B. Beauzamy

Espaces de Banach uniformément convexifiables

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 13, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A15_0>

ECOLE POLYTECHNIQUES
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

ESPACES DE BANACH UNIFORMEMENT CONVEXIFIABLES

par B. BEAUZAMY

Exposé N° XIII

6 Février 1974

Dans les exposés qui suivent, nous allons examiner les liens entre les propriétés géométriques de la boule unité d'un espace de Banach et certaines propriétés topologiques de l'espace.

La notion étudiée principalement sera celle d'uniforme convexité.

Les résultats énoncés sont dus à P. Enflo [1] et R. C. James [2].

On dit qu'un espace de Banach E muni d'une norme $\|\ \|$ est uniformément convexe si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout couple (x,y) de points de la sphère unité, $\|\frac{x+y}{2}\| \geq 1$ implique $\|x-y\| \leq \varepsilon$.

Si cette condition est réalisée, la boule unité ne possède pas de "faces": on ne peut pas trouver de couple de points distincts (x,y) de la sphère unité tel que le segment qui les joint soit tout entier dans la sphère.

Mais l'hypothèse signifie davantage en fait : intuitivement, que toutes les sections de la boule unité ont une courbure minimale strictement positive.

Bien entendu, cette notion n'est pas invariante par isomorphisme : en dimension finie, certaines normes sont uniformément convexes, d'autres non, mais toutes sont équivalentes.

On dira qu'un espace de Banach est uniformément convexifiable s'il peut être muni d'une seconde norme, équivalente à la première, et uniformément convexe.

Cette seconde notion est de toute évidence invariante par isomorphisme. La classe ainsi introduite contient tous les espaces de Banach de dimension finie, mais ne contient pas tous les espaces de Banach : ainsi l^1, qui n'est pas uniformément convexe, n'est pas non plus uniformément convexifiable, comme on le verra par la suite.

Le problème se pose donc de savoir reconnaître si, E et $\|\ \|$ étant donnés, il existe une seconde norme, uniformément convexe et équivalent à la première.

Le théorème qui suit répond à cette question.

<u>Définition</u> (James [2], Enflo [1]) : On dira qu'un couple de points (x_1, x_2) d'un espace de Banach E forme $(1,\varepsilon)$ branche si $\|x_1 - x_2\| \geq \varepsilon$.

Supposons définie une $(n-1,\varepsilon)$ branche ; on dira que le 2^n-uple $(x_1, \ldots, x_{2^n})$ forme une (n,ε) branche si

$$\|x_{2j-1} - x_{2j}\| \geq \varepsilon \qquad j = 1, \ldots, 2^{n-1}$$

et si le 2^{n-1}-uple $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_3 + x_4}{2}, \ldots, \frac{x_{2^n-1} + x_{2^n}}{2}\right)$ forme une $(n-1,\varepsilon)$ branche.

Si $(x_1, \ldots, x_{2^n})$ forment une (n,ε) branche, la $(n-1,\varepsilon)$ branche $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \ldots, \frac{x_{2^n-1} + x_{2^n}}{2}\right)$ sera appelée première simplification de la (n,ε) branche, la $(n-2,\varepsilon)$ branche $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \ldots, \frac{x_{2^n-3} + x_{2^n-2} + x_{2^n-1} + x_{2^n}}{4}\right)$ seconde simplification, etc...

On dira que l'espace de Banach possède la propriété d'arbre fini s'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on puisse trouver une (n,ε) branche dans la boule unité.

Bien évidemment, si E possède la propriété d'arbre fini pour un certain $\varepsilon > 0$, il la possède aussi pour n'importe quel $\varepsilon' < \varepsilon$, puisque une (n,ε) branche est a fortiori une (n,ε') branche.

<u>Théorème</u> : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace de Banach soit uniformément convexifiable est qu'il ne possède pas la propriété d'arbre fini.

a) <u>Condition nécessaire</u> (James [2]).

La démonstration de cette partie est simple ; donnons-en d'abord l'idée intuitive.

Appelons diamètre d'une branche le diamètre de la plus petite boule centrée en 0 qui la contient. Si lorsqu'on passe d'une (n,ε) branche à une $(n+1,\varepsilon)$ branche le diamètre est multiplié par $1 + \eta$, η indépendant de n, on sortira de la boule unité au bout d'un certain nombre d'opérations. On va écrire que le diamètre ne doit pas diminuer strictement si l'on passe de la $(n+1,\varepsilon)$ à la (n,ε) branche obtenue en simplifiant la précédente.

On suppose que, pour tout n, il existe une (n,ε) branche dans la boule unité de E. On suppose en outre que E peut-être muni d'une norme uniformément convexe, notée $\|\ \|_{\mathcal{U}}$, équivalente à la précédente, notée $\|\ \|$.

Il existe donc deux constantes A et B telles que, pour tout x dans E, on ait :

$$A\,\|x\| \leq \|x\|_{\mathcal{U}} \leq B\,\|x\| .$$

Puisque $\|\ \|_{\mathcal{U}}$ est uniformément convexe, on peut trouver un nombre δ, $0 < \delta < 1$, tel que $\forall\, x, y \in E$, les conditions $\|x\|_{\mathcal{U}} \leq 1$, $\|y\|_{\mathcal{U}} \leq 1$, $\|x-y\|_{\mathcal{U}} \geq \frac{A}{B}\,\varepsilon$ impliquent $\|\frac{x+y}{2}\|_{\mathcal{U}} \leq 1-\delta$.

Donc $\|x\|_{\mathcal{U}} \leq B$, $\|y\|_{\mathcal{U}} \leq B$, $\|x-y\|_{\mathcal{U}} \geq A\varepsilon$ impliquent $\|\frac{x+y}{2}\|_{\mathcal{U}} \leq (1-\delta)B$

Choisissons n assez grand pour que $B(1-\delta)^{n-1} < \frac{A\varepsilon}{2}$.

