Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Beauzamy

Opérateurs convexifiants

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 17, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A19_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex C5

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

OPERATEURS CONVEXIFIANTS

par B. BEAUZAMY

Exposé N° XVII   13 Mars 1974

Nous allons introduire dans cet exposé, pour des opérateurs linéaires continus entre espaces de Banach, des définitions analogues à celles de [1] et [2]. Nous utiliserons un théorème de W.J. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson et A. Pelczynski ; nous allons en rappeler l'énoncé et la démonstration.

<u>Théorème</u> : (Davis, Figiel, Johnson, Pelczynski) [3] : Soient E et F deux espaces de Banach, T un opérateur linéaire continu de E dans F. T est faiblement compact si et seulement si l'on peut trouver un espace réflexif Y et deux opérateurs linéaires continus $u : E \to Y$, $v : Y \to F$ tels que $T = v \circ u$. (On dira alors que T se factorise par un espace réflexif).

<u>Démonstration</u> :

a) si T se factorise par un espace Y réflexif, $T(B_E) = v(u(B_E))$; $u(B_E)$ est faiblement relativement compact, et il en est de même de $T(B_E)$. T est donc faiblement compact.

b) Soit $W = T(B_E)$. W est donc un convexe équilibré borné de F. Posons, pour $n = 1,2,\dots$:

$$\mathcal{U}_n = 2^n W + 2^{-n} B_F .$$

Notons $\| \ \|_n$ la jauge de $\mathcal{U}_n$; pour chaque n, c'est une norme équivalente à la norme de F. Plus précisément, on a :

$$2^{-n}\|x\|_n \le \|x\| \le (2^n + 2^{-n}) \|x\|_n \quad , \quad \forall\, x \in F .$$

Soit Y l'ensemble des points de F tels que $(\Sigma \|x\|_n^2)^{1/2} < \infty$, muni de la norme

$$\|x\|_Y = \Sigma \|x\|_n^2)^{1/2} .$$

On notera $C = \{x \in F \ , \ (\Sigma \|x\|_n^2)^{1/2} \le 1\}$ et j l'injection canonique de Y dans F.

On va donner quelques propriétés de cette construction :

<u>Lemme</u> : a) $W \subset C$

b) Y est un espace de Banach et j est continu

c) $j'' : Y'' \to F''$ est bijective, et $(j'')^{-1}(F) = Y$

d) Y est réflexif si et seulement si W est faiblement relativement compact.

<u>Démonstration du lemme</u> : a) Notons j_W la jauge de W. Si $w \in W$, on a par définition

$$\|w\|_n \leq 2^{-n} j_W(w) \leq 2^{-n}$$

et donc $\|w\|_Y \leq 1$, donc $W \subset C$.

b) Soit F_n l'espace F muni de la norme $\| \ \|_n$; soit $Z = (\Sigma F_n)_2$, c'est-à-dire l'espace défini par :

$$Z = \{z = (z_1, \dots, z_n, \dots), \quad z_n \in F_n \quad \forall n = 1, \dots$$

et

$$\Sigma \|z_n\|^2_{F_n} < \infty\},$$

muni de la norme

$$\|z\|_Z = (\Sigma \|z_n\|^2_n)^{1/2} .$$

Définissons une application linéaire φ de Y dans Z en posant $\varphi(y) = (jy, jy, \dots)$. On a

$$\|\varphi(y)\|_Z = (\Sigma \|jy\|^2_n)^{1/2} = \|y\|_Y$$

et φ est donc un plongement isométrique de Y dans Z ; l'image $\varphi(Y)$ est

$$\varphi(Y) = \{z, \ z = (x_n), \ x_n = x_1 \ \forall n\} .$$

C'est un sous-espace fermé de Z : si $z^{(P)} \to z$, $z_n^{(P)} \underset{p\to\infty}{\to} z_n$, mais puisque $z_n^{(p)} = z_1^{(p)} \ \forall n$, il en est de même pour z.

Par conséquent, on peut considérer j comme la composition de φ et de la projection de Z sur la première coordonnée.

c) Puisque $Z = (\Sigma F_n)_2$, on a $Z' = (\Sigma F'_n)_2$, $Z'' = (\Sigma F''_n)_2$. Montrons que l'image de Y'' par φ'' est constituée, dans Z'', d'éléments de la forme $(z'',z'',\ldots)$, $z'' \in F''$.

Y est dense dans Y'' pour $\sigma(Y'',Y')$ et donc $\varphi''(Y)$ est dense dans $\varphi''(Y'')$ pour $\sigma(Z'',Z')$. Or $\varphi''(Y)$ est constitué d'éléments de la forme $(z'',z'',\ldots)$, $z'' \in F''$. Si on montre que l'ensemble de ces éléments est fermé pour $\sigma(Z'',Z')$, il contiendra $\varphi''(Y'')$, adhérence faible de $\varphi''(Y)$.

Notons D l'ensemble de ces éléments. Si $z''^{(i)}$ converge vers z'' pour $\sigma(Z'',Z')$, on a a fortiori

$$< z''^{(i)}_n , \xi > \;\rightarrow\; < z''_n , \xi >$$

pour chaque $\xi \in F'$, et puisque $z''^{(i)}_n = z''^{(i)}_1$ $\forall$ n, il en est de même pour z''. Par conséquent, $\varphi''(Y'')$ est bien constitué d'éléments de la forme $(z'',z'',\ldots)$. Or on a vu que $j = \pi_1 \circ \varphi$, et donc $j'' = \pi''_1 \circ \varphi''$. Donc, si $y'' \in Y''$, $\pi''_1 \varphi''(y'') = j''(y'')$, et donc $z'' = j''(y'')$.
On a donc

$$\varphi''(y'') = (j''y'', j''y'', \ldots).$$

Puisque φ est une isométrie, on a aussi

$$\varphi''^{-1}(0) = \{0\},$$

$$\varphi''^{-1}(\varphi(Y)) = Y.$$

d) Montrons que l'adhérence de C dans F'', pour $\sigma(F'',F')$, est $j''(B_{Y''})$.

