P. Krée

Exemples d'utilisation de la théorie des applications radonifiantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 9, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A11_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

EXEMPLES D'UTILISATION DE LA THEORIE DES APPLICATIONS RADONIFIANTES

par P. KREE

Exposé N° IX

9 Janvier 1974

Nous allons utiliser les méthodes de la théorie des applications radonifiantes conjointement avec d'autres méthodes : noyaux positifs, théorie du potentiel, filtrage, séries à termes aléatoires, équations aux dérivées partielles en dimension infinie, équations de convolution, équations aux dérivées partielles avec données aléatoires. Ceci va nous conduire à la résolution de certains problèmes, à de nouvelles applications... et à de nouveaux problèmes ! Le texte ci-après présente sans démonstrations certains résultats de [10], [11], à ceci près qu'on a ajouté les notions de mesures $\mathcal{G}$-cylindriques, de mesures $\mathcal{E}$-cylindriques et les points (11),(12), (14), (15), (24). On utilise la théorie des applications radonifiantes telle qu'elle est formulée dans [1], [2], mais aussi sous une forme différente qui est rapidement évoquée au paragraphe 3.

1. Mesures $\mathcal{G}$-cylindriques ; mesures $\mathcal{E}$-cylindriques ; mesures $\mathcal{C}$-cylindriques.

On se place dans la catégorie E V F des espaces vectoriels (réels) faibles. Les objets de E sont des couples ordonnés $X - X'$, $Y - Y'$ ... d'e.v. en dualité séparante ; pour simplifier, les objets de E V F sont notés X,Y,... Les morphismes de E V F sont des applications linéaires faiblement continues $X \to Y$ entre premiers éléments des couples associés aux objets. Soit $\mathcal{G}$ une sous-catégorie de E V F contenant un objet fixé X. Soit $\mathcal{G}^{\circ}$ la catégorie déduite de $\mathcal{G}$ en lui retranchant l'objet X et tous les morphismes de $\mathcal{G}$ de source X.

(1) On fait les hypothèses suivantes sur $\mathcal{G}$ et X.

i) L'intersection des noyaux des morphismes de $\mathcal{G}$ de source X est l'origine de X.

ii) Tout couple G_1, G_2 d'objets de $\mathcal{G}^{\circ}$ admet un produit (G_{12}, π_1, π_2) dans $\mathcal{G}$ et $\ker \pi_1 \cap \ker \pi_2 = 0$.

(2) Définitions complémentaires : Une fonction $\mathcal{G}$-cylindrique φ sur X est une fonction à valeurs réelles sur X, qui s'écrit $\varphi = \widetilde{\varphi} a$, où a est un

morphisme de $\mathcal{G}$ de but $G \in \text{obj}\ \mathcal{G}^\circ$, et où $\tilde{\varphi}$ est une fonction numérique sur G.
Si de plus $\tilde{\varphi}$ est bornée continue, on dit que φ est une fonction $\mathcal{B}^0$-$\mathcal{G}$-cylindrique. Un $\mathcal{G}$-cylindre de X...

(3) Définition d'une mesure $\mathcal{G}$-cylindrique sur X: voir [14].

La donnée d'une mesure $\mathcal{G}$-cylindrique μ sur X est la donnée pour tout morphisme de $\mathcal{G}$: $X \xrightarrow{a} G$, d'une mesure de Radon notée $a(\mu) = a\mu$ sur $G \in \text{obj}\ \mathcal{G}^\circ$, supportée par $\overline{\text{Im}\, a}$, ces données étant astreintes à la condition de compatibilité suivante :

(4) pour tout morphisme $a : X \to G$ de $\mathcal{G}$, tout morphisme $c : G_1 \to G_2$ de $\mathcal{G}^\circ$ est $a(\mu)$-propre (voir [4]) et l'on a $(ca)(\mu) = c\,(a\mu)$.

En fait, $a\mu$ est une mesure de Radon sur $\tilde{G} = \overline{\text{Im}\, a}$. On dit que μ est bornée si de plus $\sup_a \|a\mu\| < \infty$. On dit que μ est une probabilité $\mathcal{G}$-cylindrique si de plus chaque $a\mu$ est une loi de probabilité.

(5) La condition de compatibilité (4) en implique une autre :

Pour des morphismes $a : X \to G_1$, $c : G_1 \to G_2$, posons $b = c\,a$.
Soient $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ les applications $X \to \overline{\text{Im}\, a} = \tilde{G}_1$ et $Y \to \overline{\text{Im}\, b} = \tilde{G}_2$ déduites canoniquement de a et de b respectivement. Soient $\widetilde{a\mu}$ et $\widetilde{b\mu}$ les restrictions de $a\mu$ et de $b\mu$ à $\tilde{G}_1$ et $\tilde{G}_2$ respectivement. Soit $\tilde{c} : \tilde{G}_1 \to \tilde{G}_2$ le prolongement faiblement continu de la restriction de a à Im a.
Alors $\tilde{c}\ \tilde{a}(\mu) = \tilde{b}\mu$.