Soient $(x_1,\dots,x_{2^n})$ les points de la (n,ε) branche qui existe par hypothèse dans la boule unité. On a :

$$\|x_i\| \leq 1 \quad , \quad i = 1,\dots,2^n$$

et donc $\|x_i\|_{\mathcal{U}} \leq B$.

D'autre part, $\|x_{2j-1} - x_{2j}\| \geq \varepsilon \qquad j = 1,\dots,2^{n-1}$

et donc $\|x_{2j-1} - x_{2j}\|_{\mathcal{U}} \geq A$.

D'après ce qui précède, on a donc :

$$\left\| \frac{x_{2j-1} + x_{2j}}{2} \right\|_{\mathcal{U}} \leq B(1-\delta)$$

(le diamètre de la $(n-1,\varepsilon)$ branche est maintenant inférieur à $2B(1-\delta)$).

Soient y_1, y_2 les points obtenus en simplifiant (n-1) fois la (n,ε) branche de départ, c'est-à-dire les points

$$y_1 = \frac{x_1+\ldots+x_{2^{n-1}}}{2^{n-1}} \quad , \quad y_2 = \frac{x_{2^{n-1}+1}+\ldots+x_{2^n}}{2^{n-1}} .$$

Les points y_1 et y_2 forment une $(1,\varepsilon)$ branche par construction, et vérifient donc $\|y_1 - y_2\|_{\mathcal{U}} \geq A\varepsilon$, mais

$$\|y_1\|_{\mathcal{U}} \leq B(1-\delta)^{n-1}$$

$$\|y_2\|_{\mathcal{U}} \leq B(1-\delta)^{n-1}$$

ce qui est contradictoire.

b) <u>Condition suffisante</u> (Enflo [1]).

On suppose maintenant que E ne possède pas la propriété d'arbre fini, et on va construire explicitement une norme uniformément convexe équivalente à la norme de E.

Si E ne possède pas le propriété d'arbre fini, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un entier n tel qu'aucune (n,ε) branche ne soit incluse dans la boule unité. Si $\eta > 0$ est fixé, on peut même affirmer qu'il existe un entier n tel qu'aucune (n,ε) branche ne soit incluse dans $(1+\eta)B$.

Si en effet ceci se produisait, par homothétie, on pourrait trouver une $(n,\frac{\varepsilon}{1+\eta})$ branche dans la boule unité.

<u>Définition</u> : Soit z un point de E. On dira que le couple (x_1,x_2) forme une $(1,\varepsilon)$ partition de z si $x_1 + x_2 = z$,

$$\|x_1\| = \|x_2\|,$$

$$\left\|\frac{x_1}{\|x_1\|} - \frac{x_2}{\|x_2\|}\right\| \geq \varepsilon .$$

Supposons définie une $(n-1,\varepsilon)$ partition de z ; on dira que le 2^n-uple $(x_1,\ldots,x_{2^n})$ forme une (n,ε) partition de z si $\|x_{2j-1}\| = \|x_{2j}\|$, $j = 1,\ldots,2^{n-1}$,

$$\left\|\frac{x_{2j-1}}{\|x_{2j-1}\|} - \frac{x_{2j}}{\|x_{2j}\|}\right\| \geq \varepsilon \qquad j = 1,\ldots,2^{n-1}$$

et si le 2^{n-1}-uple $(x_1 + x_2, x_3 + x_4, \dots, x_{2^n-1} + x_{2^n})$ forme une $(n-1,\varepsilon)$ partition de z.

Ces conditions impliquent évidemment que $z = x_1 + \dots + x_{2^n}$.
Si $(x_1, \dots, x_{2^n})$ forme une (n,ε) partition de z, la (k,ε) partition $(x_1 + x_2 + \dots + x_{2^{n-k}}, x_{2^{n-k}+1} + \dots + x_{2^{n-k+1}}, \dots, x_{2^n - 2^{n-k}+1} + \dots + x_{2^n})$ s'appelle k^e division de la (n,ε) partition $(x_1, \dots, x_{2^n})$ de z.
On dira également que (z) est une $(0,\varepsilon)$ partition de z.

Le lemme qui suit montre comment la propriété d'arbre se traduit sur les partitions d'un point.

<u>Lemme 1</u> : Si un espace de Banach ne possède pas la propriété d'arbre fini, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n et un nombre $\delta > 0$ tels que, pour tout z et pour toute (n,ε) partition $(x_1, \dots, x_{2^n})$ de z, on ait

$$\sum_{j=1}^{2^n} \|x_j\| \geq (1+\delta) \|z\|.$$

<u>Démonstration</u> : Quitte à faire une homothétie, on peut évidemment supposer $\|z\| = 1$. Soient donc $\varepsilon > 0$ et $(x_1, \dots, x_{2^m})$ une (m,ε) partition de z.

Considérons-en la première division :

$$(x_1 + \dots + x_{2^{m-1}}, x_{2^{m-1}+1} + \dots + x_{2^m}) \quad .$$

On sait que $\|x_1 + \dots + x_{2^{m-1}}\| = \|x_{2^{m-1}+1} + \dots + x_{2^m}\|$ et par conséquent chacun de ces nombres est supérieur ou égal à $1/2$; en effet, $\|z\| = 1$ et $z = x_1 + \dots + x_{2^m}$.