On sait que $B_{Y''}$ est compact pour $\sigma(Y'',Y')$, et que B_Y est dense dans $B_{Y''}$ pour cette topologie. Donc $j''(B_{Y''})$ est compact pour $\sigma(F'',F')$, donc fermé, et $j''(B_Y) = j(B_Y) = C$ est dense dans $j''(B_{Y''})$ pour cette topologie.

Si W est relativement faiblement compact, $\overline{W}$ est $\sigma(F,F')$ compact, et les ensembles

$$2^n \overline{W} + 2^{-n} B_{F''} \quad , \quad n = 1,\dots$$

contiennent C (car, pour tout n, $2^n W + 2^{-n} B_F$ contient C) et sont fermés pour $\sigma(F'',F')$, et donc contiennent $j''(B_Y)$. Mais on a :

$$\bigcap_n (2^n \overline{W} + 2^{-n} B_{F''}) \subset \bigcap_n (F + 2^{-n} B_{F''}) = F$$

et donc $j''(B_{Y''}) \subset F$, et par conséquent $Y'' \subset Y$, et Y est réflexif.

La démonstration du théorème s'en déduit aussitôt : si $T : E \to F$ est faiblement compact, $W = T(B_E)$ est relativement faiblement compact dans F, et les opérateurs $j^{-1}\ T : E \to Y$ et $j : Y \to F$ donnent la factorisation cherchée.

Nous allons maintenant donner une généralisation des notions introduites en [1] et [2]. La notion d'arbre fini est celle donnée en [1], la notion d'arbre infini en [2].

<u>Définition 1</u> : Soit F un espace de Banach et W un convexe borné de F, que, pour simplifier, nous supposerons inclus dans B_F.
Nous dirons que le 2^n-uple $(x_1,\dots,x_{2^n})$ forme une (n,ε)-branche dans W si $x_i \in W$, $i = 1,\dots,2^n$ et si le 2^n-uple $(x_1,\dots,x_{2^n})$ forme une (n,ε)-branche dans F.
Nous dirons que W possède la propriété d'arbre fini dans F si, pour un certain $\varepsilon > 0$ et pour tout n, on peut trouver une (n,ε) branche dans W. dans le cas contraire, nous dirons que W ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F.
De même nous dirons que W possède la propriété d'arbre infini dans F, si pour un certain $\varepsilon > 0$, on peut trouver un arbre infini dont tous les points sont dans W.

<u>Lemme 1</u> : Si $\overline{W}$ ne possède pas la propriété d'arbre infini dans F, et donc a fortiori s'il ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F, $\overline{W}$ est faiblement compact dans F.

<u>Démonstration</u> : Supposons que $\overline{W}$ ne soit pas faiblement compact. D'après un théorème de R.C. James, [5, th.3], analogue à celui démontré en [2], on peut trouver, pour un certain $\theta \in]0,1[$, une suite de points de W, $z_1, \ldots, z_n, \ldots$, et une suite de formes linéaires continues $g_1, \ldots, g_n, \ldots$ $\|g_i\| \leq 1$ $\forall$ i, telles que

$$g_n(z_k) = 0 \quad \text{si } n > k$$
$$g_n(z_k) = \theta \quad n \leq k \ .$$

On en déduit, pour chaque n,

$$|g_{n+1} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i - \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i z_i)| = |\sum_{n+1}^{\infty} \beta_i| \theta$$

et donc

$$\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i - \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i z_i\| \geq |\sum_{n+1}^{\infty} \beta_i| \theta$$

et, par conséquent, pour chaque n,

$$\text{dist } (\text{conv}(z_1, \ldots, z_n), \text{conv}(z_{n+1}, \ldots)) \geq \theta .$$

Ceci prouve que les points $z_1, \ldots, z_n, \ldots$ forment un arbre infini dans W.

Remarquons qu'il résulte du lemme d'Asplund et Namioka vu dans [2] qu'inversement, si $\overline{W}$ possède la propriété d'arbre infini, $\overline{W}$ ne peut être faiblement compact.

<u>Lemme 2</u> : Si W ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F, $\overline{W}$ ne possède pas non plus la propriété d'arbre fini dans F.

<u>Démonstration</u> : Supposons que $\overline{W}$ possède la propriété d'arbre fini dans F. Soient $(x_1, \ldots, x_{2^n})$ les points de W qui forment une (n, ε) branche dans $\overline{W}$.

Soient $x'_1, \ldots, x'_{2^n}$ des points de W vérifiant

$$\|x'_i - x_i\| < \varepsilon/4 \ , \quad i = 1, \ldots, 2^n$$

On a

$$\|x'_{2i} - x'_{2i-1}\| \geq \|x_{2i} - x_{2i-1}\| - \|x_{2i} - x'_{2i}\| - \|x_{2i-1} - x'_{2i-1}\| \geq \varepsilon/2$$

et de même

$$\left\| \frac{x'_{2i} + x'_{2i-1}}{2} - \frac{x_{2i} + x_{2i-1}}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} \left(\|x'_{2i} - x_{2i}\| + \|x'_{2i-1} - x_{2i-1}\| \right)$$

$$\leq \varepsilon/4.$$

On en déduit que les points (x'_i), $i = 1,\dots,2^n$ forment une $(n,\varepsilon/2)$ branche dans W.