(6) Mesures $\mathcal{E}$-cylindriques : cas particulier de (3).

On se donne un objet X de EVF et une famille $\mathcal{E} = (A_i)_{i \in I}$ de sous-espaces fermés de X, stable par intersection finie et qui ne contient pas le sous-espace nul. Pour tout i, on pose $X_i = X/A_i$ et l'on note s_i la surjection canonique de X sur X_i. On suppose $\bigcap \ker s_i = 0$. On prend pour $\mathcal{G}$ la catégorie dont les objets sont X et les X_i. Les morphismes de source X sont les s_i. Quels que soient X_i et X_j dans $\mathcal{G}^\circ$, il y a au plus un morphisme $X_i \to X_j$; c'est la surjection canonique définie si $A_i \subset A_j$. Le produit dans $\mathcal{G}$ de X_i et X_j est $X/(A_i \cap A_j)$. En fait, $\mathcal{G}^\circ$ est un système projectif d'e.v.. Ce système est noté $\pi_{\mathcal{E}}$

(7) Cas particuliers de mesures $\mathcal{E}$-cylindriques.

a) $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c(X)$ = la famille des sous-espaces fermés de codimension finie de X. On retrouve le système projectif π_c usuel d'e.v. de dimension finie, et la définition usuelle des probabilités cylindriques.

b) Soit F un objet de EVF et soit E_o un espace topologique où les fonctions numériques continues bornées séparent les points. Par la construction de Stone Cech, E_o se plonge dans un objet E de EVF. On a un plongement de l'ensemble $\mathcal{P}(E_o)$ des probabilités de Radon sur E_o dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des probabilités de Radon sur E. Soit $X = E \times F$. Soit $(B_j)_{j \in J} = \mathcal{E}_c(F)$. En prenant $\mathcal{E} = (E \times B_j)_j$, on trouve les probabilités cylindriques μ sur X, dont la première projection $\pi_1(\mu)$ est de Radon. Si on impose la condition supplémentaire $\pi_1(\mu) \in \mathcal{P}(E_o)$, on obtient les probabilités E_o-cylindriques sur $E_o \times Y$: voir [5].

c) Soient E et F deux objets de EVF. Soit $X = E \otimes F$. Soit $(B_i)_i = \mathcal{E}_c(E)$. Si $\mathcal{E} = (B_i \otimes F)_i$, on retrouve les probabilités F $\otimes$ cylindriques : [9]. Pour simplifier la terminologie, nous dirons que ces probabilités cylindriques sont de Radon en F.

d) Soit $X = l^2 = \{x = \sum_1^\infty x_n e_n$ avec $\sum_\infty x_n^2 < \infty\}$. Soit $\mathcal{E}_v$ la famille des sous-espaces $\{\sum_N^\infty x_n e_n\}$ avec $N = 1, 2, \ldots$ On obtient le système projectif des espaces $l_N^2 = \{\sum_1^{N-1} x_n e_n\}$ et les mesures bornées $\mathcal{E}_v$-cylindriques qui interviennent dans les travaux récents de M. Visik.

e) Soient X et G deux objets de EVF. Soit A un ensemble d'applications linéaires continues $a : X \to G$, tel que $\bigcap \ker a = 0$. En prenant pour $\mathcal{E}$ la famille des intersections finies de noyaux de A, on obtient les mesures A-cylindriques : [10]. Pour toute partie finie J de A, posant X_J sur X_K (si $K \subset J$), on a un système projectif $\pi_A = (X_J, s_{KJ})$.

g) En remplaçant dans e), $\mathcal{E}_c(H)$ par $\mathcal{E}_v(H)$, on définit les mesures $\mathcal{E}_{tv}$-cylindriques.

(8) Remarque.

a) Soit μ une mesure $\mathcal{G}$-cylindrique sur X. La décomposition canonique de tout morphisme a : X → G de $\mathcal{G}$, de source X et de but G dans $\mathcal{G}^{\bullet}$ s'écrit :

$$a \xrightarrow{s_a} X_a = X/\ker a \xrightarrow{\tilde{a}} \overline{\mathrm{Im}\, a} \rightarrow \mathcal{G} \quad . \text{ Soit } a_1 = \tilde{a}\, s_a .$$

