a_j)\, z^*_{n+j} \right\|}$$

$$\geq B^{-1} [\sum_{j=1}^{n} |a_j|^{p'}] \frac{n^{1/p}}{\mu(n) [\sum_{j=1}^{n} |a_j|^{(p'-1)p}]^{1/p}}$$

$$\geq B^{-1} K^{-1} \lambda(n)\, n^{-1/p'} [\sum_{j=1}^{n} |a_j|^{p'}]^{1/p'} \quad ;$$

et une application de la proposition 3 achèvera la démonstration puisque B, K, p seront indépendants de n.

Démontrons donc le

Lemme : Dans les conditions du cas III, il existe une constante C indépendante de n, tel que $\mu(n)\, \lambda(n) \leq C n$ pour tout entier naturel n.

Fixons n et soit $z_o = \sum_{j=1}^{n} b_j \, z_{n+j}$ un vecteur de X tel que

1) $\|z_o\| = 1$,

2) $\|\sum_{1}^{n} z^*_{n+j}\| = \sum_{1}^{n} b_j$.

Cette construction est toujours possible en remarquant que

$$\|\sum_{j=1}^{n} z^*_{n+j}\| = \sup \{ < \sum_{j=1}^{n} z^*_{n+j}, z > , \ z \in [(z_{n+j})_{i \le j \le n}], \ \|z\| \le 1 \}.$$

Evidemment, alors on peut choisir un z_o de norme 1 réalisant la borne supérieure (en profitant du fait que $[(z_{n+j})_{i \le j \le n}]$ est de dimension finie).

On a

$$z_o = \sum_{j=1}^{n} b_j \, z_{n+j}$$

et

$$\|\sum_{j=1}^{n} z^*_{n+j}\| = < \sum_{j=1}^{n} z^*_{n+j}, z_o >$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j \ .$$

Considérons l'ensemble

$$\Theta_C = \{ j : 1 \le j \le n \ ; \ |b_j| \ge \frac{8C}{\lambda(n)} \} \ ,$$

en nous réservant le droit de prendre l'entier C assez grand et soit

$$s = \text{card } \Theta_C \ .$$

L'inégalité
$$1 = \|z_o\| \geq \Big\| \sum_{j \in \Theta_C} |b_j| \, z_{n+j} \Big\|$$
$$\geq \frac{8C}{\lambda(n)} \Big\| \sum_{j \in \Theta_C} z_{n+j} \Big\|$$
$$\geq \frac{8C}{\lambda(n)} \frac{\lambda(s)}{2}$$
$$\geq 4C \frac{\lambda(s)}{\lambda(n)} ,$$

implique que $n > C s$.

Sinon, en effet, $n \leq C s$ et

$$\lambda(n) \leq 2 \Big\| \sum_{j=1}^{n} z_{C s+j} \Big\|$$
$$\leq 2 \Big\| \sum_{j=1}^{C s} z_{C s+j} \Big\|$$
$$\leq 2 C \lambda(s),$$ ce qui est une contradiction.

On a donc $\frac{s}{n} < \frac{1}{C}$ et par (**) :

$$\frac{\mu(s)}{\mu(n)} \leq 2 [\mu(n)]^{-1} \Big\| \sum_{j=1}^{s} z^*_{n+j} \Big\|$$
$$\leq 2 B [\mu(n)]^{-1} \mu(n) n^{-1/p} s^{1/p}$$
$$\leq 2 B C^{-1/p} .$$

Si l'on prend $C \geq (8 B)^p$, on a alors :

$$\mu(s) \leq \frac{1}{4} \mu(n) ;$$

et donc
$$\mu(n) \leq 2 \left\| \sum_{j=1}^{n} z^*_{n+j} \right\|$$
$$\leq 2 \left(\sum_{1}^{n} b_j \right)$$
$$\leq 2 \left(\sum_{j \in \Theta_C} b_j \right) + 2 \frac{8C}{\lambda(n)} n$$
$$\leq 16\ C \frac{n}{\lambda(n)} + 2 < \sum_{j \in \Theta_C} z^*_{n+j}, z_o >$$
$$\leq 16\ C \frac{n}{\lambda(n)} + 2\ \mu(s)$$
$$\leq 16\ C \frac{n}{\lambda(n)} + \frac{\mu(n)}{2} .$$

D'où $\lambda(n)\ \mu(n) \leq 32\ C n$, ce qui achève la démonstration du lemme et du théorème 1.

Brunel a démontré sans le dire explicitement (exposé XV) le théorème suivant.

<u>Théorème 2</u> : Soit E un espace de Banach,alors il existe un autre espace de Banach F finiment représentable dans E et possédant une base inconditionnelle.

Ce théorème, joint à la remarque que $l^{\infty}_{2^n}$ contient une copie isométrique de l^1_n (le système de Rademacher associé à la base canonique,et que l^1_N contient une copie K-isométrique de l^2_n , démontre le théorème suivant qui est une version faible de celui de Dvoretzky.

<u>Théorème 3</u> : Pour tout espace de Banach E, il existe une constante K et une famille F_n de sous-espaces de E, dim F_n = n tels que $d(F_n, l^n_2) < K$.

Achevons cet exposé en remarquant que les versions infinies du théorème 1 et du théorème 3 sont fausses toutes deux.

$l^2(l_n^1)$ contient des l_n^1 1-complémentés et est réflexif, donc ne peut contenir l_1 ; son dual $l^2(l_n^\infty)$ possède la même propriété vis à vis de l_n^∞ . Pour touver enfin des l_n^2 1-complémentés sans pour autant avoir l_2, il suffit de prendre $l^1(l_n^2)$ qui est un espace dont tout sous-espace de dimension infinie contient l_1.

***

BIBLIOGRAPHIE

I. SINGER : Bases in Banach spaces , Springer Verlag.

****