En outre, puisque $(x_1+\dots+x_{2^{m-1}},\ x_{2^{m-1}+1}+\dots+x_{2^m})$ forme une $(1,\varepsilon)$ partition de z, on a :

$$\left\| \frac{x_1+\dots+x_{2^{m-1}}}{\|x_1+\dots+x_{2^{m-1}}\|} - \frac{x_{2^{m-1}+1}+\dots+x_{2^m}}{\|x_{2^{m-1}+1}+\dots+x_{2^m}\|} \right\| \geq \varepsilon$$

d'où :

$$2\ \|(x_1+\dots+x_{2^{m-1}}) - (x_{2^{m-1}+1}+\dots+x_{2^m})\| \geq \varepsilon$$

et par conséquent, les deux vecteurs $2(x_1+\dots+x_{2^{m-1}})$ et $2(x_{2^{m-1}+1}+\dots+x_{2^m})$ forment une $(1,\varepsilon)$ branche, et chacun des deux a une norme au moins égale à 1.

Nous allons maintenant démontrer par récurrence que si l'on prend la k^e division de la (m,ε) partition et que l'on en multiplie les 2^k vecteurs par 2^k, on obtient une (k,ε) branche dont tous les vecteurs ont une norme au moins égale à 1.

Supposons donc ce résultat obtenu pour k-1, montrons le pour k. Considérons la k^e division de la (m,ε) partition $(x_1,\dots,x_{2^m})$; elle est formée des vecteurs :

$$(x_1+\dots+x_{2^{m-k}},\ x_{2^{m-k}+1}+\dots+x_{2^{m-k+1}},\dots,x_{2^m-2^{m-k}+1}+\dots+x_{2^m})\ .$$

Montrons d'abord que chacun d'eux a une norme au moins égale à $\frac{1}{2^k}$. Comme précédemment, on a

$$\|x_1+\dots+x_{2^{m-k}}\| = \|x_{2^{m-k}+1}+\dots+x_{2^{m-k+1}}\|$$

et la somme $x_1+\dots+x_{2^{m-k+1}}$ a une norme au moins égale à $\frac{1}{2^{k-1}}$ d'après l'hypothèse de récurrence. Donc, chacun des deux vecteurs $x_1+\dots+x_{2^{m-k}}$, $x_{2^{m-k+1}}+\dots+x_{2^{m-k+1}}$ a une norme au moins égale à $\frac{1}{2^k}$; il en est de même pour les autres.

On a donc :

$$2^k \| (x_1 + \ldots + x_{2^{m-k}}) - (x_{2^{m-k}+1} + \ldots - x_{2^{m-k+1}}) \| \geq \varepsilon$$

et de même pour les autres. Par ailleurs, les vecteurs

$$\left(2^k \frac{x_1 + \ldots + x_{2^{m-k}} + x_{2^{m-k}+1} + \ldots + x_{2^{m-k+1}}}{2}, \ldots, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots\ldots 2^k . \frac{x_{2^m - 2^{m-k+1}+1} + \ldots + x_{2^m - 2^{m-k}} + x_{2^m - 2^{m-k}+1} + \ldots + x_{2^m}}{2} \right)$$

forment, d'après l'hypothèse de récurrence, une $(k-1,\varepsilon)$ branche.

On a donc montré qu'après multiplication par 2^k, les 2^k vecteurs de la k^2 subdivision, forment une (k,ε) branche, et qu'alors leur norme est au moins égale à 1.

Il en résulte que si l'on prend la m^e division de la (m,ε) partition et que l'on multiplie ses vecteurs par 2^m, on obtient une (m,ε) branche dont les vecteurs sont de norme au moins égale à 1. Mais on sait qu'il existe un nombre n et un nombre $\eta > 0$ tel qu'aucune (n,ε) branche ne soit incluse dans $(1 + \eta) B$

Par conséquent, chacune des (n,ε) branches formées comme précédemment à partir d'une (n,ε) partition d'un point possède au moins un vecteur de norme supérieure ou égale à $1 + \eta$. Posant $\eta = 2^n \delta$, on en déduit

$$2^n \sum_{i=1}^{2^n} \|x_i\| \geq 2^n + 2^n . \delta,$$

et donc
$$\sum_1^{2^n} \|x_i\| \geq 1 + \delta = (1 + \delta) \|z\|,$$

ce qui achève la démonstration du lemme 1.

<u>Définition</u> : On dira qu'une fonction $x \to |x|$ définie sur E, à valeurs réelles, est un écart dans E si

a) $|x| \geq 0 \quad \forall x$, et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $|\alpha x| = |\alpha|\ |x| \quad \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

On va pouvoir, au moyen des partitions d'un point, définir un écart possédant des propriétés proches de celles cherchées :

<u>Lemme 2</u> : Soit $\mathcal{E}$ un espace de Banach ne possédant pas la propriété d'arbre fini. Soit $\varepsilon > 0$, et soient $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, donnés par le lemme 1. Supposons $0 < \delta < \varepsilon < 1/8$. Alors il existe un écart dans E et un nombre $\delta_1 > 0$ tels que

1) $(1-\delta)\ \|x\| \leq |x| \leq (1-\frac{\delta}{3})\ \|x\|$

2) si $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x-y\| \geq \varepsilon$,
alors
$$|x+y| < |x| + |y| - \delta_1 .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $z \in E$, pour tout m avec $0 \leq m \leq n$, et toute (m,ε) partition de z $(u_1,\dots,u_{2^m})$, on considère la quantité

$$\frac{\sum_{1}^{2^m} \|u_j\|}{1+\frac{\delta}{2}(1+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4^m})}$$

et on note $|z|$ l'infimum de ces quantités lorsque z est fixé.