Il résulte de ces deux lemmes que si W ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F, W est relativement faiblement compact dans F.

<u>Définition 2</u> : Soient F et F' deux espaces de Banach, W et W' des convexes bornés équilibrés dans F et F' respectivement. On dira que (W',F') est finiment représentable dans (W,F) si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-espace de dimension finie F'_o de F', on peut trouver un sous-espace de dimension finie F_o de F et un isomorphisme $T_{o,\varepsilon}$ de F'_o sur F_o avec $\|T_{o,\varepsilon}\| \, \|T^{-1}_{o,\varepsilon}\| \leq 1 + \varepsilon$ et $T_{o,\varepsilon}(W' \cap F'_o) \subset (1+\varepsilon)\, W$.

<u>Proposition 1</u> : W ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F si et seulement si pour tout (W',F') finiment représentable dans (W,F), W' est relativement faiblement compact dans F'.

<u>Démonstration</u> : a) Supposons que W ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F et soit (W',F') finiment représentable dans (W,F). Nous voulons montrer que W' est relativement faiblement compact dans F'. Il revient au même de montrer que si W' n'est pas relativement faiblement compact, W possède la propriété d'arbre fini.

Si W' n'est pas relativement faiblement compact dans F', W' possède la propriété d'arbre fini dans F', d'après les lemmes 1 et 2. Pour m fixé, considérons la (m,ε)-branche qui existe dans W' ; elle engendre un espace de même dimension de F. T envoie les points $(x'_1,\dots,x'_{2^m})$ qui forment la branche sur des points $(x_1,\dots,x_{2^m})$, qui sont dans $(1+\varepsilon)W$. Après homothétie, on obtient donc une (m,ε')-branche dans W. W possède donc la propriété d'arbre fini.

b) Supposons maintenant que W possède la propriété d'arbre fini ; soient $x_i^{(n)}$, $i = 1,\dots,2^n$ les points de la (n,ε)-branche. Nous faisons la même construction que dans [2] : considérant une suite de symboles (ξ_i), on définit la norme d'une combinaison linéaire finie à coefficients rationnels, par :

$$\|\Sigma\, \alpha_i \xi_i\| = \lim_{n\to\infty} \|\Sigma\, \alpha_i x_i^{(k_n)}\|$$

pour une certaine sous-suite (k_n) des entiers.

Les (ξ_i) forment un arbre infini dans F' comme on l'a vu dans [2] ; on prend pour W' l'enveloppe convexe équilibrée des (ξ_i) ; c'est un sous-convexe de la boule unité de F' qui possède la propriété d'arbre infini, et ne peut donc pas être faiblement compact d'après le lemme d'Asplund et Namioka déjà utilisé en [2].

Nous allons maintenant traduire en termes d'uniforme convexité les notions que nous venons d'introduire.

Nous dirons que deux convexes V et W de F sont équivalents si l'on peut trouver deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$C_2\, W \subset V \subset C_1\, W\ .$$

<u>Proposition 2</u> : Soit W un convexe dans la boule unité de F. W ne possède pas la propriété d'arbre fini si et seulement si l'on peut trouver un convexe V équivalent à W, vérifiant :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall\, x,y \in V,\ \ \|x - y\| \geq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad j_V(x+y) \leq j_V(x) + j_V(y) - \delta(\varepsilon).$$

<u>Démonstration</u> : a) Supposons la seconde condition réalisée. Si W possède la propriété d'arbre, il en est de même de V. Soient $x_1,\dots,x_{2^n}$ les points

de V qui forment une (n,ε)-branche dans F. On a donc

$$\| x_{2i} - x_{2i-1} \| \geq \varepsilon \qquad i = 1,\dots,2^{n-1}$$

et donc

$$j_V(x_{2i} + x_{2i-1}) \leq j_V(x_{2i}) + j_V(x_{2i-1}) - \delta(\varepsilon)$$

et

$$j_V\left(\frac{x_{2i} + x_{2i-1}}{2}\right) \leq 1 - \frac{\delta}{2} .$$

A la $n^{\text{ème}}$ simplification de la (n,ε)-branche, on obtient deux points y_1 et y_2, avec

$$j_V(y_1) \leq \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^n$$

$$j_V(y_2) \leq \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^n$$

et

$$\| y_1 - y_2 \| \geq \varepsilon$$

et donc

$$j_V(y_1 - y_2) \geq C\varepsilon$$

et donc

$$C\varepsilon \leq 2 \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^n$$

ce qui est impossible pour n assez grand.

b) Supposons maintenant que W ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F. La démonstration qui suit est une adaptation de celle de [4], que nous avons reproduite dans [1].

