Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

P. Assouad

Factorisation des applications Λ_p-sommantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 11, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A13_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

FACTORISATION DES APPLICATIONS Λ_p-SOMMANTES

par P. ASSOUAD

Exposé N° XI

23 Janvier 1974

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. On rappelle que $\Lambda_p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ est l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définies μ-presque partout, mesurables et vérifiant :

$$\sup_{y>0} y^p \mu \{\omega \mid |f(\omega)| > y\} < \infty .$$

Le cone $\mathcal{Y}$ des fonctions de Young est l'ensemble des fonctions $\Phi : [0,\infty[\to [0,\infty[$ croissantes, continues et nulles à l'origine et non identiquement nulles.

<u>Définition</u> : On note $\mathcal{Y}_p$ le sous-cone des fonctions de Young de la forme $\Phi_\nu(x) = \int_0^\infty z^p 1_{x>z} \nu(dz)$ où ν est une mesure de masse totale finie et non nulle sur $]0,\infty[$.

<u>Propriétés</u> : 1) On a $\int_0^\infty \frac{\Phi_\nu(x)}{x^{p+1}} dx = \frac{1}{p} \nu(]0,\infty[) < \infty$.

Réciproquement une fonction de Young Φ vérifiant $\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x^{p+1}} dx < \infty$ appartient évidemment à $\mathcal{Y}_p$.

2) Soit $\Phi \in \mathcal{Y}_p$. Alors $x \to y^p \Phi(\frac{x}{y})$ appartient à $\mathcal{Y}_p$ et on a :

$$\int_0^\infty \frac{y^p \Phi(\frac{x}{y})}{x^{p+1}} dx = \int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x^{p+1}} dx .$$

3) Les fonctions $x \to 1 \wedge x^{q_1}$, $x \to (x^{q_2} - 1)^+$ et $x \to x^{q_1} \wedge x^{q_2}$ appartiennent à $\mathcal{Y}_p$ si $\infty \geq q_1 > p > q_2 > 0$.

4) On a :

$$\int_0^\infty y^p \mu\{\omega \mid |f(\omega)| > y\} \nu(dy) = \int \Phi_\nu(|f(\omega)|) \mu(d\omega) .$$

Donc, pour que f appartienne à $\Lambda_p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, il faut et il suffit que :

$$\sup \left\{ \int \Phi(|f(\omega)|) \mu(d\omega) \;\middle|\; \Phi \in \mathcal{Y}_p , \int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x^{p+1}} dx \leq 1 \right\} < \infty .$$

5) Soit $\Phi \in \mathcal{Y}_p$. Pour que f appartienne à $\Lambda_p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, il faut et il suffit que

$$\sup_{y>0} \; y^p \int \Phi\left(\left|\frac{f(\omega)}{y}\right|\right) \mu(d\omega) < \infty .$$

<u>Démonstration</u> : En effet, soit c tel que $\Phi(c) > 0$. On a :

$$\Phi(c)\, 1_{x>c} \leq \Phi(x) = \int_0^\infty z^p \, 1_{x>z} \, \nu(dz).$$

Donc

$$\frac{\Phi(c)}{c^p} (cy)^p \, \mu\{\omega \mid |f(\omega)| > cy\} \leq y^p \int \Phi\left(\left|\frac{f(\omega)}{y}\right|\right) \mu(d\omega) ,$$

cette dernière quantité valant $\int (yz)^p \mu\{\omega \mid |f(\omega)| > yz\} \, \nu(dz)$.

6) Sous les mêmes hypothèses que 5) un critère équivalent est

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \; 2^{np} \int \Phi\left(\left|\frac{f(\omega)}{2^n}\right|\right) \mu(d\omega) < \infty .$$

<u>Démonstration</u> : En effet, soit $y > 0$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $2^n \leq y \leq 2^{n+1}$. On a donc :

$$y^p \int \Phi\left(\left|\frac{f(\omega)}{y}\right|\right) \mu(d\omega) \leq 2^p \, 2^{np} \int \Phi\left(\left|\frac{f(\omega)}{2^n}\right|\right) \mu(d\omega) .$$

7) Soit $q_2 \leq 1$. Si $p > q_2$ la topologie de $\Lambda_p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ peut être définie par la q_2-norme

$$\sup_{y>0} \; y \left[\int \left(\left|\frac{f(\omega)}{y}\right|^{q_2} - 1\right)^+ \mu(d\omega)\right]^{1/p}$$

(c'est une conséquence des propriétés 3) et 5)).

8) On peut préciser la propriété 4). On a :

$$\Lambda_p = \bigcap_{\Phi \in \mathcal{Y}_p} L_\Phi .$$

Démonstration : Il est clair que $\Lambda_p \subset \bigcap_{\Phi \in \mathcal{Y}_p} L_\Phi$ (c'est la propriété 4)).

Par ailleurs, soit $f \in \bigcap_{\Phi \in \mathcal{Y}_p} L_\Phi$. Soit ν une mesure de masse totale finie et non nulle sur $]0,\infty[$.

On pose $\psi_\nu(x) = \int_0^\infty y^p \, 1 \wedge (\frac{x}{y})^{q_1} \, \nu(dy) \qquad (q_1 > p)$.

On a $\psi_\nu \in \mathcal{Y}_p$ et $\dfrac{\psi_\nu(x)}{x^{q_1}}$ décroissante.

Donc $\int \psi_\nu (|f(\omega)|) \, \mu(d\omega) < \infty$.

Donc $y \to y^p \int 1 \wedge |\frac{f(\omega)}{y}|^{q_1} \mu(d\omega)$ est intégrable par toute mesure de masse totale finie sur $]0,\infty[$, donc est bornée sur $]0,\infty[$.

Ainsi $f \in \Lambda_p$ (propriété 5)).

Remarque : Soit $L_{p,q}(\Omega,\mathcal{a},\mu)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définies μ-presque partout, mesurables et vérifiant

$$\left(\int_0^\infty [y^p \, \mu\{\omega \mid |f(\omega)| > y\}]^{q/p} \frac{dy}{y} \right)^{1/q} < \infty .$$

Λ_p n'est autre que $L_{p,\infty}$. On suppose $q \neq p$ (car $L_{p,p} = L_p$).