Les deux propriétés définissant un écart sont vérifiées de toute évidence. Pour montrer que $|z| \leq (1-\frac{\delta}{3})\|z\|$, on considère la $(0,\varepsilon)$ partition de z constituée par (z) ;

$$\frac{\|z\|}{1-\frac{\delta}{2}} \leq (1-\frac{\delta}{3})\ \|z\|.$$

Montrons que $(1-\delta)\ \|z\| \leq |z|$, c'est-à-dire que pour tout $m \leq n$ et toute (m,ε) partition de z $(u_1,\dots,u_{2^m})$, on a :

$$(1-\delta)\ \|z\| \leq \frac{\sum_1^{2^m} \|u_i\|}{1+\frac{\delta}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4^m}\right)}.$$

On a $z = \sum_1^{2^m} u_i$, il suffit donc de vérifier que

$$(1-\delta) \sum_1^{2^m} \|u_i\| \leq \frac{\sum_1^{2^m} \|u_i\|}{1+\frac{\delta}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4^m}\right)}$$

ou $(1-\delta)\ \left(1+\frac{\delta}{2}\left(1+\dots+\frac{1}{4^m}\right)\right) \leq 1$, ce que l'on vérifie aisément.

Montrons maintenant le 2).
Soient x et y, avec $\|x\| = \|y\| = 1$, et $\|x-y\| \geq \varepsilon$.

Ces conditions signifient précisément que (x,y) forme une $(1,\varepsilon)$ partition de $x+y$. Par conséquent si $(u_1,\dots,u_{2^k})$ $(v_1,\dots,v_{2^k})$ sont des (k,ε) partitions de x et y respectivement, le 2^{k+1}-uple $(u_1,\dots,u_{2^k}, v_1,\dots,v_{2^k})$ sera une $(k+1,\varepsilon)$ partition de $x+y$. Ceci sera utilisé par la suite. Soit γ avec $0 < \gamma < \frac{\delta}{4^{2n}}$. D'après la définition de $|x|$ et $|y|$, il existe une (k,ε) partition $(u_1,\dots,u_{2^k})$ de x et une (l,ε) partition $(w_1,\dots,w_{2^l})$ de y telles que

$$|x| > \frac{\sum_1^{2^k} \|u_j\|}{1+\frac{\delta}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4^k}\right)} - \gamma \quad \text{et} \quad |y| > \frac{\sum_{j=1}^{2^l} \|w_j\|}{1+\frac{\delta}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4^l}\right)} - \gamma .$$

Mais, d'après le lemme 1, si $m = n$ et si $(x_1,\dots,x_{2^n})$ est une (n,ε) partition de z, on a $\sum_1^{2^n} \|x_j\| \geq (1+\delta)\,\|z\|$, et donc

$$\frac{\sum_1^{2^n} \|x_j\|}{1+\frac{\delta}{2}\,(1+\dots+\frac{1}{4^m})} \geq \frac{(1+\delta)\,\|z\|}{1+\frac{\delta}{2}\,(1+\dots+\frac{1}{4^m})} \geq \frac{\|z\|}{1+\frac{\delta}{2}}$$

qui est la valeur obtenue pour $m = 0$. Il en rézulte que dans la définition de $|z|$, l'infimum ne peut être atteint pour $m = n$; on peut donc supposer, dans le paragraphe précédent, $0 \leq l$, $k \leq n-1$. Quitte à échanger x et y, on peut aussi supposer $k \leq l$.

Notons $(w_{k,1}, w_{k,2},\dots, w_{k,2^k})$ la k^e division de la (l,ε) partition de y. Pour alléger les notations, nous poserons

$$A_k = 1 + \frac{\delta}{2}\,(1+\dots+\frac{1}{4^k}).$$

Remarquons d'abord que $\sum_1^{2^k} \|u_j\| \geq \|x\| = 1$, et de même $\sum_1^{2^k} \|w_{kj}\| \geq 1$. En outre, on a :

$$\frac{\sum_{j=1}^{2^k} \|u_j\|}{A_k} \leq |x| + \gamma \leq 1 - \frac{\delta}{3} + \gamma$$

et donc $\sum_{j=1}^{2^k} \|u_j\| \leq (1-\frac{\delta}{3}+\gamma)\,A_k \leq 1+\delta$ et de même $\sum_{j=1}^{2^k} \|w_{kj}\| \leq 1+\delta$.

On a vu que, mettant bout à bout la (k,ε) partition de x $(u_1,\dots,u_{2^k})$ et la (k,ε) partition de y $(w_{k,1},\dots,w_{k,2^k})$, on obtenait une $(k+1,\varepsilon)$ partition de $x+y$:

$$(u_1,\dots,u_{2^k},\ w_{k,1},\dots,w_{k,2^k}) .$$

Mais, d'après le lemme 1, $k+1 \leq n$, comme on l'a déjà remarqué, et par conséquent, cette $(k+1,\varepsilon)$ partition de $x+y$ peut être utilisée pour le calcul de $|x+y|$; on a donc par définition

$$|x+y| \leq \frac{\sum_{j=1}^{2^k} \|u_j\| + \sum_{j=1}^{2^k} \|w_{kj}\|}{A_{k+1}}$$

or, on a

$$|y| > \frac{\sum_{1}^{2^l} \|w_j\|}{A_l} - \gamma \geq \frac{\sum_{1}^{2^k} \|w_{kj}\|}{A_l} - \gamma$$

(d'après l'inégalité triangulaire)

$$\geq \frac{\sum_{1}^{2^k} \|w_{kj}\|}{1+\frac{\delta}{2}\left(1+\ldots+\frac{1}{4^{k+1}}+\frac{1}{3.4^{k+1}}\right)} - \gamma$$

$$= \frac{\Sigma \|w_{kj}\|}{A_{k+1}+\frac{\delta}{6.4^{k+1}}} - \gamma$$

en utilisant le reste de la série $\frac{1}{4^{k+2}} + \ldots\ldots$

On peut donc écrire

$$|x| + |y| - |x+y| > \sum_{1}^{2^k} \|u_j\| \left(\frac{1}{A_k} - \frac{1}{A_{k+1}}\right)$$

$$> \sum_{j=1}^{2^k} \|w_{kj}\| \left(\frac{1}{A_{k+1}} - \frac{1}{A_{k+1}+\frac{\delta}{6.4^{k+1}}}\right) - 2\gamma$$

d'où

$$|x| + |y| - |x+y| \geq \frac{\frac{\delta}{2}\frac{1}{4^{k+1}}}{A_k \cdot A_{k+1}} - \frac{(1+\delta)\frac{1}{6.4^{k+1}}}{A_{k+1}\left(A_{k+1}+\frac{\delta}{6.4^{k+1}}\right)} - 2\gamma \ .$$

On pose $S_k = 1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4^k} = \frac{1-\frac{1}{4^{k+1}}}{3/4} < 4/3$.