Définition : Soit W un convexe dans la boule unité de F, et soit $z \in F$. On dira que le couple (x_1,x_2) de points de F forme une $(1,\varepsilon)$ partition de z si :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = z \\ j_W(x_1) = j_W(x_2) \\ \left\| \dfrac{x_1}{j_W(x_1)} - \dfrac{x_2}{j_W(x_2)} \right\| \geq \varepsilon . \end{cases}$$

Supposons définie une $(n-1,\varepsilon)$ partition de z ; on dira que le 2^n-uple $(x_1,\dots,x_{2^n})$ forme une (n,ε) partition de z si

$$j_W(x_{2j}) = j_W(x_{2j-1}) \quad , \quad j = 1,\dots,2^{n-1} \ ,$$

$$\left\| \frac{x_{2j-1}}{j_W(x_{2j-1})} - \frac{x_{2j}}{j_W(x_{2j})} \right\| \geq \varepsilon \quad , \quad j = 1,\dots,2^{n-1}$$

et si le 2^{n-1}-uple $(x_1 + x_2,\ x_3 + x_4,\dots,\ x_{2^n-1} + x_{2^n})$ forme une $(n-1,\varepsilon)$ partition de z.

<u>Lemme 1</u> : Si W ne possède pas la propriété d'arbre fini, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n et un nombre $\delta > 0$ tels que, pour tout $z \in F$ et toute (n,ε) partition de z, on ait :

$$\sum_{j=1}^{2^n} j_W(x_j) \geq (1-\delta)\, j_W(z) \ .$$

- Si z n'appartient pas à l'espace engendré par W, il en est de même de l'un des x_j au moins, chacun des deux nombres est infini et l'inégalité est vérifiée.

- Supposons donc que z appartienne à l'espace engendré par W ; nous pouvons supposer en outre $j_W(z) = 1$.

Soit $(x_1,\dots,x_{2^m})$ une (m,ε) partition de z.

Considérons les deux vecteurs $x_1+\dots+x_{2^{m-1}}$, $x_{2^{m-1}+1}+\dots+x_{2^m}$.

On a $z = \sum_{i=1}^{2^m} x_i$, $j_W(z) = 1$, et

$$j_W\Big(\sum_{1}^{2^{m-1}} x_i\Big) = j_W\Big(\sum_{2^{m-1}+1}^{2^m} x_i\Big) \ .$$

On en déduit que chacun de ces deux nombres est au moins égal à 1/2.

On a donc

$$\left\| 2(x_1 + \ldots + x_{2^{m-1}}) - 2(x_{2^{m-1}+1} + \ldots + x_{2^m}) \right\| \geq \varepsilon$$

et la jauge de chacun de ces vecteurs est au moins égale à 1.

On montre par récurrence comme dans (1) que si l'on prend la k^e subdivision de la (m,ε) partition de z et qu'on en multiplie les vecteurs par 2^k, on obtient une (k,ε)-branche dont tous les vecteurs ont une jauge au moins égale à 1.

Il en résulte que si l'on prend la $m^{\text{ème}}$ subdivision de la (m,ε) partition et que l'on multiplie les vecteurs par 2^m, on obtient une (m,ε)-branche dont tous les vecteurs ont une jauge au moins égale à 1. Mais puisque W ne possède pas la propriété d'arbre fini, il existe un n et un δ tel que toutes les (n,ε)-branches ainsi formées à partir des (n,ε) partitions de z aient au moins un vecteur de jauge supérieure à $1 + 2^n\delta$. D'où

$$\sum_{i=1}^{2^n} j_W(x_i) \geq (1+\delta)\, j_W(z) .$$

On définit un écart comme dans (1).

<u>Lemme 2</u> : Soit W un convexe borné dans la boule unité de F, ne possédant pas la propriété d'arbre fini. Soient n, δ donnés par le lemme 1. Supposons $0 < \delta < \varepsilon < 1/8$. Il existe un écart dans l'espace engendré par W et un nombre $\delta_1 > 0$ tel que

1) $(1-\delta)\, j_W(x) \leq |x| \leq (1 - \frac{\delta}{3})\, j_W(x)$

2) $j_W(x) = 1$, $j_W(y) = 1$ et $\|x - y\| \geq \varepsilon$ impliquent

$$|x+y| < |x| + |y| - \delta_1 .$$

<u>Démonstration</u> : Pour tout z de l'espace engendré par W, on pose

$$|z| = \inf \frac{\sum_{j=1}^{2^m} j_W(u_j)}{1 + \frac{\delta}{2}\,(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^m})} \;,$$

l'inf portant sur toutes les (m,ε) partitions de z, $(u_1,\dots,u_{2^m})$, pour $m = 0,\dots,n$.

1) On a $(1-\delta)\; j_W(z) \le |z|$, car, pour tout $m \le n$ et toute (m,ε) partition de z, on a :

$$(1-\delta) \sum_1^{2^m} j_W(u_i) \le \frac{\sum_1^{2^m} j_W(u_i)}{1 + \frac{\delta}{2}\,(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^m})} \;.$$

2) Soient maintenant x et y avec $j_W(x) = j_W(y) = 1$ et $\|x-y\| \ge \varepsilon$. (x,y) constituent donc une $(1,\varepsilon)$ partition de $x+y$ comme nous l'avons définie. On achève le calcul comme dans [1], remplaçant $\|\;\|$ par j_W.

<u>Lemme 3</u> : Soit W ne possédant pas la propriété d'arbre fini dans F, et $\varepsilon > 0$, n, δ donnés par le lemme 1. On suppose $0 < \delta < \varepsilon < 1/8$.