Alors (H.ii) entraîne que la famille $\mathcal{E}$ des ker a est stable par intersection finie et vérifie $\cap \ker s_a = 0$. Supposons que pour tout a, il existe une mesure de Radon sur X_a notée $s_a\tilde{\mu}$ telle que $\tilde{a}(s_a\tilde{\mu}) = a\mu$. Alors les mesures $s_a\tilde{\mu}$ définissent une mesure $\mathcal{E}$-cylindrique $\tilde{\mu}$ sur X qui caractérise la mesure $\mathcal{G}$-cylindrique μ de départ. Il en est ainsi lorsque μ est une probabilité cylindrique, ou plus généralement lorsque μ est une mesure A-cylindrique. Dans ce cas, les objets de $\mathcal{G}^{\circ}$ sont les produits finis d'objets isomorphes à G et les morphismes de X vers $\mathcal{G}^{\circ}$ sont les morphismes de type $a_1 \times \dots \times a_n : X \to G^n$, les a_j appartenant à A.

b) Cependant, la méthode ci-dessus ne s'applique pas à une mesure $\mathcal{G}$-cylindrique quelconque car les mesures $s_a\tilde{\mu}$ n'existent pas toujours. On pourra s'en convaincre en prenant X hilbertisable, la probabilité gaussienne canonique sur X, et $\mathcal{G}$ la catégorie déduite de la catégorie des espaces de Hilbert en remplaçant les flèches de source X et de but dans $\mathcal{G}^{\bullet}$ par les opérateurs de Hilbert Schmidt.

c) Plus généralement la théorie des applications p-radonifiantes permet de construire une mesure $\mathcal{G}$-cylindrique en partant d'une probabilité cylindrique μ. Un intérêt immédiat d'une telle construction est le prolongement de la fonction additive d'ensembles et de la fonctionnelle linéaire associée à μ.

(9) Supporteur d'une mesure $\mathcal{G}$-cylindrique μ.

On dit que μ admet un convexe fermé K de X comme supporteur si pour tout a, $a\mu$ est supportée par $\overline{a(K)}$.

(10) Transformation de Fourier des mesures $\mathcal{G}$-cylindriques bornées.

On définit d'abord Ξ, limite inductive des $a_1'((\overline{\mathrm{Im}\,a})')$. La condition (H_i) entraîne que c'est un sous-espace dense de X'. Les transformées de Fourier des mesures $a_i(\mu)$ définissent par raccor dement une fonction $\hat{\mu}(\xi)$ sur Ξ dont la restriction à chaque $(\overline{\mathrm{Im}\,a})'$ est continue. Réciproquement... Par exemple la fonction $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + i\ \xi_n)^{-1}$ est la transformée de Fourier d'une mesure $\mathcal{E}_v$-cylindrique sur l^2.

Faute d'espace temps, nous ne détaillons pas les opérations usuelles sur les mesures $\mathcal{G}$-cylindriques, sur les mesures $\mathcal{E}$-cylindriques et sur les mesures $\mathcal{O}$-cylindriquues : image par une application linéaire, produit tensoriel, convolution.

(11) Signalons que dans le cas particulier où les éléments de $\mathcal{E}$ sont des espaces vectoriels de codimension finie, on peut remplacer dans la définition des mesures $\mathcal{E}$-cylindriques les $s_i\mu$ par des distributions : voir [12], [14]. On définit naturellement les opérateurs différentiels paraboliques (resp. hyperboliques) à coefficients constants sur $\mathbb{R} \times H$. En utilisant la transformation de Laplace pour les distributions $\mathcal{E}_t$-cylindriques sur $\mathbb{R} \times H$ admettant $\overline{\mathbb{R}^+} \times H$ comme supporteur , on voit immédiatement que ces opérateurs admettent des solutions élémentaires dans les distributions $\mathcal{E}_t$-cylindriques.

(12) Processus linéaire associé à un ensemble compatible de v.a.

Soit $(X,\mathcal{E})$ un couple comme ci-dessus. Soit P une probabilité de Radon sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de l'espace topologique Ω. A tout quotient X_i de X par un élément A_i de $\mathcal{E}$, on associe une variable aléatoire f, ou classe d'équivalence d'applications P-Lusin mesurables de Ω dans X_i. Les f_i sont compatibles si pour tout morphisme $s_{ij} : X_i \to X_j$ on a $f_i = s_{ij} f_i$. Si les f_i sont compatibles, les probabilités $f_i(P)$ définissent une probabilité $\mathcal{E}$-cylindrique μ sur X. La réciproque est vraie. De même le théorème [1] XII.2.1. s'adapte à ce cas. A la variable aléatoire f_i est associé le processus linéaire R_i

$$(13)\qquad \begin{array}{ccc} X'_i & \to & L^o(\Omega) \\ \xi & \to & \xi f_i \end{array}$$

Par raccordement, les processus R_i associés à un ensemble compatible $(f_i)_i$ de v.a. définissent un processus linéaire R basé sur Ξ. Dans les cas particuliers (7) a,b et c on retrouve ainsi les processus linéaires usuels, les processus E_o-linéaires de [5], les processus linéaires vectoriels de [9]. Si dans ce qui précède on remplace P par une mesure bornée P' sur Ω, les mesures bornées $f_i(P')$ définissent une mesure $\mathcal{E}$-cylindrique bornée sur X, et on écrira que R est un "processus" linéaire.