Soit $\mathcal{Z}_{p,q}$ le sous-cone des fonctions de Young de la forme

$$\psi_g(x) = \int_0^\infty z^p \, 1_{x > z} \, g(z) \, \frac{dz}{z}$$

où g est positif et $\int_0^\infty g(z)^{\frac{p}{q-p}} dz < \infty$.

Si $q \in]p,\infty[$, on démontre exactement comme pour $q = \infty$ que

$$L_{p,q} = \bigcap_{\Phi \in \mathcal{Z}_{p,q}} L_\Phi .$$

Si $q \in]0,p[$, on voit aisément que

$$L_{p,q} = \bigcup_{\Phi \in \mathcal{Z}_{p,q}} L_\Phi .$$

Rappelons la définition des applications Λ_p-sommantes (cf.[4]). On se placera pour simplifier dans le cas d'applications entre espaces de Banach.

<u>Définition</u> : Soient E,F des espaces de Banach, T application linéaire $E \to F$, B boule unité de E'.
On dit que T est Λ_p-sommante si $\exists\ d > 0$ tel que

$$\forall\ m \in \mathbb{N} \qquad \forall\ x_1,\dots,x_m \in E \qquad \forall\ \lambda_1,\dots,\lambda_m \geq 0$$

$$\sup_{\xi \in B} \ \sup_{y>0} y^p \sum_{i=1}^m \lambda_i \ 1_{|<x_i,\xi>|>y} \leq d \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{y>0} y^p \sum_{i=1}^m \lambda_i \ 1_{\|T x_i\|>y} \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \ .$$

On dit que T est Λ_p-0 sommante si $\forall\ b > 0 \ \exists\ d > 0$ tel que

$$\forall\ m \in \mathbb{N} \qquad \forall\ x_1,\dots,x_m \in E \qquad \forall\ \lambda_1,\dots,\lambda_m \geq 0$$

$$\sup_{\xi \in B} \ \sup_{y>0} y^p \sum_{i=1}^m \lambda_i \ 1_{|<x_i,\xi>|>y} \leq d \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i \ 1_{\|T x_i\|>1} \leq b \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

(naturellement, on peut se contenter de prendre $b < 1$).

On va montrer que ces deux notions ne sont pas distinctes. Pour cela, on a le

<u>Lemme 1</u> : On se donne pour toute mesure $\mu \geq 0$ à support fini sur E un nombre $M(\mu) \geq 0$ tel que

$$\begin{aligned} M(\lambda\,\mu) &= \lambda\, M(\mu) && \forall\ \lambda \in [0,\infty[\\ M(\mu + \delta_x) &\geq M(\mu) && \forall\ x \in E \ . \end{aligned} \qquad (1)$$

On suppose que ($b \in]0,1[$ et $d > 0$ étant donnés)

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad \forall\, x_1,\ldots,x_m \in E \qquad \forall\, \lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0$$

tels que

$$M\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i\, \delta_{x_i}\Big) \leq d \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m \lambda_i\, 1_{\|T x_i\| > 1} \leq b \sum_{i=1}^m \lambda_i\,,$$

alors $\forall\, m \in \mathbb{N} \quad \forall\, x_1,\ldots,x_m \in E \quad \forall\, \lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i\, 1_{\|T x_i\| > 1} \leq \frac{1}{d}\, M\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i\, \delta_{x_i}\Big).$$

Si de plus, $M(h_y(\mu)) = y^p\, M(\mu) \quad \forall\, y > 0 \quad (2)$

(h_y est l'application $x \to yx$ et $h_y(\mu)$ l'image directe de μ par h_y),
alors $\forall\, m \in \mathbb{N} \quad \forall\, x_1,\ldots,x_m \in E \quad \forall\, \lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0$

$$\sup_{y>0} \sum_{i=1}^m \lambda_i\, 1_{\|T x_i\| > y} \leq \frac{1}{d}\, M\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i\, \delta_{x_i}\Big)$$

<u>Démonstration</u> : On a

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i\, 1_{\|T x_i\| > 1} > b \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

$$\Rightarrow M\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i\, \delta_{x_i}\Big) > d \sum_{i=1}^m \lambda_i\,,$$

en particulier comme $b < 1$, on a

$$\sum_{i=1}^m (\lambda_i\, 1_{\|T x_i\| > 1})\, 1_{\|T x_i\| > 1} > b \sum_{i=1}^m (\lambda_i\, 1_{\|T x_i\| > 1}).$$

Donc $\quad M\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i\, 1_{\|T x_i\| > 1}\, \delta_{x_i}\Big) > d \sum_{i=1}^m \lambda_i\, 1_{\|T x_i\| > 1}\,.$

Or l'hypothèse (1) donne :

$$M\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \,\delta_{x_i}\Big) \geq M\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, 1_{\|T x_i\| > 1}\, \delta_{x_i}\Big),$$

c'est donc le premier résultat.
Par ailleurs (2) entraîne :

$$y^p \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, 1_{\|T x_i\| > y} \leq \frac{1}{d}\, y^p\, M\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \,\delta_{\frac{x_i}{y}}\Big) = \frac{1}{d}\, M\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \,\delta_{x_i}\Big).$$

<u>Corollaire</u> : T Λ_p-sommante $\Leftrightarrow$ T Λ_p-0 sommante.

<u>Démonstration</u> : $\Rightarrow$ est évident.
L'autre implication est une conséquence du lemme en remarquant que $M : \mu \to \sup\limits_{\xi \in B} \; \sup\limits_{y>0} \; y^p \mu\{x \mid |<x,\xi>| > y\}$ vérifie les hypothèses (1) et (2) du lemme.