On a :

$$|x| + |y| - |x+y| \geq \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{4^{k+1}} \quad \frac{1}{1+\frac{\delta \cdot S_{k+1}}{2}} \left(\frac{1}{1+\frac{\delta}{2}S_k} - \frac{1+\delta}{3}\,\frac{1}{1+\frac{\delta}{2}S_k + \frac{\delta}{6.4^{k+1}}}\right) - 2\gamma$$

$$\geq \frac{\delta}{2.4^{k+1}}\ \frac{1}{\left(\frac{1+\delta S_{k+1}}{2}\right)} \left(\frac{3+\frac{3\delta}{2}S_k + \frac{\delta}{2.4^k} - 1 - \frac{\delta}{2}S_k - \delta - \frac{\delta^2}{2} S_k}{(1+\frac{\delta}{2}S_k)\ (1+\frac{\delta}{2}S_k + \frac{\delta}{6.4^{k+1}})}\right) - 2\gamma$$

$$\geq \frac{\delta}{2.4^{k+1}} \cdot \frac{2+\delta S_k - \delta - \delta^2/2.\ S_k}{(1+\frac{\delta}{2}S_{k+1})(1+\frac{\delta}{2}S_k)\ (1+\frac{\delta}{2}S_k + \frac{\delta}{6}\ \frac{1}{4^{k+1}})} - 2\gamma\ .$$

On a supposé $\delta < 1/8$. On sait que $S_k \leq 4/3$. On en déduit

$$|x| + |y| - |x+y| \geq \frac{\delta}{2.4^{k+1}}\ \frac{2-\frac{1}{8}-\frac{1}{2.64}\times\frac{4}{3}}{(1+\frac{1}{12})^2\ (1+\frac{1}{12}+\frac{1}{48})} - 2\gamma$$

$$\geq \frac{\delta}{2.4^{k+1}} - 2\gamma\ .$$

Or $\gamma < \frac{\delta}{4^{2n}}$, d'où

$$|x| + |y| - |x+y| \geq \delta\left(\frac{1}{2.4^{k+1}} - \frac{2}{4^{2n}}\right)$$

$$\geq \frac{\delta}{2.4^{k+1}}\ \left(1-\frac{4}{4^n}\right) \text{ puisque } n \geq k+1$$

$$\geq \frac{\delta}{2.4^{k+3}}\ ,$$

et donc

$$|x| + |y| - |x+y| \geq \frac{\delta}{2.4^{n+2}}$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

On va maintenant remplacer l'écart par une norme possédant les mêmes propriétés.

Lemme 3 : Soit E un espace de Banach ne possédant pas la propriété d'arbre fini. Soit $\varepsilon > 0$, et n, δ donnés par le lemme 1.
On suppose $0 < \delta < \varepsilon < 1/8$. On peut munir d'une norme $\| \ \|_{5\varepsilon}$, vérifiant :

1) $(1-\delta)\|x\| \leq \|x\|_{5\varepsilon} \leq (1-\frac{\delta}{3})\|x\|$

2) si $\|x\| = \|y\| = 1$, et $\|x-y\| \geq 5\varepsilon$, on a

$$\|x+y\|_{5\varepsilon} \leq \|x\|_{5\varepsilon} + \|y\|_{5\varepsilon} - \varepsilon\,\delta_1$$

où δ_1 est celui donné par le lemme 2.

Démonstration : On considère l'écart introduit au lemme 2, et on définit $\|x\|_{5\varepsilon}$ comme l'infimum des longueurs dans cet écart des polygones reliant 0 à x, c'est-à-dire :

$$\|x\|_{5\varepsilon} = \inf\{\sum_{i=0}^{N} |x_{i+1}\ldots x_i|,\ x_o = 0,\ x_{N+1} = x,\ x_i \in E,\ \forall\ i = 0..N+1; N=1..\}$$

Montrons que $\|x\|_{5\varepsilon}$ est une norme.

$$\|x+y\|_{5\varepsilon} = \inf\{\sum_{i=N}^{N} |z_{i+1} - z_i|,\ z_{N+1} = x+y\}$$

$$\leq \inf\{\sum_{i=0}^{N} |z_{i+1} - z_i|,\ z_{N+1} = x+y \text{ et } \exists\ K < N \text{ tel que } z_{K+1} = x\}$$

$$\leq \inf \sum_{i=0}^{K} |z_{i+1} - z_i| + \inf \sum_{K+1}^{N} |z_{i+1} - z_i|$$

$$\leq \|x\|_{5\varepsilon} + \|y\|_{5\varepsilon}$$

d'autre part, $\|\lambda x\|_{5\varepsilon} = |\lambda|\,\|x\|_{5\varepsilon}$ d'après les propriétés de l'écart.

On a $\|x\|_{5\varepsilon} \leq (1 - \frac{\delta}{3}) \|x\|$ puisque $|x| \leq (1 - \frac{\delta}{3}) \|x\|$.