Il existe une jauge $j_{5\varepsilon}$ (définie sur l'espace engendré par W) vérifiant :

1) $(1-\delta)\; j_W(x) \le j_{5\varepsilon}(x) \le (1 - \frac{\delta}{3})\; j_W(x)$

2) $j_W(x) = j_W(y) = 1$, $\|x-y\| \ge 5\varepsilon$ impliquent

$$j_{5\varepsilon}(x+y) \le j_{5\varepsilon}(x) + j_{5\varepsilon}(y) - \varepsilon\,\delta_1 \,.$$

<u>Démonstration</u> : On définit $j_{5\varepsilon}(x)$ comme l'infimum dans l'écart défini au lemme 2 des longueurs des polygones reliant 0 à x.
On montre aisément que $j_{5\varepsilon}$ est s us-additive (voir [1]).

1) On a $j_{5\varepsilon}(x) \le (1 - \frac{\delta}{3})\; j_W(x)$ puisque $|x| \le (1 - \frac{\delta}{3})\; j_W(x)$

et puisque $j_W(x) \le \frac{1}{1-\delta}\,|x|$, on a, si (x_i) est un polygone reliant 0 à x :

$$j_W(x) \le \Sigma\; j_W(x_{i+1} - x_i) \le \frac{1}{1-\delta}\; \Sigma\; |x_{i-1} - x_i|$$

et donc

$$j_W(x) \leq \frac{1}{1-\delta} \; j_{5\varepsilon}(x) \; .$$

2) On suppose $j_W(x) = j_W(y) = 1$, $\| x - y \| \geq 5\varepsilon$.
Soit $\gamma > 0$, $\gamma < \varepsilon - \delta$. Par définition de $j_{5\varepsilon}$, on peut trouver deux polygones

$$0 = x_o, \; x_1, \ldots, \; x_n = x$$

$$0 = y_o, \; y_1, \ldots, \; y_m = y$$

tels que

$$\sum_{i=0}^{n-1} |x_{i+1} - x_i| \leq j_{5\varepsilon}(x) + \gamma$$

et

$$\sum_{i=0}^{m-1} |y_{i+1} - y_i| \leq j_{5\varepsilon}(y) + \gamma \; .$$

On a :

$$\Sigma \; j_W(x_{i+1} - x_i) \leq \frac{1}{1-\delta} \, \Sigma \, |x_{i+1} - x_i| \leq \frac{1}{1-\delta} \, (j_{5\varepsilon}(x) + \gamma)$$

$$\leq \frac{1}{1-\delta} \, (1 - \frac{\delta}{3} + \gamma) \leq 1 + \delta + \gamma < 1 + \varepsilon$$

et

$$\Sigma \; j_W(x_{i+1} - x_i) \geq j_W(x) = 1$$

donc, dans la jauge j_W, les longueurs des polygones sont entre 1 et $1 + \varepsilon$.

On introduit de nouveaux points x'_k et y'_k, de façon à ce que

$$j_W(x'_k - x'_{k-1}) = j_W(y'_k - y'_{k-1}) \; .$$

On suppose que dans la jauge j_W, c'est le polygone en y qui est le plus long ; soit k_1 l'indice tel que $x'_{k_1} = x$.

On a

$$\sum_0^{k_1} j_W(x'_i - x'_{i-1}) \geq 1$$

et donc
$$\sum_{0}^{k_1} j_W(y'_i - y'_{i-1}) \geq 1$$

et
$$\sum_{i \geq k_1+1} j_W(y'_{i+1} - y'_i) \leq \varepsilon .$$

Or $\|z\| \leq j_W(z)$ pour tout point de F, et donc
$$\sum_{i > k_1} \|y'_{i+1} - y'_i\| \leq \varepsilon .$$

Donc $\|y - y'_{k_1}\| \leq \varepsilon$ et $\|x - y'_{k_1}\| \geq \|x - y\| - \|y - y'_{k_1}\| \geq 4\varepsilon$

d'où
$$4\varepsilon \leq \sum_{k=1}^{k_1} \|(x'_k - x'_{k-1}) - (y'_k - y'_{k-1})\| .$$

Soit K_1 l'ensemble des indices k tels que
$$\|(x'_k - x'_{k-1}) - (y'_k - y'_{k-1})\| \geq \varepsilon\, j_W(x'_k - x'_{k-1}),$$

K_2 l'ensemble des indices k tels que
$$\|(x'_k - x'_{k-1}) - (y'_k - y'_{k-1})\| < \varepsilon\, j_W(x'_k - x'_{k-1}) .$$

On a :
$$\sum_{k \in K_2} \|(x'_k - x'_{k-1}) - (y'_k - y'_{k-1})\| \leq \varepsilon \sum_{k \in K_2} j_W(x'_k - x'_{k-1}) \leq 2\varepsilon .$$

On en déduit
$$\sum_{k \in K_1} \|(x'_k - x'_{k-1}) - (y'_k - y'_{k-1})\| \geq 2\varepsilon .$$

Si $k \in K_1$, on a :
$$\|(x'_k - x'_{k-1}) - (y'_k - y'_{k-1})\| \geq \varepsilon\, j_W(x'_k - x'_{k-1})$$

et d'après le lemme 2

$$|(x'_k - x'_{k-1}) + (y'_k - y'_{k-1})| \leq |x'_k - x'_{k-1}| + |y'_k - y'_{k-1}| - j_W(x'_k - x'_{k-1}).\delta_1 .$$

D'où

$$\sum_{k \in K_1} |(x'_k - x'_{k-1}) + (y'_k - y'_{k-1})| \leq \sum_{k \in K_1} |x'_k - x'_{k-1}| + \sum_{k \in K_1} |y'_k - y'_{k-1}| - \delta_1 \sum_{k \in K_1} j_W(x'_k - x'_{k-1}) .$$