On se propose maintenant d'obtenir une condition nécessaire pour que $T : E \to F$ soit Λ_p-sommante.
Le lemme précédent et les propriétés 3) et 5) permettent de traduire l'hypothèse sur T par : $\exists\, \alpha > 0$

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad \forall\, x_1, \ldots, x_m \in E \qquad \forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, 1_{\|T x_i\| > 1} < \alpha \sup_{\xi \in B} \; \sup_{n \in \mathbb{Z}} \; 2^{np} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, \theta\Big(\Big|\frac{<x_i,\xi>}{2^n}\Big|\Big)$$

où $\theta(x) = x^{q_1} \wedge x^{q_2}$ avec $\infty > q_1 > p > q_2 > 0$.
Noter que $y^p \theta(\frac{x}{y}) \to 0$ quand $y \to 0$ et $y \to +\infty$.
On a aussi

$$\frac{1}{x^{q_1}}\, \theta\Big(\frac{x}{y}\Big) \searrow \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x^{q_2}}\, \theta\Big(\frac{x}{y}\Big) \nearrow \qquad \text{(en x)}.$$

<u>Proposition 1</u> : Soient E,F des espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire Λ_p-sommante.
Alors, il existe une loi de probabilité μ sur B, une fonction mesurable

$$\begin{aligned} \Phi \ : \ B \times [0,\infty[\ &\to \ [0,\infty[\\ (\xi,x) \ &\to \ \Phi(\xi,x) \end{aligned}$$

vérifiant

$$\frac{1}{x^{q_1}} \Phi(\xi,x) \searrow \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^{q_2}} \Phi(\xi,x) \nearrow \quad \text{(en x)}$$

$$\text{et} \quad \int_B \left(\int_0^\infty \frac{\Phi(\xi,x)}{x^{p+1}}\, dx\right) \mu(d\xi) \ < \ \infty$$

telles que : $\forall\, x \in E$,

$$\int_B \Phi(\xi, |<x,\xi>|)\, \mu(d\xi) \ \leq \ 1 \quad \Rightarrow \quad \|Tx\| \ \leq \ 1 \ .$$

<u>Démonstration</u> : a) Les fonctions

$$(\xi,n) \ \to \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[\alpha\, 2^{np}\, \theta\left(\left|\frac{<x_i,\xi>}{2^n}\right|\right) - 1_{\|T x_i\|>1}\right]$$

forment une famille convexe de fonctions conitnues sur le compact $B \times \overline{\mathbb{Z}}$ et chacune d'elles a une valeur ≥ 0.

Ce dernier point est l'hypothèse. Parailleurs, les valeurs aux points $(\xi,-\infty)$ et $(\xi,+\infty)$ sont déterminées par continuité.
La vérification de la continuité est sans difficulté.

b) Rappelons le lemme de minimax usuel dans ces questions : soit K un compact, $\mathcal{C}$ un convexe de fonctions réelles continues sur K, chacune d'elles ayant une valeur ≥ 0.
Alors il existe une loi de probabilité μ sur K qui est positive sur tous les éléments de $\mathcal{C}$.

c) Une loi de probabilité μ sur $B \times \overline{\mathbb{Z}}$ est une suite $(\mu_n)_{n \in \overline{\mathbb{Z}}}$ de mesures ≥ 0 sur B telle que $\sum_{n \in \overline{\mathbb{Z}}} \int_B \mu_n(d\xi) = 1$.

Donc, il existe des mesures ≥ 0 $(\mu_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_B \mu_n(d\xi) \leq 1$ et que $\forall\, m \in \mathbb{N}$ $\forall\, x_1,\ldots,x_m \in E$ $\forall\, \lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, 1_{\|T x_i\| > 1} \leq \alpha \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np} \int_B \theta\left(\left|\frac{< x_i, \xi >}{2^n}\right|\right) \mu_n(d\xi).$$

On a, en particulier $\forall\, x \in E$

$$1_{\|T x\| > 1} \leq \alpha \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np} \int_B \theta\left(\left|\frac{< x, \xi >}{2^n}\right|\right) \mu_n(d\xi).$$

Donc, $\forall\, x \in E$

$$2\alpha \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np} \int_B \theta\left(\left|\frac{< x, \xi >}{2^n}\right|\right) \mu_n(d\xi) \leq 1 \Rightarrow \|T x\| \leq 1 .$$

Soit $\mu(d\xi)$ une loi de probabilité telle que $\mu_n << \mu$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.
On pose $2\alpha\, \mu_n(d\xi) = g(\xi,n)\, \mu(d\xi)$.
On a donc

$$\int_B \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(\xi,n)\, \mu(d\xi) < \infty$$

et $$\int_B \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np}\, \theta\left(\left|\frac{< x, \xi >}{2^n}\right|\right) g(\xi,n)\, \mu(d\xi) \leq 1 \Rightarrow \|T x\| \leq 1 .$$

On pose $$\Phi(\xi,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np}\, \theta\left(\frac{x}{2^n}\right) g(\xi,n) = \int_0^\infty y^p\, \theta\left(\frac{x}{y}\right) \nu(dy)$$

avec $\nu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(\xi,n)\, \delta_{2^n}$.

La propriété 2) montre que $x \to \Phi(\xi,x)$ appartient à $\mathcal{Y}_p$ et que

$$\int_0^{\infty} \frac{\Phi(\xi,x)}{x^{p+1}}\,dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(\xi,n) \int_0^{\infty} \frac{\theta(x)}{x^{p+1}}\,dx .$$

Le résultat s'ensuit.

<u>Corollaire 1</u> : si $p > 1$ et si $E = C(K)$, on peut supposer que μ est portée par K (identifié à une partie de la boule unité de $C'(K)$).

<u>Démonstration</u> : Il existe $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tels que

$$\begin{aligned}
&\sup_{\xi \in B} \ \sup_{n \in \mathbb{Z}} \ 2^{np} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ \theta\left(\left|\frac{\langle x_i,\xi\rangle}{2^n}\right|\right) \\
&\leq \alpha_1 \sup_{n \in \mathbb{Z}} \ \sup_{\xi \in B} \ 2^{np} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\left|\frac{\langle x_i,\xi\rangle}{2^n}\right| - 1\right)^+ \\
\left(\begin{array}{l}\text{car } x \to (x-1)^+ \\ \text{est convexe}\end{array}\right) \quad &\leq \alpha_1 \sup_{n \in \mathbb{Z}} \ \sup_{t \in K} \ 2^{np} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\left|\frac{x_i(t)}{2^n}\right| - 1\right)^+ \\
&\leq \alpha_1 \alpha_2 \sup_{t \in K} \ \sup_{n \in \mathbb{Z}} \ 2^{np} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ \theta\left(\left|\frac{x_i(t)}{2^n}\right|\right) .
\end{aligned}$$

Cela permet d'appliquer le lemme de minimax sur $K \times \overline{\mathbb{Z}}$ au lieu de $B \times \overline{\mathbb{Z}}$. On obtient ainsi le résultat.