Montrons que $(1 - \delta) \|x\| \leq \|x\|_{5\varepsilon}$ c'est-à-dire $(1-\delta)\|x\| \leq \sum_{i=0}^{N} |x_{i+1}-x_i|$ avec $x = \sum_{i=0}^{N} x_{i+1} - x_i$,

donc $\|x\| \leq \Sigma \|x_{i+1} - x_i\| \leq \frac{1}{1-\delta} \Sigma |x_{i+1} - x_i|$ d'après les propriétés de l'écart.

Supposons maintenant $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x - y\| \geq 5\varepsilon$.
Soit $\gamma > 0$ tel que $\gamma < \varepsilon-\delta$. Par définition de $\|x\|_{5\varepsilon}$ et $\|y\|_{5\varepsilon}$, il existe deux polygones, $0 = x_o, x_1, \ldots, x_n = x \quad 0 = y_o, \ldots y_m = y$, tels que

$$\sum_{i=0}^{n-1} |x_{i+1} - x_i| \leq \|x\|_{5\varepsilon} + \gamma$$

$$\text{et} \quad \sum_{i=0}^{m-1} |y_{i+1} - y_i| \leq \|y\|_{5\varepsilon} + \gamma .$$

Ces deux polygones ont donc une longueur en norme inférieure à $1 + \delta + \gamma < 1 + \varepsilon$ (puisque $\Sigma \|x_{i+1}-x_i\| \leq \frac{1}{1-\delta} \Sigma |x_{i+1} - x_i| \leq \frac{1}{1-\delta}(\|x\|_{5\varepsilon} + \gamma)$

$$\leq \frac{1}{1-\delta} (1 - \frac{\delta}{3} + \gamma) \leq 1 + \delta + \gamma$$

car δ et γ sont inférieurs à 1/8) et, puisque $\|x\| = 1$, $\Sigma \|x_{i+1} - x_i\| \geq 1$, et ils ont une longueur en norme au moins égale à 1.

Quitte à échanger x et y, on peut supposer qu'en norme, c'est le polygone relatif à x qui a la plus petite longueur.
On introduit alors de nouveaux points (au plus m dans le polygone de x, au plus n dans celui de y) de sorte que, désignant par x'_k, y'_k les points des nouveaux polygones, on ait :

$$\|x'_1\| = \|y'_1\| \ , \quad \|x'_k - x'_{k-1}\| = \|y'_k - y'_{k-1}\|,$$

et ce pour tous les indices k tels que x'_k soit défini.

Introduire de nouveaux points sur les polygones ne modifie pas leur longueur en norme, et ne modifie pas non plus leur longueur dans l'écart, car celui-ci est positivement homogène, et si on introduit un point x_i' sur le segment x_i, x_{i+1}, on a

$$x_{i+1} - x_i = x_{i+1} - x_i' + x_i' - x_i$$

et on a $x_{i+1} - x_i' = \alpha(x_{i+1} - x_i)$

$$x_i' - x_i = (1-\alpha)\ (x_{i+1} - x_i)$$

et donc

$$|x_{i+1} - x_i'| + |x_i' - x_i| = |x_{i+1} - x_i|.$$

Soit k_1 l'indice tel que $x'_{k_1} = x$. On a :

$$\sum_{i=0}^{k_1-1} \|x'_{i+1} - x_i\| \geq 1, \text{ donc } \sum_{i=0}^{k_1-1} \|y'_{i+1} - y'_i\| \geq 1,$$

et donc $\sum\limits_{i \geq k_1} \|y'_{i+1} - y_i\| < \varepsilon$, puisque la longueur totale du polygone $y_0', \ldots, y_N' = y$ est en norme inférieure à $1+\varepsilon$. Par conséquent, on a :

$$\|x - y'_{k_1}\| \geq \|x - y\| - \|y - y'_{k_1}\| \geq 5\varepsilon - \varepsilon = 4\varepsilon ,$$

et donc

$$4\varepsilon \leq \|x - y'_{k_1}\| = \Big\|\sum_{k=1}^{k_1} [(x_k' - x'_{k-1}) - (y_k' - y'_{k-1})]\Big\|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{k_1} \|\ [x_k' - x'_{k-1}] - [y_k' - y'_{k-1}]\|.$$

On va considérer deux sortes de termes dans cette somme : soit K_1 l'ensemble des indices k pour lesquels on a :

$$\|(x_k' - x'_{k-1}) - (y_k' - y'_{k-1})\| \geq \varepsilon\ \|x_k' - x'_{k-1}\|,$$

et soit K_2 l'ensemble des autres, c'est-à-dire ceux pour lesquels on a :

$$\|(x'_k - x'_{k-1}) - (y'_k - y'_{k-1})\| < \varepsilon \|x'_k - x'_{k-1}\| .$$

D'où

$$\sum_{k \in K_2} \|(x'_k - x'_{k-1}) - (y'_k - y'_{k-1})\| \leq \varepsilon \sum_{k \in K_2} \|x'_k - x'_{k-1}\|$$

$$\leq \varepsilon \sum_{k} \|x'_k - x'_{k-1}\| \leq \varepsilon(1 + \varepsilon) \leq 2\varepsilon.$$

D'autre part, puisque

$$4\varepsilon \leq \sum_{k \in K_1} \|(x'_k - x'_{k-1}) - (y'_k - y'_{k-1})\| + \sum_{k \in K_2} \|(x'_k - x'_{k-1}) - (y'_k - y'_{k-1})\|.$$

On a

$$\sum_{k \in K_1} \|(x'_k - x'_{k-1}) - (y'_k - y'_{k-1})\| \geq 4\varepsilon - 2\varepsilon = 2\varepsilon.$$

D'où

$$\sum_{k \in K_1} \|x'_k - x'_{k-1}\| + \sum_{k \in K_1} \|y'_k - y'_{k-1}\| \geq 2\varepsilon$$