(14) Exemple ; Potentiels de Gauss-Bessel sur un espace de Hilbert H.

Soit $1 \leq p \leq \infty$. A toute $f \in L^p(\Omega)$ associons $P' = f\,dP$. Les "v-a".f_i définissent une mesure $\mathcal{E}$-cylindrique bornée sur X que l'on peut noter $f\,d\mu$. Lorsque f décrit $L^p(\Omega)$, les $f\,d\mu$ décrivent un espace de Banach $K^o_\mu(X)$. Dans le cas particulier où μ est la probabilité gaussienne canonique sur H, en convolant les éléments de $K^o_\mu(H)$ avec la distribution cylindrique intégrable G_s (s réel quelconque) de transformée de Fourier $(1+\|h\|^2)^{-s/2}$, on obtient un espace des distributions cylindriques intégrables. D'où une dé finition possible (parmi d'autres) des potentiels de Gauss Bessel.

(15) Lemme de densité cylindrique utilisé dans (24), [13], [14].

Les données sont celles de (12), les f_i étant compatibles. Soit $1 \leq p < \infty$. Pour tout i, on donne un e.v. Φ_i de fonctions numériques sur X_i. On suppose :

- Pour tout i, Φ_i est une partie partout dense de $L^p_{\mu_i}$.
- Pour tout $\varphi_j \in \Phi_j$, et toute surjection canonique s_{ij} de X_i sur X_j, $\varphi_j s_{ij} \in \Phi_i$.

On pose $\mathfrak{F}_i = \{\varphi_i f_i, \varphi_i \in \Phi_i\}$ et $\mathfrak{F} = \bigcup \Phi_i$. Soit $\mathcal{B}'$ la plus petite tribu sur Ω rendant mesurables les $R\xi$, ξ décrivant $\bigcup X'_i$ et contenant les parties P-négligeables. Alors $\mathfrak{F}$ est dense dans $L^p(\Omega')$.

2. Utilisation en filtrage.

Je rappelle d'abord comment intervient la théorie des noyaux positifs dans l'étude des processus linéaires. Soit $(\Omega,\mathcal{B},P)$ un espace probabilisé, où P est de Radon sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de Ω. Soit X - U un couple d'e.v. (réels) en dualité séparante. Soit R une application linéaire faiblement continue de U dans $L^2(\Omega)$: c'est un processus linéaire basé sur U. Le noyau positif C_R de U vers X, ou opérateur de corrélation de R est tel que :

(16) $$\forall\, u_1\ ,\ u_2 \in U \qquad (C_R u_1, u_2) \ = \ \mathcal{E}\,[(Ru_1)(Ru_2)]\ .$$

C_R est injectif si et seulement si R est injectif. Dans ce cas, on introduit le complété G_R de U pour le produit scalaire $< u_1,u_2 > = (C_R u_1,u_2)$. On peut remplacer R par l'injection i_R de U dans G_R. S'il existe sur X une topologie localement convexe quasi complète séparée compatible avec la dualité avec U, alors i_R est faiblement continue ; donc elle admet une transposée injective i'_R de $H_R = (G_R)'$ dans X. On obtient ainsi le sous-espace hilbertien associé à C_R.

La relation d'ordre entre les noyaux positifs est notée <<.

Considérons deux couples X - U, Y - U d'e.v. en dualité séparante et supposons qu'il existe sur X et Y des topologies localement convexes séparées quasi complètes compatibles avec les dualités , avec U et V respectivement. Soient $R : U \to L^2(\Omega)$ et $S : V \to L^2(\Omega)$ deux processus linéaires faiblement continus. Notons T le processus linéaire basé sur $W = U \oplus V$ tel que $T(u \oplus v) = Ru + Sv$. Alors Corr T = C_T est un noyau positif de W vers $Z = X \oplus Y$, et ce noyau positif admet la décomposition par blocs $\begin{pmatrix} C_R & C_{RS} \\ C_{SR} & C_T \end{pmatrix}$.

(17) <u>Problème n^o 0</u> : voir [7],[8],[11].

Trouver une classe $(\mathcal{A})$ d'opérateurs linéaires n.n.e. (A) de V vers U, à domaine dense dans V et un élément (A_o) de $(\mathcal{Q})$ tels que :

- $\forall$ $(A) \in (\mathcal{Q})$, RA admet un prolongement faiblement continu $\overline{RA} : V \to L^2(\Omega)$.
- Pour tout (A) de $\mathcal{Q}$, Corr $(S - \overline{RA_o}) << \text{Corr}\,(S - RA)$. C'est le problème de l'approximation linéaire optimale de S à l'aide de R, et (A_o) est l'opérateur d'approximation optimale.