Mais on a

$$\sum_{k \in K_1} \|(x'_k - x'_{k-1}) - (y'_k - y'_{k-1})\| \geq 2\varepsilon$$

d'où

$$\sum_{k \in K_1} \| x'_k - x'_{k-1}\| + \sum_{k \in K_1} \|y'_k - y'_{k-1}\| \geq 2\varepsilon$$

et

$$\sum_{k \in K_1} j_W(x'_k - x'_{k-1}) + \sum_{k \in K_1} j_W(y'_k - y'_{k-1}) \geq 2\varepsilon$$

mais $j_W(x'_k - x'_{k-1}) = j_W(y'_k - y'_{k-1})$ pour tout k, et donc :

$$\sum_{k \in K_1} j_W(x'_k - x'_{k-1}) \geq \varepsilon$$

et

$$\sum_{k \in K_1} |(x'_k - x'_{k-1}) + (y'_k - y'_{k-1})| \leq \sum_{k \in K_1} |x'_k - x'_{k-1}| + \sum_{k \in K_1} |y'_k - y'_{k-1}| - \varepsilon\, \delta_1 .$$

Par conséquent, considérant le polygone formé des points $x'_k - x'_{k-1} + y'_k - y'_{k-1}$, si $k \in K_1$, $x'_k - x'_{k-1}$ et $y'_k - y'_{k-1}$ si $k \in K_2$, on en déduit, désignant par z'_k ces points

$$\sum_k |z'_k - z'_{k-1}| \leq j_{5\varepsilon}(x) + j_{5\varepsilon}(y) - \varepsilon\,\delta_1 - 2\gamma ,$$

et, puisque γ est arbitraire, on en déduit le résultat.

Lemme 4 : Soit W ne possédant pas la propriété d'arbre fini et $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe une jauge j_V, sur l'espace engendré par W, et une fonction $\delta_1(\varepsilon_1)$, > 0 si $\varepsilon_1 > 0$, telles que

a) $(1-\varepsilon)\, j_W(x) \leq j_V(x) \leq j_W(x)$

b) $j_W(x) = j_W(y) = 1$, $\|x-y\| \geq \varepsilon_1$ impliquent

$$j_V(x+y) \leq j_V(x) + j_V(y) - \delta_1(\varepsilon_1).$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; soit $j_{5\varepsilon}$ la jauge définie au lemme 3. On pose

$$j_V(x) = \frac{1}{2}\, j_\varepsilon(x) + \frac{1}{4}\, j_{\varepsilon/2}(x) + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}\, j_{\varepsilon/2^k} + \dots$$

On a bien $(1-\varepsilon)\, j_W(x) \leq j_V(x) \leq j_W(x)$.

Supposons $j_W(x) = j_W(y) = 1$, et $\|x-y\| \geq \varepsilon_1$.

Alors $\varepsilon_1 \geq \varepsilon/2^k$ pour un certain k, et l'on a :

$$\begin{aligned}
j_V(x+y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}}\, j_{\varepsilon/2^i}(x+y) \\
&= \sum_{i\neq k} \frac{1}{2^{i+1}}\, j_{\varepsilon/2^i}(x+y) + \frac{1}{2^{k+1}}\, j_{\varepsilon/2^k}(x+y) \\
&\leq \sum_{i\neq k} \frac{1}{2^{i+1}}\, j_{\varepsilon/2^i}(x) + \frac{1}{2^{i+1}}\, j_{\varepsilon/2^i}(y) + \\
&\quad + \frac{1}{2^{k+1}}\left(j_{\varepsilon/2^k}(x) + j_{\varepsilon/2^k}(y) - \frac{\varepsilon}{2^k}\,\delta'_1\right)
\end{aligned}$$

où δ_1' est le δ_1 du lemme 3 pour $\varepsilon/_{2}k$.

On en déduit

$$j_V(x+y) \leq j_V(x) + j_V(y) - \frac{1}{2^{k+1}} \frac{\varepsilon}{2^k} \delta_1' .$$

Ceci achève la démonstration de la proposition.

Nous allons maintenant donner quelques définitions permettant de traduire les résultats précédents en termes d'opérateurs.

Définition : Soient E et F deux espaces de Banach, T un opérateur linéaire continu de E dans F. Nous dirons que T est convexifiant si $W = T(B_E)$ ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F.

Il est clair que cette définition est invariante par isomorphisme de E dans F. Si E = F et T = Id, elle signifie que l'espace est uniformément convexifiable.
Il est également clair que le noyau de T n'y joue aucun rôle ; on peut considérer $\tilde{T} : E/\mathrm{Ker}\,T \to F$, et $\tilde{T}$ est convexifiant si et seulement si T l'est.

Soient $T : E \to F$ et $T' : E' \to F'$. Nous dirons que T' est finiment représentable dans T si, posant $W = T(B_E)$, $W' = T'(B_{E'})$, le couple (W',F') est finiment représentable dans le couple (W,F).
Par conséquent T' est finiment représentable dans T si et seulement si $\tilde{T}'$ l'est dans $\tilde{T}$.

On va donner une condition équivalente à cette définition.