Or $\|x'_k - x'_{k-1}\| = \|y'_k - y'_{k-1}\|$, et donc :

$$\sum_{k \in K_1} \|x'_k - x'_{k-1}\| \geq \varepsilon.$$

Mais, si $k \in K_1$, on a $\|(x'_k - x'_{k-1}) - (y'_k - y'_{k-1})\| \geq \varepsilon \|x'_k - x'_{k-1}\|$

et d'après le lemme 2 :

$$|(x'_k - x'_{k-1}) + (y'_k - y'_{k-1})| \leq |x'_k - x'_{k-1}| + |y'_k - y'_{k-1}| - \|x'_k - x'_{k-1}\| . \delta_1 .$$

D'où

$$\sum_{k \in K_1} |(x'_k - x'_{k-1}) + (y'_k - y'_{k-1})| \leq \sum_{k \in K_1} |x'_k - x'_{k-1}| + \sum_{k \in K_1} |y'_k - y'_{k-1}|$$

$$- \delta_1 \sum_{k \in K_1} \|x'_k - x'_{k-1}\|$$

$$\leq \sum_{k \in K_1} |x'_k - x'_{k-1}| + \sum_{k \in K_1} |y'_k - y'_{k-1}| - \varepsilon\, \delta_1 .$$

On relie 0 à $x + y$ par le polygone constitué des points x'_k, y'_k $(k \in K_2)$, $x'_k + y'_k$ $(k \in K_1)$.
On a bien :

$$\sum_{k \in K_2} (x'_k - x'_{k-1}) + \sum_{k \in K_2} (y'_k - y'_{k-1}) + \sum_{k \in K_1} (x'_k - x'_{k-1} + y'_k - y'_{k-1}) = x + y$$

et, désignant par z_i les points qui constituent le polygone :

$$\Sigma\, |z_i - z_{i-1}| \leq \sum_k |x'_k - x'_{k-1}| + \sum_k |y'_k - y'_{k-1}| - \varepsilon\, \delta_1$$

$$\leq \|x\|_{5\varepsilon} + \|x\|_{5\varepsilon} - \varepsilon\, \delta_1 + 2\gamma$$

d'où

$$\|x+y\|_{5\varepsilon} \leq \|x\|_{5\varepsilon} + \|y\|_{5\varepsilon} - \varepsilon\, \delta_1 + 2\gamma$$

et puisque γ est arbitrairement petit, le lemme est démontré.

<u>Lemme 4</u> : Soit E un espace normé, avec une norme $\| \ \|$. On suppose que E peut être muni d'une autre norme $\| \ \|_{\mathcal{U}}$ vérifiant

- $\forall\, x \in E$, $\|x\|_{\mathcal{U}} \leq \|x\| \leq M\, \|x\|_{\mathcal{U}}$
- si $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x-y\| \geq \varepsilon$, alors

$$\|x+y\|_{\mathcal{U}} \leq \|x\|_{\mathcal{U}} + \|y\|_{\mathcal{U}} - \delta(\varepsilon)$$

pour une certaine fonction $\delta(\varepsilon)$, $\delta > 0$ si $\varepsilon > 0$.
Alors $\| \ \|_{\mathcal{U}}$ est une norme uniformément convexe.

<u>Démonstration</u> : Remarquons d'abord que pour n'importe quelle norme $\| \ \|_1$, les conditions $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$, $1 \geq \|x-y\|_1 \geq \varepsilon > 0$ impliquent que pour tout α réel, $\|\alpha x-y\| \geq \varepsilon/2$.
Pour prouver cette assertion, on considère différents cas :

- $0 \leq \alpha \leq 1 - \varepsilon/2$, ou $1 + \varepsilon/2 \leq \alpha$, on a

$$\|\alpha x-y\|_1 \geq \left|\, \|\alpha x\|_1 - \|y\|_1 \right| \geq \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2$$

- $|\alpha - 1| \leq \varepsilon/2$

$$\|\alpha x-y\|_1 \geq \big| \|x-y\|_1 - |\alpha - 1| \, \|x\|_1 \big| \geq \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2$$

- $\alpha < 0$

la fonction $\alpha \to \|\alpha x-y\|$ est une fonction convexe de α, qui prend la valeur 1 pour $\alpha = 0$, et une valeur inférieure à 1 pour $\alpha = 1$.

Supposons maintenant $\|x\|_{\mathcal{U}} = \|y\|_{\mathcal{U}} = 1$, et $1 \geq \|x-y\|_{\mathcal{U}} \geq \varepsilon$. On peut alors trouver deux réels α et β, $\frac{1}{M} \leq \alpha \leq 1$, $\frac{1}{M} \leq \beta \leq 1$, tels que $\|\alpha x\| = \|\beta y\| = 1$.

On a $\|\alpha x-\beta y\| \geq \|\alpha x-\beta y\|_{\mathcal{U}} = |\beta| \, \|\frac{\alpha}{\beta} x-y\|_{\mathcal{U}} \geq \frac{1}{M} \varepsilon/2$.

Donc, d'après les hypothèses du lemme, on a :

$$\|\alpha x+\beta y\|_{\mathcal{U}} \leq \alpha + \beta - \delta(\varepsilon/2M).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\|x+y\|_{\mathcal{U}} &\leq \|\alpha x+\beta y\|_{\mathcal{U}} + \|(1-\alpha)x+(1-\beta)y\|_{\mathcal{U}} \\ &\leq \alpha + \beta - \delta(\varepsilon/2M) + 1 - \alpha + 1 - \beta \\ &\leq 2 - \delta(\varepsilon/2M)\end{aligned}$$

ce qui prouve que la norme $\| \ \|$ est uniformément convexe.