(18) Solution du problème n°0.

On suppose C_R injectif et $\mathop{|}\limits_{\circ} = \{v \in V \quad C_{RS} v \in \text{Im}\, C_R\}$ dense dans V. Soit $(\mathcal{Q})$ l'ensemble des opérateurs (A) de V dans U tels que $\mathop{|}\limits_{\circ} \cap D_A$ soit dense dans V et tels que RA admette un prolongement faiblement continu. Alors $D_{A_o} = \mathop{|}\limits_{\circ}$ et $A_o = C_R^{-1}\, C_{RS}$.

En fait pour tout v dans D_{A_o}, $R A_o v$ est tout simplement la projection orthogonale de Sv sur le sous-espace $\text{Im}\, R$ de $L^2(\Omega)$; ce qui explique pourquoi $u = A_o v$ est l'unique point de U où la forme quadratique $u \to (C_T(u \oplus -v), u \oplus -v)$ atteint son minimum ; d'où une relation avec le balayage pour une certaine théorie du potentiel. Notons que $\text{Im}\, R$ n'est pas forcément un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$ et par conséquent l'existence d'une projection orthogonale de Sv sur ce sous-espace n'est pas triviale. Dans le cas simple où U et V sont hilbertisables et où C_R est bijectif, la solution du problème n°0 est triviale parce qu'alors $\text{Im}\, R$ est fermé.

(19) Exemple de problème d'estimation.

Soit G_s la distribution sur $\mathbb{R}^n$ de transformée de Fourier $(1 + \|\xi\|^2)^{-s/2}$ avec $\|\xi\|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$. Soit $t = (t_1, t_2, t_3)$ le point générique de $\mathbb{R}^3$. Soit $(X_t)_t$ un champ aléatoire sur $\mathbb{R}^3$, gaussien centré d'opérateur de corrélation G_4*, représenté par un processus linéaire gaussien centré M basé sur $H^{-2}(\mathbb{R}^3)$, j'observe ce champ sur un ouvert très régulier borné O de $\mathbb{R}^3$, et je cherche à en déduire une estimation du champ au point a fixé dans $\mathbb{R}^3 \setminus O$.
Pour essayer de résoudre ce problème, j'introduis les injections i_1 et i_2 de $U = \overset{\circ}{H}{}^{-2}(\bar{O})$ et $V = \mathbb{R}\, \delta_a$ dans $H^{-2}(\mathbb{R}^3)$ et les processus linéaires $R = Mi_1$

$S = M\, i_2$ et j'applique (18) dans le cas simple. L'opérateur C_T est l'opérateur qui à une charge $w = u \oplus \lambda.\delta_a$ dans $U \oplus V$ fait correspondre la restriction de son potentiel $G_4{}^* w$ à $O \cup \{a\}$. L'opérateur (A_o) est l'opérateur de balayage des mesures $\lambda\delta a$ sur le fermé $\overline{O}$. On aimerait prendre pour opérateur d'estimation de X_a à l'aide d'une trajectoire de R, le transposé de A_o : $H^2(O) \to \mathbb{R}$. Ceci n'est pas possible car presque sûrement les trajectoires de R n'appartiennent pas à $H^2(O)$. Il se pose donc en mathématiques appliquées le problème suivant (voir par exemple [3], p.112, remarque 5.2 et p.328, problèmes 5 et 6) :

(20) Problème n°1 de l'estimation linéaire optimale des trajectoires.

On se donne deux couples $X_1 - U_1$ et $Y_1 - U_1$ d'e.v. et deux processus linéaires R_1 et S_1 basés sur U_1 et V_1 faiblement continus à valeurs dans $L^2(\Omega)$, qui sont décomposés par des variables aléatoires à valeurs dans X_1 et Y_1 respectivement. Trouver une classe $(\mathcal{E})$ d'opérateurs linéaires n.n.c. $(E) : X_1 \to Y_1$ et (E_o) dans cette classe, dit opérateur d'estimation linéaire optimale, tels que :

. pour tout (E) dans $(\mathcal{E})$, le processus R,E' admet un prolongement faiblement continu, et il est décomposé par une v.a. à valeur dans Y_1,
. pour tout (E) dans $(\mathcal{E})$; Corr $(S_1 - R_1E'_o)$ << Corr $(S_1 - R_1E')$.

(21) Solution du problème n°1.