<u>Corollaire 2</u> : Soit $T : E \to F$ une application Λ_p-sommante. Alors T se factorise de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "T"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr] & & F \\
C(B) \arrow[d, "v"'] & S \arrow[ur, "T_o"'] \arrow[dl, "\tilde{v}"] & \\
L(B,\Phi,\mu) & &
\end{tikzcd}$$

où u, v sont les injections naturelles, où S est un sous-espace fermé de $L(B,\Phi,\mu)$ et w son injection dans $L(B,\Phi,\mu)$, où T_o est continue, où enfin $L(B,\Phi,\mu)$ est l'espace des fonctions $f : B \to \mathbb{R}$ définies μ-presque partout, mesurables et vérifiant :

$$\exists\, a > 0 \quad \text{tel que} \quad \int_B \Phi(\xi, |\frac{f(\xi)}{a}|)\, \mu(d\xi) < \infty$$

Φ et μ étant comme dans la proposition 1.
(On dit que $L(B,\Phi,\mu)$ est un espace d'Orlicz non stationnaire).

Démonstration : immédiate .

Remarque : On aura remarqué que la démonstration de la Proposition 1 s'applique aussi bien dans les deux cas suivants (cf. [1] et [2]).

1) $T : E \to F$ où F est quasi normé et E est un e.v.t. à dual quasi normé. Dans ce cas si B est la boule unité de E', on doit baser la mesure μ sur le compact B^* fermeture de B dans $\sigma(E^*,E)$ (E^* dual algébrique de E).

2) $T : E \otimes G \to F$, E et F étant comme ci-dessus et G étant (non complété) un espace quasi normé. Dans ce cas T est supposée (Λ_p,G)-sommante, ce qui signifie que : $\exists\, d > 0$ tel que

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \forall x_1,\dots,x_m \in E \otimes G \qquad \forall \lambda_1,\dots,\lambda_m \geq 0$$

$$\sup_{\xi \in B} \; \sup_{y > 0} \; y^p \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \; 1_{\| < x_i, \xi > \|_G > y} \leq d \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

$$\Rightarrow \; \sup_{y > 0} \; y^p \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \; 1_{\| T x_i \|_F > y} \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, .$$

On voit que la démonstration reste identique quitte à remplacer partout $| < x_i, \xi > |$ par $\| < x_i, \xi > \|_G$.

Le corollaire 1) reste valable si $E = C(K)$, G espace de Banach et F quasi normé.

Le corollaire 2) reste valable dans tous les cas quitte à remplacer $L(B,\Phi,\mu)$ par $L(B,\Phi,\mu\,;G)$, et $L^{\infty}(B,\mu)$ par $L^{\infty}(B,\mu\,;G)$ (en fait $L^{\infty}(B,\mu)\otimes G$).

On a choisi dans Λ_p un module de définition "peu éloigné" de celui de L_p. On va voir une conséquence de ce choix (et étudier certains espaces d'Orlicz non stationnaires).

<u>Proposition 2</u> : Soit E, F des espace de Banach, $T : E \to F$ une application Λ_p-sommante, $p > 1$.
On peut alors choisir l'espace de factorisation $L(B,\Phi,\mu)$ de façon qu'il soit un espace de Banach réflexif.

<u>Démonstration</u> : On choisit q_2 et q_1 de façon que $1 < q_2 < p < q_1 < \infty$.
La fonction Φ vérifie donc

$$\frac{1}{x^{q_1}}\,\Phi(\xi,x) \searrow \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x^{q_2}}\,\Phi(\xi,x) \nearrow \qquad \text{(en x)}$$

et

$$\int_B \Big(\int_0^{\infty} \frac{\Phi(\xi,x)}{x^{p+1}}\,dx\Big)\,\mu(d\xi) < \infty .$$

On va montrer que $L(B,\Phi,\mu)$ est alors un espace de Banach réflexif.
La démonstration se fait en plusieurs points :

1) $L^{\infty}(B,\mu) \quad \subset \quad L(B,\Phi,\mu)$
(noter qu'il aurait été préférable de le vérifier au corollaire 2).

<u>Démonstration</u> : La fonction $\psi : x \to \int_B \Phi(\xi,x)\,\mu(d\xi)$ est croissante et vérifie $\int_0^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{p+1}}\,dx$. Elle est donc finie presque partout donc finie partout. Donc $L(B,\Phi,\mu)$ contient les constantes, c'est le résultat.

2) On note $L^o(B,\Phi,\mu)$ la fermeture de $L^\infty(B,\mu)$ dans $L(B,\Phi,\mu)$. On a $L^o(B,\Phi,\mu) = L(B,\Phi,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : Soit $a > 0$, $b > 0$, soit $f \in L(B,\Phi,\mu)$. Il existe donc $a' > 0$ tel que $\int_B \Phi(\xi,|\frac{f(\xi)}{a}|)\ \mu(d\xi) < \infty$.

Mais comme $\frac{1}{x^{q_1}} \Phi(\xi,x) \searrow$, on a $\Phi(\xi,2x) \leq 2^{q_1} \Phi(\xi,x)$.

On peut donc supposer que $\int_B \Phi(\xi,2\ |\frac{f(\xi)}{a}|)\ \mu(d\xi) < \infty$.

Or il existe une suite $f_n \in L^\infty(B,\mu)$ telle que :

$$f_n \to f \quad \mu \text{ p.p.} \quad \text{et} \quad |f_n| \leq |f| .$$

Par ailleurs

$$\Phi(\xi,|\frac{f(\xi) - f_n(\xi)}{a}|) \leq \Phi(\xi,2\ |\frac{f(\xi)}{a}|) + \Phi(\xi,2\ |\frac{f_n(\xi)}{a}|).$$

Donc,(par convergence dominée), il existe n tel que

$$\int_B \Phi(\xi,|\frac{f(\xi) - f_n(\xi)}{a}|)\ \mu(d\xi) < b .$$

C'est le résultat.

(On rappelle qu'une base de voisinage dans $L(B,\Phi,\mu)$ est la famille des

$$\{ f \mid \int_B \Phi(\xi,|\frac{f(\xi)}{a}|)\ \mu(d\xi) < b\} \qquad \forall\ a,b > 0).$$

3) Le dual de $L(B,\Phi,\mu)$ est inclus dans $L_o(B,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : Le même raisonnement qu'n 2) montre que les combinaisons linéaires finies d'indicatrices sont denses dans $L(B,\Phi,\mu)$.