<u>Lemme 5</u> : Si, dans un espace de Banach E, on peut, pout tout $\varepsilon > 0$, introduire une norme satisfaisant aux hypothèses 1) et 2) du lemme 3, E est uniformément convexifiable.

<u>Démonstration</u> : Soit $\|x\|_\varepsilon$ la norme définie dans le lemme 3. On pose

$$\|x\|_{\mathcal{U}} = \frac{1}{2} \|x\|_\varepsilon + \frac{1}{4} \|x\|_{\varepsilon/2} + \frac{1}{8} \|x\|_{\varepsilon/4} + \cdots$$

On vérifie que $\| \ \|$ est une norme, et d'après 1) du lemme 3, on a $(1-\varepsilon)\ \|x\| \leq \|x\|_{\mathcal{U}} \leq \|x\|$.
Supposons $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x-y\| \geq \varepsilon_1$. Alors $\varepsilon_1 > \varepsilon/2$ k pour un certain k, et l'on a :

$$\|x+y\|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \|x+y\|_{\varepsilon/2^i}$$

$$= \sum_{i \neq k} \frac{1}{2^{i+1}} \|x+y\|_{\varepsilon/2^i} + \frac{1}{2^{k+1}} \|x+y\|_{\varepsilon/2^k}$$

$$\leq \sum_{i \neq k} \frac{1}{2^{i+1}} \|x\|_{\varepsilon/2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} \|y\|_{\varepsilon/2^i} +$$

$$+ \frac{1}{2^{k+1}} \left(\|x\|_{\varepsilon/2^k} + \|y\|_{\varepsilon/2^k} - \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \delta_1' \right)$$

où δ_1' est le δ_1 donné par le lemme 3 correspondant à $\frac{\varepsilon}{2^k}$.

On a donc

$$\|x+y\|_{\mathcal{U}} \leq \sum_i \frac{1}{2^{i+1}} \left(\|x\|_{\varepsilon/2^i} + \|y\|_{\varepsilon/2^i} \right) - \frac{1}{2^{k+1}} \frac{\varepsilon}{2^k} \delta_1'$$

et donc

$$\|x+y\|_{\mathcal{U}} \leq \|x\|_{\mathcal{U}} + \|y\|_{\mathcal{U}} - \frac{1}{2^{k+1}} \frac{\varepsilon}{2^k} \delta_1'$$

et, d'après le lemme 4 avec M = 2, ceci implique que $\| \ \|_{\mathcal{U}}$ est uniformément convexe, et achève la démonstration du théorème.
Le théorème permet de voir que l'espace l^1 n'est pas uniformément convexifiable : en effet, la base canonique de $l^1_{(2^n)}$ constitue, pour tout n, une (n,2) branche dans la boule unité de l^1; cet espace possède donc la propriété d'arbre fini.

Remarquons que la démonstration du théorème donne explicitement la norme uniformément convexe. On a vu qu'elle vérifiait
$(1-\varepsilon)\ \|x\| \leq \|x\|_{\mathcal{U}} \leq \|x\|$
Utilisant d'abord la condition nécessaire du théorème, on peut ainsi montrer qu'un espace de Banach uniformément convexifiable l'est à ε près, c'est-à-dire que s'il existe une norme uniformément convexe équivalente à la

norme initiale, on peut, pour tout $\varepsilon > 0$, en trouver une vérifiant $(1-\varepsilon)\ \|x\| \le \|x\|_{\mathfrak{U}} \le \|x\|$.
On peut retrouver ce dernier résultat par une méthode plus directe, utilisant le lemme 3.

<u>Proposition</u> : Soit E un espace de Banach muni de deux normes équivalentes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$, la seconde étant uniformément convexe.
Alors la somme des deux est uniformément convexe.

<u>Démonstration</u> : On peut, sans restreindre la généralité du problème, supposer que

$$\frac{1}{M}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 .$$

Posons $\|x\|_{\mathfrak{U}} = \dfrac{1}{M+1}\left(\|x\|_1 + \|x\|_2\right)$, on a

$$\|x\|_{\mathfrak{U}} \le \|x\|_2 \le \frac{M+1}{2}\|x\| \quad .$$

Soient x,y avec $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$ et $\|x-y\|_2 \ge \varepsilon$; puisque $\|\ \|_2$ est uniformément convexe, il existe une fonction $\delta(\varepsilon)$, $\delta > 0$ si $\varepsilon > 0$ telle que ces conditions impliquent

$$\|x+y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2 - \delta(\varepsilon).$$

Donc

$$\|x+y\|_{\mathfrak{U}} = \frac{1}{M+1}\left(\|x+y\|_1 + \|x+y\|_2\right)$$

$$\le \frac{1}{M+1}\left(\|x\|_1 + \|y\|_1 + \frac{1}{M+1}[\|x\|_2 + \|y\|_2 - \delta(\varepsilon)]\right.$$

$$\le \|x\|_{\mathfrak{U}} + \|y\|_{\mathfrak{U}} - \frac{1}{M+1}\ \delta(\varepsilon)$$

et, d'après le lemme 4, ceci implique que $\|x\|_{\mathfrak{U}}$ est uniformément convexe.
Il en est de même alors de la somme qui est $(M+1)\ \|\ \|_{\mathfrak{U}}$.
Ceci prouve la proposition.

Quitte à remplacer $\|\ \|_2$ par un homothétique de rapport suffisamment petit, on peut faire en sorte que, pour un α donné, on ait

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_1 + \|x\|_2 \leq (1+\alpha) \|x\|_1$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

Les conséquences du théorème seront examinées dans l'exposé suivant.

*
* *
*

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. ENFLO : Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm. Israël J. of Maths. 13 - (1972) p. 281-288.

[2] R.C. JAMES : Some Self Dual properties of normed linear spaces. Ann. Math. Studies. n° 69- p. 159-175.

****