Une solution générale s'obtient en "transposant" la solution du problème n°0 : voir [7], § 2. Une méthode plus explicite consiste à partir de la solution du problème n° 0 dans le cas simple, à remplacer R et S par des processus linéaires R_1 et S_1, en introduisant des applications radonifiantes et en utilisant des propriétés de régularité de l'équation intégrale $C_R u = C_{RS} v$: voir [11]. Par exemple dans l'exemple ci-dessus, les travaux de Visik Eskin sur les équations de convolution montrent que $A_o\delta_a$ est la somme d'une couche et d'une double couche étalées sur ∂O, de densité $\mathcal{C}^\infty$. D'où une injection i_1 dans U de l'espace $U_1 \sim \mathcal{C}^\infty(\partial O)^2$ formé par ces distributions. Je peux donc remplacer R par le processus $R_1 = Ri_1$ basé sur U_1. Le nouvel opérateur d'approximation optimale A_o^1 est tel que $A_o = i_1A_o^1$.

Vue la théorie des applications radonifiantes, ou le théorème de Minlos, les trajectoires de R_1 appartiennent presque sûrement à U_1'. Le transposé de A_o^1 est l'opérateur d'estimation optimale. Dans l'exemple étudié dans [8], on procède de même en considérant l'injection i_1 de l'ensemble U_1 des mesures de Radon sur $J = [-1,0]$ dans $\overset{o}{H}{}^{-1}(\mathbb{R}^-)$. En effet, la transposée de i, et l'application p-radonifiante $\varphi \to \varphi \mid J$ de $H^1(\mathbb{R}^-)$ dans $\mathcal{C}^0(J)$.

(22) Notons que l'équation intégrale $C_R u = C_{RS} v$ est une équation intégrale variationnelle au sens de [6]. Elle donne donc lieu à des inéquations variationnelles. Ces inéquations variationnelles correspondent en pratique à des problèmes d'approximation ou de filtrage avec contrainte comme on en rencontre par exemple dans la théorie du filtre adapté.

(23) Problème 2 du filtrage non linéaire ou de l'estimation non linéaire.

Voir par exemple [3] p. 320, problème 15. Pour tout v dans D_{A_o}, nous avons projeté Sv sur le sous-espace de $L^2(\Omega)$ engendré par les v.a. Ru, u décrivant U. Le problème du filtrage non linéaire conduit à rechercher l'espérance conditionnelle de Sv par rapport à la tribu $\mathcal{B}'$ engendrée par les variables Ru, c'est-à-dire à rechercher la projection orthogonale de Sv sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}', P)$.

(24) Principe de la solution du problème n°2.

On suppose R tel que l'on puisse lui appliquer (15), où pour tout i, Φ_i est l'espace des fonctions polynomiales sur X_i. On peut se ramener au cas linéaire en remplaçant R par le processus linéaire R_2 basé sur $V_2 = \overset{\infty}{\underset{o}{\oplus}} (\underset{n}{\odot} U)$ et dont la restriction au produit tensoriel symétrique $\underset{n}{\odot} U$ coïncide avec le produit tensoriel symétrique $\underset{n}{\odot} R$ (voir [9] pour la définition de $\underset{n}{\otimes} R$) ou avec son renormalisé : $\underset{n}{\odot} R$:

3. Application (A-p)-sommantes. Applications (A-p)-radonifiantes.

On se limite ici au cas particulier (7.f).

(25) Définition.

Soit B une partie de A munie d'une topologie d'espace compact ; si en particulier, A est défini canoniquement à l'aide du dual d'une e.v.n. U, on définit B à l'aide de la boule unité de U' faible. On suppose que pour tout x de X, l'application $b \to b(x)$ est continue de B à valeurs dans l'espace quasi-normé G. Soit $p > 0$. Une application linéaire u de X dans l'espace quasi-normé Y est dite (A-p)-sommante si :

(26) $$\exists\, C > 0 \qquad \forall\, x_1 \dots x_n \qquad \Sigma \|u(x_i)\|^p \leq C^p \sup_{b \in B} \Sigma \|b(x_i)\|^p .$$

On dit qu'une probabilité A-cylindrique m sur X est de type A-p si $\|m\|_p^A = \sup_{b \in B} (\int \|g\|^p \, d(b(m))(g))^{1/p} < \infty$.

(27) Définitions équivalentes : Il existe une constante C finie telle que pour toute loi de probabilité simple μ sur X (c'est-à-dire somme finie de masses de Dirac sur X), on a

(27') $$\|u(\mu)\|_p \leq C \|\mu\|_p^A .$$

Ces définitions étant posées, il apparaît que la théorie des applications p-sommantes de Pietsch et la théorie des applications p-radonifiantes de L. Schwartz [1] peuvent être reformulées dans ce cadre : on montre par exemple l'existence d'une mesure de Pietsch, la factorisation des applications (A-p)-sommantes, le théorème de dualité de L. Schwartz.
De même que le prototype des applications p-sommantes est l'injection γ_o de $\mathcal{C}^o$ dans L^p, le prototype des applications (A-p)-sommantes est l'injection $\vec{\gamma}_o$ de $\mathcal{C}^o(I,B)$ dans $L^p(\mu,B)$ où μ est une probabilité sur la tribu de l'espace complètement régulier I, où B est un espace de Banach ; A est alors $\mathcal{M} \otimes I_B$ où $\mathcal{M}$ est l'espace des mesures de Radon bornées sur I.