Soit, donc, u une forme linéaire continue sur $L(B,\Phi,\mu)$, elle est déterminée par ses valeurs sur les indicatrices.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $a,b > 0$ tels que

$$\int_A \Phi(\xi,\frac{1}{a})\ \mu(d\xi) < b \quad \Rightarrow \quad u(1_A) < \varepsilon .$$

Or $\xi \to \Phi(\xi,\frac{1}{a})$ est intégrable, donc il existe $c > 0$ tel que

$$\mu(A) < c \quad \Rightarrow \quad \int_A \Phi(\xi,\frac{1}{a})\ \mu(d\xi) < b \quad \Rightarrow \quad u(1_A) < \varepsilon .$$

donc, il existe $g \in L_o(B,\mu)$ tel que

$$u(1_A) = \int_A g(\xi)\ \mu(d\xi) \qquad \forall\ A \text{ mesurable.}$$

Le résultat suit aisément.

4) Le dual de $L(B,\Phi,\mu)$ est $L(B,\Phi^*,\mu)$ où $\Phi^*(\xi,x) = \sup_{y>0}\ [xy - \Phi(\xi,y)]$.

Démonstration : On va supposer que μ est sans atome (le cas où μ a des atomes s'y ramène aisément.)
Soit g un élément du dual de $L(B,\Phi,\mu)$.
Il existe donc $b > 0$, $d > 0$ tels que $\forall\ f \in L^\infty(B,\mu)$:

$$\int_B \Phi(\xi,|f(\xi)|)\ \mu(d\xi) \leq d \quad \Rightarrow \quad \int_B |f(\xi)\ g(\xi)|\ \mu(d\xi) \leq b .$$

Or l'ensemble des couples $(\int_B \Phi(\xi,|f(\xi)|)\ \mu(d\xi), \int_B |f(\xi)\ g(\xi)|\ \mu(d\xi))$ pour $f \in L^\infty(B,\mu)$ est convexe.

Pour le voir, on prend $f_1,f_2 \in L^\infty(B,\mu)$ et on considère la mesure vectorielle

$$A \to (\int_A \Phi(\xi,|f_1(\xi)|)\ \mu(d\xi), \int_A \Phi(\xi,|f_2(\xi)|)\ \mu(d\xi),$$

$$\int_A |f_1(\xi)\ g(\xi)|\ \mu(d\xi), \int_A |f_2(\xi)\ g(\xi)|\ \mu(d\xi))$$

dont l'image est convexe.

Donc, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall f \in L^{\infty}(B,\mu)$:

$$\int_B |f(\xi)\, g(\xi)|\, \mu(d\xi) - b \leq \alpha \left[\int_B \Phi(\xi,|f(\xi)|)\, \mu(d\xi) - d\right] .$$

(C'est un résultat très simple de séparation dans $\mathbb{R}^2$, cf. [3], p. 85).
Donc, $\exists\, a > 0$ tel que

$$\sup_{f \in L^{\infty}(B,\mu)} \int_B \left[\left|f(\xi)\, \frac{g(\xi)}{a}\right| - \Phi(\xi,|f(\xi)|)\right] \mu(d\xi) < \infty$$

c'est-à-dire $\int_B \Phi^{*}(\xi,|\frac{g(\xi)}{a}|)\, \mu(d\xi) < \infty$.

La réciproque est évidente.

5) $L^{\infty}(B,\mu) \subset L(B,\Phi^{*},\mu)$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de montrer que $L(B,\Phi,\mu) \subset L^{1}(B,\tilde{\mu})$ où $\tilde{\mu}(d\xi)$ est la mesure $\Phi(\xi,1)\, \mu(d\xi)$.

En effet, on a $\Phi(\xi,x) \geq \Phi(\xi,1)\, x^{q_1} \geq \Phi(\xi,1)x \qquad \forall x \geq 1$.

Donc

$$L^{\infty}(B,\tilde{\mu}) \subset L(B,\Phi^{*},\mu) .$$

Or les fonctions $\xi \to \Phi(\xi,x)$ ont toutes même support et on doit supposer que c'est le support de μ. (Ce qui revient à séparer $L(B,\Phi,\mu)$).

Donc

$$L^{\infty}(B,\tilde{\mu}) = L^{\infty}(B,\mu).$$

C'est le résultat.

6) $L^{o}(B,\Phi^{*},\mu) = L(B,\Phi,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : On va montrer que $\frac{\Phi^{*}(\xi,x)}{x^{q_2'}} \searrow$ où q_2' est l'indice conjugué de q_2. Cela entraînera alors le résultat comme en 2).

Soit donc $\lambda \geq 1$ et $x > 0$.

On a

$$\Phi^*(\xi,\lambda x) = \sup_{y>0} [\lambda\, xy - \Phi(\xi,y)]$$

$$= \sup_{y>0} xy - \Phi(\xi,\frac{y}{\lambda}) .$$

Or $\dfrac{\Phi(\xi,x)}{x^{q_2}} \nearrow$.

Donc

$$\Phi^*(\xi,\lambda x) \geq \sup_{y>0} [xy - \frac{1}{\lambda^{q_2}} \Phi(\xi,y)]$$

$$= \frac{1}{\lambda^{q_2}} \sup_{y>0} [\lambda^{q_2} xy - \Phi(\xi,y).$$

Donc

$$\Phi^*(\xi,\lambda x) \geq \frac{1}{\lambda^{q_2}} \Phi^*(\xi,\lambda^{q_2} x).$$

Posant $\lambda' = \lambda^{q_2 - 1}$ et $x' = \lambda x$, on trouve

$$\Phi^*(\xi,\lambda' x') \leq \lambda'^{q_2'} \Phi^*(\xi,x'),$$

ce qui est le résultat.

7) Le dual de $L(B,\Phi^*,\mu)$ est $L(B,\Phi,\mu)$.