Lemme : Supposons que W soit total dans F et que W' soit total dans F'. Posons $\tilde{E} = E/\mathrm{Ker}\,T$, $\tilde{E}' = E'/\mathrm{Ker}\,T'$.
T' est finiment représentable dans T si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous espace de dimension finie $\tilde{E}_o'$ de $\tilde{E}'$, on peut trouver un opérateur $\mathcal{U}_{o,\varepsilon}$ de $\tilde{E}_o'$ dans un sous espace de dimension finie $\tilde{E}_o$ de $\tilde{E}$ tel que, pour tout x de $\tilde{E}_o'$, on ait :

$$\Big| \|\tilde{T}'x\| - \|\tilde{T}\,\mathcal{U}_{o,\varepsilon}x\| \Big| \leq \varepsilon \|x\| \qquad (1) .$$

<u>Démonstration</u> : a) Supposons la condition (1) réalisée. Considérons un sous-espace de dimension finie F'_o de F'. On peut l'approcher à ε près par un sous-espace de dimension finie de l'espace vectoriel engendré par W, noté encore F'_o pour simplifier. On définit un opérateur de F'_o dans un sous-espace de même dimension de F en posant : $A = \tilde{T}\, \mathcal{U}\, \tilde{T}^{-1}$.

Il est clair que $A(W'_o) \subset (1+\varepsilon)W$. Par ailleurs, pour tout $y \in F'_o \cap W'$, on a, d'après la condition (1) :

$$\Big| \|y\| - \|Ay\| \Big| \leq \varepsilon \ .$$

b) On suppose T' finiment représentable dans T. Soit $\tilde{E}'_o$ un sous-espace de dimension finie de $\tilde{E}'$. Il est l'antécédent d'un sous-espace de dimension finie F'_o de F'. Par hypothèse, il existe un opérateur $A_{o\varepsilon}$ de F'_o sur un sous-espace F_o de F avec $\|A_{o\varepsilon}\|\ \|A^{-1}_{o\varepsilon}\| \leq 1+\varepsilon$; on pose

$$\mathcal{U}_{o,\varepsilon} = \tilde{T}^{-1} A_{o\varepsilon} \tilde{T}'$$

et on a

$$\Big| \|\tilde{T}'x\| - \|\tilde{T}\, \mathcal{U}_x\| \Big| = \Big| \|\tilde{T}'x\| - \|A_{o\varepsilon}\tilde{T}'\| \Big| \leq \varepsilon \|x\|$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

<u>Proposition 3</u> : Soit T un opérateur de E dans F.
T est convexifiant si et seulement si l'espace $\tilde{E}$ peut être muni d'une norme équivalente, notée $\| \ \|_{\tilde{E}}$, vérifiant :

$$\|x\|^{\mathcal{U}}_{\tilde{E}} \leq 1, \quad \|y\|^{\mathcal{U}}_{\tilde{E}} \leq 1, \quad \|Tx - Ty\| \geq \varepsilon \quad \text{impliquent}$$

$$\|x+y\|^{\mathcal{U}}_{\tilde{E}} \leq \|x\|^{\mathcal{U}}_{\tilde{E}} + \|y\|^{\mathcal{U}}_{\tilde{E}} - \delta(\varepsilon) \ .$$

<u>Démonstration</u> : a) Supposons la condition réalisée. Soit V l'image par T de la boule unité de $\tilde{E}$ muni de $\| \ \|^{\mathcal{U}}_{\tilde{E}}$. V est équivalent à W, et on a

$$x', y' \in V \ , \quad \|x' - y'\| \geq \varepsilon \Rightarrow j_V(x' + y') \leq j_V(x') + j_V(y')$$

et donc W ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F d'après la proposition 2, et T est convexifiant.

b) Supposons T convexifiant, d'après la proposition 2, il existe V équivalent à W tel que si $x',y' \in V$,

$$\|x' - y'\| \geq \varepsilon \quad , \quad j_V(x' + y') \leq j_V(x') + j_V(y') - \delta .$$

Soit D l'image réciproque de V par $\tilde{T}$; la jauge de D est la norme $\| \ \|_{\tilde{E}}^{\mathcal{U}}$ cherchée.

<u>Proposition 4</u> : T est convexifiant si et seulement tout opérateur T' finiment représentable dans T se factorise par une espace réflexif.

<u>Démonstration</u> : a) Supposons T convexifiant ; soit T' finiment représentable dans T. Alors (W',F') est finiment représentable dans (W,F). D'après la proposition 1, W' est relativement faiblement compact dans F'. Donc T' est faiblement compact, et donc se factorise par un espace réflexif d'après le théorème de Davis-Figiel-Johnson-Pelczynski.

b) Supposons que tout opérateur T' finiment représentable dans T se factorise par un espace réflexif. Alors, pour tout couple (W',F') finiment représentable dans (W,F), W' est faiblement compact dans F'. D'après la proposition 1, ceci implique que W ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F, et donc que T est convexifiant.

Mais ceci n'implique pas que T se factorise par un espace super-réflexif. En fait, on a :

<u>Proposition 5</u> : La condition "T convexifiant" est nécessaire, mais non suffisante, pour que T se factorise par un espace super-réflexif.