(28) <u>On peut se poser le problème suivant : voir [9]</u>.

On se donne quatre espaces de Banach X, Y, Z et T, deux applications linéaires continues $\alpha : X \to Z$ et $\beta : Y \to T$, une norme θ sur $Z \otimes T$, une norme φ sur $X \otimes Y$. Trouver des conditions suffisantes pour que l'application supposée continue $\alpha \otimes \beta : X \underset{\varphi}{\otimes} Y \to Z \underset{\theta}{\hat{\otimes}} T$ soit p-sommante ou p-radonifiante ? Même problème pour le prolongement supposé continu $\overline{\alpha \otimes \beta}$ de $\overline{\alpha \otimes \beta}$ aux produits tensoriels complétés.

Pour trouver une solution, on considère $\alpha \otimes \beta$ comme la composée des applications linéaires :

$$I_X \otimes \beta : X \otimes Y \to X \otimes T \quad \text{et} \quad \alpha \otimes I_T \ : \ X \otimes T \to Z \underset{\theta}{\otimes} T \ .$$

On cherche à radonifier une probabilité cylindrique μ sur $X \otimes Y$ en deux étapes. Notons d'ailleurs que si $\varphi = \varepsilon$, si β est p-sommante, et si $\alpha \otimes I_T$ est $(X' \otimes I_T, p)$ sommante, alors $\alpha \otimes \beta$ est p-sommante.

(29) <u>On a donc les deux sous-problèmes suivants</u>.

a) A quelle condition μ est-elle transformée par $I_X \otimes \beta$ en une probabilité cylindrique sur $X \otimes T$ de Radon en T ?

b) Etant donnée une probabilité cylindrique μ_1 sur $X \otimes T$ (resp. sur un complété de $X \otimes T$ relativement à une norme ψ), à quelles conditions μ_1 est-elle transformée par $\alpha \otimes I_T : X \otimes T \to Z \underset{\theta}{\hat{\otimes}} T$ (resp. par son prolongement supposé continu à $X \underset{\psi}{\hat{\otimes}} T$) en une probabilité de Radon ?

Le premier sous-problème relève de la théorie usuelle des applications p-radonifiantes. En termes de processus, dire que $(I_X \otimes \beta)(\mu)$ est de Radon en T signifie que certains processus bilinéaires basés sur $X' \times Y'$, donnent lieu par composition avec le couple $(I_{X'}, \beta')$ à des processus vectoriels à valeurs dans T. Signalons au passage que ce point de vue est commode pour l'étude des séries vectorielles aléatoires.

(30) Application aux séries de vecteurs aléatoires d'un espace de Banach Y

Ces séries sont de la forme $\sum_1^\infty c_n\, y_n\, X_n$ où c_n est une suite de nombres $\in \mathbb{R}^{(N)}$, (y_n) est une suite fixée de vecteurs de Y et (X_n) est une suite fixée de v.a. On introduit le processus bilinéaire B

$$\mathbb{R}^{(N)} \times Y' \to L^o(\Omega)$$

$$(c_n\ ,\ y') \to \sum c_n (y_n, y')\, X_n \quad .$$

Supposons que B admette un prolongement continu :
$\overline{B} : l^{s'} \times Y' \to L^p(\Omega)$ avec $s \geq 1$, $p > 0$, $s'^{-1} + s^{-1} = 1$.
Soit μ la probabilité cylindrique sur $l^s \otimes Y$ associée à l'application linéaire définie sur $l^{s'} \otimes Y'$, canoniquement associée à $\overline{B}$. Soit β une injection p-radonifiante de Y dans un espace de Banach T. Alors le composé de $\overline{B}$ avec $(Id(l^{s'}), \beta')$ est représenté par un processus vectoriel continu $l^s \to L^p(\Omega, T)$.

Le deuxième sous-problème relève de la théorie des applications (A,p)-sommantes. Le théorème [2] III.1.1. donne lieu à l'énoncé suivant.

(31) Proposition

On considère un e.v.f. X muni d'un ensemble $A \in \mathcal{L}(X,G)$ vérifiant les hypothèses précédentes. Soit F un espace de Banach reflexif et u une application linéaire de X dans F qui est (A-p)-sommante. Soit μ une probabilité A-cylindrique sur X dont l'image par u est une probabilité cylindrique sur F : on suppose $y'u \in A$ pour tout $y' \in Y'$. On suppose qu'il existe un filte (μ_j) de probabilités de Radon sur X à support fini tel que $\sup \|\mu_j\|_p^A < \infty$ et tel que $u(\mu_j)$ converge cylindriquement vers $u(\mu)$. Alors $u(\mu)$ est une probabilité de Radon d'ordre p sur F.