Démonstration : On trouve en fait comme en 4) que le dual de $L(B,\Phi^*,\mu)$ est $L(B,\overline{\Phi},\mu)$ où $\overline{\Phi} = (\Phi^*)^*$. Il reste donc à comparer $\overline{\Phi}$ et Φ.
D'abord il est classique (et immédiat) que $\overline{\Phi}$ est la régularisée convexe (à ξ fixé) de Φ. Donc $\overline{\Phi}(\xi,x) \leq \Phi(\xi,x) \quad \forall\, x,\xi$.

Par ailleurs, on a $\dfrac{1}{x}\ \Phi(\xi,x) \nearrow$ (en x).

Posons $\Phi(\xi,x) = x\, h(\xi,x)$ avec $h(\xi,x) \nearrow$.

Donc $zh(\xi,\frac{x}{2}) \leq \frac{x}{2}\, h(\xi,\frac{x}{2}) + zh(\xi,z) \qquad \forall\, x,z > 0.$

Posons $y = h(\xi,\frac{x}{2})$. On a donc que $\forall$ x, $\exists$ y tel que $\forall$ z :

$$xy - \frac{x}{2}\, h(\xi,\frac{x}{2}) \quad \geq \quad zy - zh(\xi,z) \ .$$

Donc $\forall$ x, $\exists$ y tel que $xy - \frac{1}{2}\,\Phi(\xi,\frac{x}{2}) \geq \Phi^*(\xi,y)$.

Donc $\forall$ x, on a $\overline{\Phi}(\xi,x) \geq \frac{1}{2}\,\Phi(\xi,\frac{x}{2})$.

Donc

$$L(B,\overline{\Phi},\mu) = L(B,\Phi,\mu).$$

Comme de plus $\overline{\Phi}$ est convexe, $L(B,\Phi,\mu)$ est un espace de Banach et la proposition est démontrée.

<u>Remarques</u> : 1) La propositon 2 permet (comme dans le cas classique des applications p-sommantes) de montrer <u>sans hypothèse d'approximation</u> qu'une application Λ_p-sommante de E dans F est Λ_p-radonifiante de E dans F. (Même démonstration que dans [5]).

2) Le point 2) de la démonstration de la proposition 2 montre que, si $E = C(K)$ et si $p > 1$, la factorisation du corollaire 2 de la proposition 1 se réduit à :

$$C(K) \longrightarrow L(K,\Phi,\mu) \longrightarrow F$$

puisqu'alors $C(K)$ est dense dans $L(K,\Phi,\mu)$ et donc que $S = L(K,\Phi,\mu)$.

On va maintenant rechercher des exemples d'application Λ_p-sommante et des conditions suffisantes.

<u>Proposition 3</u> : Soit $\Omega,\mathcal{A},\mu$ un espace mesuré de masse totale finie. Soit Φ une fonction mesurable de $\Omega \times [0,\infty[$ dans $[0,\infty[$ vérifiant : $\forall\, \omega \in \Omega \quad x \to \Phi(\omega,x)$ est un élément de $\mathcal{Y}$ et

$$\int_\Omega \int_1^\infty \frac{\Phi(\omega,x)}{x^{p+1}}\, dx \quad \mu(d\omega) \quad < \quad \infty \qquad \text{(i)}.$$

On sait qu'alors $L^{\infty}(\Omega,\mu) \subset L(\Omega,\Phi,\mu)$, (cela a été démontré en 1) dans la démonstration, de la proposition 2).

Soit E un e.v.t. à dual quasi normé.

Soit F un e.v.t. quasi normé.

Soit T une application linéaire $E \to F$.

On suppose que T factorise de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "T"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr] & & F \\
L^{\infty}(\Omega,\mu) \arrow[d, "v"'] & S \arrow[ur, "T_o"'] \arrow[dl] & \\
L(\Omega,\Phi,\mu) & &
\end{tikzcd}$$

où u est continue, v est l'injection naturelle, où S est un sous-espace fermé de $L(\Omega,\Phi,\mu)$ et w son injection dans $L(\Omega,\Phi,\mu)$, où T_o est continue.

Alors, T est Λ_p-sommante de E dans F.

<u>Démonstration</u> : 1) Il est clair qu'on peut remplacer sans changer $L(\Omega,\Phi,\mu)$ ni sortir des hypothèses la fonction $\Phi(\omega,x)$ par $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(\omega,2^n)\, 1_{2^{n-1}<x\leq 2^n}$.

L'hypothèse (i) devient alors

$$\int_\Omega \sum_{n\geq 0} 2^{-np}\, \Phi(\omega,2^n)\; \mu(d\omega) < \infty .$$

Soit j^{-1} l'isomorphisme d'algèbres de $C(K) \to L^{\infty}(\Omega,\mu)$, (K étant l'espace des caractères de $L^{\infty}(\Omega,\mu)$).

L'application $h \to \int_\Omega j^{-1}h(\omega)\, \mu(d\omega)$ se prolonge en une mesure $\tilde{\mu}$ sur K

de même masse que μ.

j étant positif se prolonge en un homomorphisme d'algèbres de $L_o(\Omega,\mu) \to L_o(K,\tilde{\mu})$ commutant avec la composition des fonctions boréliennes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et vérifiant $\int_K f(t)\, \tilde{\mu}(dt) = \int_\Omega j\, f(\omega)\, \mu(d\omega) \quad \forall f \geq 0$.

On pose alors $\tilde{\Phi}(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} j\, \Phi(.,2^n)\,(t)\; 1_{2^n\leq x<2^{n+1}}$.

On a donc :

$$\tilde{\Phi}(t,2^n) = j\, \Phi(.,2^n)\,(t).$$

Donc

$$\int \sum_{n \geq 0} 2^{-np} \tilde{\Phi}(t,2^n) \tilde{\mu}(dt) < \infty .$$

Donc $\tilde{\Phi}$ satisfait à (i) relativement à $\tilde{\mu}$.

Par ailleurs,

$$\tilde{\Phi}(t,|j f(t)|) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} j \Phi(.,2^n)(t) \, 1_{2^n \leq |j f(t)| < 2^{n+1}}$$

$$= j \Phi(.,|f(.)|).$$

Donc j est une isométrie de $L(\Omega,\Phi,\mu)$ dans $L(K,\tilde{\Phi},\tilde{\mu})$.

On peut donc remplacer dans la factorisation $L^\infty(\Omega,\mu)$ par $C(K)$ et $L(\Omega,\Phi,\mu))$ par $L(K,\tilde{\Phi},\tilde{\mu})$.