<u>Démonstration</u> : a) Si T se factorise par un espace Y super-réflexif, soient $u : E \to Y$, $v : Y \to F$ tels que $T = v \circ u$. Soient $W = T(B_E)$, $\mathcal{H} = u(B_E)$. La boule unité de Y ne possède pas la propriété d'arbre fini ; il en est donc de même de $\mathcal{H}$, qui y est inclus à une homothétie près. Mais si W possédait la propriété d'arbre fini dans F, on pourrait trouver, pour tout n,

2^n points $(x_1,\ldots,x_{2^n})$ formant une (n,ε)-branche ; on vérifie aisément que leurs antécédents $y_1,\ldots,y_{2^n}$ dans $\mathcal{V}$ formeraient alors une $(n,\frac{\varepsilon}{\|v\|})$-branche dans Y.

b) La condition n'est pas suffisante. Considérons l'espace d'Orlicz $L^{\varphi}([0,1],dt)$, avec $\varphi(t) = t(1+\mathrm{Log}(1+t))$. Puisque $\varphi(t) \geq t$, on a une injection canonique i de l'espace d'Orlicz L^{φ} dans L^1. L'image de la boule unité de L^{φ} par i est l'ensemble des fonctions de L^1 qui vérifient

$$\int_0^1 |f(t)| \; (1+\mathrm{Log}(1+f(t)|))dt \leq 1 \; .$$

Notons **W** ce sous-convexe de la boule unité de L^1.

<u>Lemme</u> : **W** ne possède pas la propriété d'arbre fini dans L^1.

<u>Démonstration</u> : Supposons la conclusion fausse ; soient $f_1,\ldots,f_{2^n}$ les points d'une (n,ε)-branche dans **W**.

Il résulte de la définition de **W** et des propriétés de l'espace d'Orlicz L^{φ} que l'on peut trouver un nombre $M > 0$ tel que $\forall\, f \in \mathbf{W}$, on ait

$$\int_{|f|>M} |f(t)|dt \quad \leq \quad \varepsilon/4 \; .$$

Posons $\tilde{f} = f$ si $|f| < M$, $\tilde{f} = 0$ sinon.
On a donc

$$\|f - \tilde{f}\|_{L^1} \leq \varepsilon/4 \; .$$

Puisque $f_1,\ldots,f_{2^n}$ vérifient les conditions d'arbre, on a

$$\|f_{2i} - f_{2i-1}\| \geq \varepsilon \quad , \quad i = 1,\ldots,2^{n-1}$$

et donc

$$\|\tilde{f}_{2i} - \tilde{f}_{2i-1}\| \geq \varepsilon/2$$

et de même

$$\left\|\frac{\tilde f_{2i}+\tilde f_{2i-1}}{2}-\frac{\tilde f_{2i+2}+\tilde f_{2i+1}}{2}\right\| = \frac{1}{2}\ \|(f_{2i}+f_{2i-1})-(f_{2i+2}+f_{2i+1})-$$

$$-[(f_{2i}-\tilde f_{2i})+(f_{2i-1}-\tilde f_{2i-1})-(f_{2i+2}-\tilde f_{2i+2})-(f_{2i+1}-\tilde f_{2i+1})]\|$$

$$\geq \frac{1}{2}\ \|(f_{2i}+f_{2i-1})-(f_{2i+2}+f_{2i+1})\| - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\geq \varepsilon/2\ .$$

Les fonctions $\tilde f_i$, $i = 1,\ldots,2^n$ forment donc une $(n,\frac{\varepsilon}{2})$-branche dans W. Mais on a : $\|\tilde f_i\|_{L^2} \leq \sqrt{M}$, et, puisque les conditions définissant une branche sont satisfaites dans L^1, elles le sont a fortiori dans L^2. En effet, par exemple :

$$\|\tilde f_{2i}-\tilde f_{2i-1}\|_{L^2} \geq \|\tilde f_{2i}-\tilde f_{2i-1}\|_{L^1} \geq \varepsilon/2\ .$$

Les fonctions $\frac{1}{\sqrt{M}}\tilde f_i$, $i = 1,\ldots,2^n$, forment donc une $(n,\frac{\varepsilon}{2\sqrt{M}})$-branche dans la boule unité de L^2 ; il est impossible que ceci se produise pour tout n, car L^2 est uniformément convexe.

Ceci achève la démonstration du lemme.

Supposons maintenant que l'injection canonique $i : L^{\varphi} \to L^1$ se factorise par un espace Y super-réflexif. Celui-ci ne peut contenir l^1_n uniformément, puisque les points de la base canonique de l^1_n forment une $(n,2)$-branche pour tout n, et donc il est de type p-Rademacher pour un $p > 1$ (voir [7]). Par conséquent, d'après [6], il existe une fonction ψ telle que $\left(\int \left|\frac{i(x)}{\psi}\right|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \|x\|_{L^{\varphi}}$ pour tout $x \in L^{\varphi}$. Il existe un nombre M tel que l'ensemble $A = \{t, |\psi(t)| < M\}$ soit de mesure non nulle ; on a donc :

$$\frac{1}{M}\left(\int_A |i(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \|x\|_{L^{\varphi}}$$

et ceci prouverait que toutes les fonctions de L^{φ} ont des moments d'ordre p sur un même ensemble A de mesure non nulle, ce qui est impossible pour la fonction φ choisie.

*
* *
*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Exposé XIII du Séminaire Maurey-Schwartz 1973-1974.

[2] Exposé XIV du Séminaire Maurey-Schwartz 1973-1974.

[3] W.J. DAVIS, T. FIGIEL, W.B. JOHNSON, A. PELCZYNSKI : Factoring weakly compact operators. A paraître.

[4] P. ENFLO : Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convexe norm. Israël J. of Maths, 13-(1972)- p. 281 - 288.

[5] R.C. JAMES : Weak compactness and reflexivity. Israël J. of Maths, 80-(1964) - p.542 - 550.

[6] B. MAUREY : Théorèmes de factorisation pour des opérateurs à valeurs dans les espaces L^p . Astérisque n°11.

[7] Exposé VII du Séminaire Maurey-Schwartz 1973-1974.

****