La mise en oeuvre de cette proposition **dans le** cas où X est un produit tensoriel complété nécessite des hypothèses techniques. En tout cas, si O est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ l'injection $\vec{\gamma}_o$ de $\mathcal{C}^o(O,B)$ dans $L^p(\mu,B)$ transforme une probabilité $\mathcal{M} \otimes I_B$-cylindrique sur $\mathcal{C}^o(O,B)$ de type $(\mathcal{M} \otimes I_B, p)$ en une probabilité de Radon si B reflexif et $p > 1$.

(32) Applications partiellement radonifiantes entre classes de potentiels de Bessel vectoriels.

Soit B un espace de Banach reflexif. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Pour tout s réel, on pose :

(33) $$W^s = L^{p,s}(\mathbb{R}^n, B) = G_s * L^p(\mathbb{R}^n, B) .$$

On définit $L^{p,s}(O,B)$ comme quotient de W^s par les éléments de W^s supportés par $\mathbb{R}^n \setminus O$. En raisonnant comme dans [1] XIV et [15], on montre la

(34) Proposition

Soit O très régulier borné. On suppose que :

$$\frac{a-d}{n} > \frac{1}{q} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)^+ \qquad p \text{ et } q \in]1,+\infty[\ .$$

Alors l'injection $L^{q,a}(O,B) \hookrightarrow L^{r,d}(O,B)$ transforme une probabilité $(L^{q',-a} \otimes I_B)$-cylindrique de type $(L^{q',-a} \otimes I_B, p)$ en une probabilité de Radon. Dans cet énoncé, l'espace $L^{r,d}(O,B)$ peut être remplacé par $\mathcal{C}^d(O,B)$ si $r = +\infty$ et $0 \leq d < 1$.

4. Application aux équations d'évolution avec données aléatoires décomposées en espace.

Considérons un système physique dont l'état à tout instant $t \geq 0$. est décrit par un vecteur $u(t) \in B$. La fonction u(.) est solution (en un certain sens) du problème de Cauchy:

(35) $$\dot{u}(t) + \Gamma \quad u(t) = f(t) \text{ pour } t \in O =]0,1[\quad ; \quad f \text{ donné}$$
$$u(0) = u_o \text{ donné dans } B$$

où Γ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe d'opérateurs de B.

L'étude de l'existence et de l'unicité de la solution dans le cas déterministe permet en général des espaces de Banach U, U_o et F tels que l'application suivante soit définie et définisse un homéomorphisme

(36)
$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\Phi} & U_o \times F \\ u & \longrightarrow & (u(0), \dot{u} + \Gamma u) . \end{array}$$

Voir [15] pour l'utilisation de Φ dans le cas de données stochastiques (u_o, f). Supposons maintenant que l'entrée stochastique (u_o, f) est décomposée en espace ; c'est-à-dire, par exemple, qu'elle est représentée par une v.a. dans $L^p(\Omega,B)$ et par un processus vectoriel $L^2(I) \to L^p(\Omega,B)$.
Il est naturel de conjecturer, même si Γ est non linéaire et dépend du temps, que, sous des conditions très générales, la solution u est alors représentée par un processus vectoriel $\bar{H}^1(\bar{O}) \to L^p(\Omega,B)$. D'où si $p > 2$ en utilisant (34) des trajectoires presque sûrement höldériennes à valeurs dans B. Nous l'avons démontré si Γ indépendant du temps est le générateur d'un semi-groupe d'opérateurs linéaires continus de B.

****

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. SCHWARTZ : Séminaire à l'Ecole Polytechnique 1970/1971.

[2] B. MAUREY et L. SCHWARTZ : Séminaire 1972/1973 (Ecole Polytechnique).

[3] A. BENSOUSSAN : Filtrage optimal des systèmes linéaires. Dunod 1971.

[4] N. BOURBAKI : Integration. Chapitre 9. Hermann (Paris) 1969.

[5] L. SCHWARTZ : Note non publiée 1971.

P. KREE :

[6] J. Math. pures et appliquées 51 - (1972) p.295-329.

[7] C. R. Acad. Sc. Paris. Décembre 1972.

[8] Exposé au Séminaire Goulaouic-Schwartz 1972/1973 (Ecole Polytechnique).

[9] Exposé au Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971/1972 (Ecole Polytechnique).

[10] Applications patiellement radonifiantes : manuscrit remis à L. Schwartz Octobre 1973.

[11] Approximation optimale des noyaux positifs et construction de champs markoviens (proposé pour publication).

[12] Cours 3^{e} Cycle - Université de Paris . 1973/1974.

[13] Note aux Comptes Rendus- 12 Novembre 1973.

[14] Exposés au Séminaire P. Lelong - Décembre 1973.

[15] Symposia Matematica. Vol.VII diffusé par Academic press (1971).

****