C'est ce que l'on va supposer dans la suite.

2) La factorisation se traduit donc ainsi :

Il existe $b > 0$, $d > 0$ tels que $\forall\, x \in E$:

$$\int_K \tilde{\Phi}(t,|u\,x(t)|) \tilde{\mu}(dt) \leq d \Rightarrow \|T x\| \leq b .$$

Donc $1_{\|T x\| > b} \leq \frac{1}{d} \int_K \tilde{\Phi}(t,|u\,x(t)|) \tilde{\mu}(dt)$.

Posant $g(t,u) = \tilde{\Phi}(t,2^{n+1}) - \tilde{\Phi}(t,2^n)$, on peut écrire

$$\tilde{\Phi}(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(t,n) \, 1_{x > 2^n} .$$

La condition (i) se traduit par :

$$\int_K \tilde{\Phi}(t,2^k) \mu(dt) < \infty \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

et $$\int \sum_{n \geq k} 2^{-np} g(t,u) \tilde{\mu}(dt) < \infty \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} .$$

On a donc : $\forall\, x \in E$

$$1_{\|T x\| > b} \leq \frac{1}{d} \int_K \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-np} g(t,n) \, 2^{np} \, 1_{|ux(t)| > 2^n} \tilde{\mu}(dt)$$

$$\leq \frac{1}{d} \left[\int_K \tilde{\Phi}(t,2^k) \tilde{\mu}(dt) + \int_K \sum_{n \geq k} 2^{-np} g(t,u) \, 2^{np} 1_{|ux(t)| > 2^n} \tilde{\mu}(dt) \right.$$

On choisit k de façon que $\int_K \widetilde{\Phi}(t,2^k)\ \widetilde{\mu}(dt) < \frac{d}{2}$, et on trouve :

$$1_{\|Tx\|>b} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{d} \int_K \sum_{n\geq k} 2^{-np}\ g(t,n)\ 2^{np}\ 1_{|ux(t)|>2^n}\ \widetilde{\mu}(dt) .$$

Soit $m \in \mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_m \in E$, $\lambda_1,\dots,\lambda_m > 0$, on a donc :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i\ 1_{\|Tx_i\|>b} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i + \frac{1}{d} \int_K \sum_{n\geq k} \Big(\sum_{i=1}^m 2^{np}\lambda_i\ 1_{|ux_i(t)|>2^n}\Big)\ 2^{-np} g(t,n)\ \widetilde{\mu}(dt)$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i + \frac{\alpha}{d} \sup_{t\in K}\ \sup_{n\geq k} \sum_{i=1}^m 2^{np}\lambda_i\ 1_{|ux_i(t)|>2^n}$$

$(\alpha = \int \sum_{n\geq k} 2^{-np}\ g(t,n)\ \widetilde{\mu}(dt))$.

Or $|ux_i(t)| = |<x_i, {}^tu\ \varepsilon_t>|$. Posant $\beta = \|{}^tu\|$, on trouve

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i\ 1_{\|Tx_i\|>b} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i + \frac{\alpha}{d} \sup_{\xi\in B}\ \sup_{y>0}\ y^p \sum_{i=1}^m \lambda_i\ 1_{|\beta<x_i,\xi>|>y}$$

ce qui établit la proposition.

<u>Remarque</u> : Il est en fait inutile de supposer $\mu(\Omega) < \infty$. En effet, soit μ tel que $\mu(\Omega) = \infty$ et $\Phi : (\omega,x) \to \Phi(\omega,x)$.
Soit g tel que $\int_\Omega g(\omega)\ \mu(d\omega) < \infty$, $g > 0$ μ p s.
On pose alors $\mu_1(d\omega) = g(\omega)\ \mu(d\omega)$ et $\Phi_1(\omega,x) = \frac{1}{g(\omega)}\ \Phi(\omega,x)$,

on a alors

$$\mu_1(\Omega) < \infty\ ,\ \mu(\Omega) = \infty\ ,\ L(\Omega,\Phi,\mu) = L(\Omega,\Phi_1,\mu_1)$$

$$\int_\Omega \Big(\int_1^\infty \frac{\Phi(\omega,x)}{x^{p+1}}\ dx\Big)\ \mu(d\omega) = \int_\Omega \Big(\int_1^\infty \frac{\Phi_1(\omega,x)}{x^{p+1}}\ dx\Big)\ \mu_1(d\omega) .$$

<u>Corollaire</u> : Le résultat de la proposition 3 vaut encore si on ne fait aucune hypothèse sur $\int_\Omega \Big(\int_1^\infty \frac{\Phi(\omega,x)}{x^{p+1}}\ dx\Big)\ \mu(d\omega)$ mais que v est un opéra-

teur de multiplication par une fonction h vérifiant :

$$\int_\Omega |h(\omega)|^p \left(\int_{|h(\omega)|}^\infty \frac{\Phi(\omega,x)}{x^{p+1}}\, dx\right) \mu(d\omega) < \infty$$

et $h \in L(\Omega,\Phi,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : On factorise l'application $v : f \to hf$ de $L^\infty(\Omega,\mu)$ dans $L(\Omega,\Phi,\mu)$ de la façon suivante :

$$L^\infty(\Omega,\mu) \xrightarrow{v_1} \{f \mid hf \in L(\Omega,\Phi,\mu)\} = G \xrightarrow{v_2} L(\Omega,\Phi,\mu)$$

où v_1 est l'injection naturelle et v_2 la multiplication par h (qui est d'ailleurs une isométrie de G dans $L(\Omega,\Phi,\mu)$).
Posons $\Phi_1(\omega,x) = \Phi(\omega,|h(\omega)|\, x)$.
On a

$$f \in G \Leftrightarrow \exists\, a > 0 \text{ tel que } \int \Phi\left(\omega,\left|\frac{h(\omega)\ f(\omega)}{a}\right|\right) \mu(d\omega) < \infty$$

$$\Leftrightarrow \exists\, a > 0 \text{ tel que } \int \Phi_1\left(\omega,\left|\frac{f(\omega)}{a}\right|\right) \mu(d\omega) < \infty .$$

Donc $G = L(\Omega,\Phi_1,\mu)$. De plus

$$\int_\Omega \left(\int_1^\infty \frac{\Phi_1(\omega,x)}{x^{p+1}}\, dx\right) \mu(d\omega) = \int_\Omega |h(\omega)|^p \left(\int_{|h(\omega)|}^\infty \frac{\Phi(\omega,x)}{x^{p+1}}\, dx\right) \mu(d\omega) < \infty .$$

On est ramené aux conditions de la proposition 3.

<u>Exemple</u> : Soit $q \in]p,\infty]$ et $\alpha \in l_p$. Alors l'application diagonale $l^\infty \xrightarrow{\alpha} l_q$ satisfait aux conditions du corollaire et est donc Λ_p-sommante.

<u>Démonstration</u> : En effet, l_q peut être défini par $\Phi(x) = 1 \wedge x^q$ et $\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_i$.

On a $\Phi \in \mathcal{Y}_p$ c'est-à-dire $\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x^{p+1}} dx < \infty$.

Donc $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\alpha_1|^p \int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x^{p+1}} dx < \infty$, c'est le résultat

(si $q = \infty$, $1 \wedge x^\infty = 1_{x>1}$).

<u>Remarque</u> : La démonstration du corollaire montre qu'en réalité :

$$\int_\Omega |h(\omega)|^p \left(\int_{|h(\omega)|}^\infty \frac{\Phi(\omega,x)}{x^{p+1}} dx\right) \mu(d\omega) < \infty \Rightarrow h \in L(\Omega,\Phi,\mu).$$

<u>Proposition 4</u> : Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré sans atome et soit $p > 1$.
Soit $\Phi : (\omega,x) \to \Phi(\omega,x)$ telle que $x \to \Phi(\omega,x)$ appartient à $\mathcal{Y}$ $\forall \omega$.
On suppose que $L(\Omega,\Phi,\mu)$ est quasi normé, contient $L^\infty(\Omega,\mu)$ et que l'injection $L^\infty(\Omega,\mu) \to L(\Omega,\Phi,\mu)$ est Λ_p-sommante.

Alors $\int_\Omega \left(\int_1^\infty \frac{\Phi(\omega,x)}{x^{p+1}} dx\right) \mu(d\omega) < \infty$.

<u>Démonstration</u> : 1) On suppose μ de masse totale = 1, (car on sait qu'on peut toujours s'y ramener).
Utilisant l'homomorphisme d'algèbre de la proposition 3, on peut supposer que $\Omega = K$ compact et remplacer L^∞ par $C(K)$.
Comme on l'a remarqué après la proposition 2, l'injection de $C(K)$ dans $L(K,\Phi,\mu)$ se factorise ainsi :

$$C(K) \xrightarrow{v_1} L(K,\Phi_1,\mu_1) \xrightarrow{v_2} L(K,\Phi,\mu)$$

v_1 est l'injection naturelle, de même que $v_2 \circ v_1$.

Donc $L(K,\Phi_1,\mu_1) \subset L(K,\Phi,\mu)$.
De plus, on a $\int_K \left(\int_0^\infty \frac{\Phi_1(t,x)}{x^{p+1}} dx\right) \mu_1(dt) < \infty$ et μ_1 est sans atome.

D'autre part, quitte à remplacer μ et μ_1 par $\frac{\mu+\mu_1}{2}$ et à changer Φ et Φ_1 en conséquence, on peut supposer $\mu = \mu_1$.

Il faut noter que ces changements successifs de mesure n'altèrent pas les quantités du type $\int_\Omega \left(\int_1^\infty \frac{\Phi(\omega,x)}{x^{p+1}}\,dx\right)\mu(d\omega)$ ni la non-atomicité.

2) On va montrer que si μ est sans atome

$$L^\infty(K,\mu) \subset L(K,\Phi_1,\mu) \subset L(K,\Phi,\mu)$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, c \in L^1(\mu) \quad \text{et } a,\alpha > 0 \quad \text{tels que} \quad \forall\, (t,x) \in K \times [0,\infty[$$

$$\Phi(t,x) \leq \alpha\, \Phi_1(t,\tfrac{x}{a}) + c(t) \; .$$

<u>Démonstration</u> : L'hypothèse se traduit ainsi (par le graphe fermé), il existe a,b,d > 0 tels que : $\forall f \in L^\infty(K,\mu)$

$$\int_K \Phi_1(t,|\tfrac{f(t)}{a}|)\,\mu(dt) \leq b \Rightarrow \int_K \Phi(t,|f(t)|)\,\mu(dt) \leq d \; .$$

On en tire (comme en 4) de la proposition 2) qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_K [\Phi(t,|f(t)|) - \alpha\, \Phi_1(t,|\tfrac{f(t)}{a}|)]\,\mu(dt) \leq d - \alpha b \; .$$

On en tire (par un choix approprié de f) que :

$$c(t) = [\sup_{x>0} (\Phi(t,x) - \alpha\, \Phi_1(t,\tfrac{x}{a}))]^+$$

est μ-intégrable. Ce qui est le résultat.

3) On peut maintenant démontrer la proposition :

on a en effet

$$\int_K \left(\int_1^\infty \frac{\Phi(t,x)}{x^{p+1}}\,dx\right)\mu(dt) \leq \int_K \left(\int_1^\infty \frac{\Phi_1(t,\frac{x}{a})}{x^{p+1}}\,dx\right)\mu(dt) + \int_K c(t)\,\mu(dt \int_1^\infty \frac{dx}{x^{p+1}}$$

$$< +\infty \; .$$

Remarque : Dans le cas où μ est sans atome et où $p > 1$, on a donc caractérisé complètement (à l'aide aussi du corollaire) les opérateurs de multiplication par une fonction h $L^{\infty}_{(\Omega,\mu)} \to L(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ quasi normé qui sont Λ_p-sommants.

***

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. MAUREY : Séminaire Maurey-Schwartz 1973 - 1974 (exposé 1)

[2] L. SCHWARTZ : Séminaire Maurey-Schwartz 1972 - 1973 (exposés 2 et 3).

[3] P. ASSOUAD : Applications sommantes et radonifiantes. Annales de l'Institut Fourier 1972 - tome XXII (fasc. 4).

[4] B. MAUREY : Séminaire Maurey-Schwartz 1973 - 1974 (exposé 10).

[5] L. SCHWARTZ : Séminaire Schwartz 1969 - 1970 (exposés 11 et 12).

****