A. Nahoum

Fonctions aléatoires linéaires. Théorème de dualité

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 4, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A4_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, rue DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE MAUREY-SCHWARTZ 1972-1973

FONCTIONS ALEATOIRES LINEAIRES. THEOREME DE DUALITE

par A. NAHOUM

Exposé N° IV

22 Novembre 1972

§ 1. FONCTIONS ALEATOIRES LINEAIRES

Définition 1 : Soit E un espace localement convexe séparé (e.l.c.s), à dual quasi-normé ([2]). Une fonction aléatoire linéaire (f.a.l.) sur E' est la donnée d'un espace topologique séparé Ω, d'une probabilité de Radon μ sur Ω et d'une application linéaire $L : E' \to L^{0}(\Omega,\mu)$ [E e.l.c.s. suffit]. Elle est dite de type p ($0 \leq p \leq +\infty$) si $L(E') \subset L^{p}(\Omega,\mu)$ et si L est continue : $E'_{\|} \to L^{p}(\Omega,\mu)$ [$E'_{\|}$ désigne E' muni de la topologie de la quasi-norme ; si $p = 0$, $L^{0}(\Omega,\mu)$ est muni de la topologie de la convergence en probabilité]. Si $0 < p \leq +\infty$ on note $\|L\|_{p}^{*}$ (p-type de L) la quasi-norme d'opérateur.

2) Relation avec les probabilités cylindriques sur E

a) Une f.a.l. sur E' définit de manière canonique une probabilité cylindrique notée λ^{L} sur E; on a en outre pour $0 \leq p \leq +\infty$, L de type p $\Leftrightarrow$ λ^{L} de type p; si $p \neq 0$ $\|L\|_{p}^{*} = \|\lambda^{L}\|_{p}^{*}$.

. En effet soit W l'ensemble des applications linéaires continues $E \xrightarrow{w} \mathbf{K}^{n}$, avec n variable [$\mathbf{K}$ est le corps des scalaires de E]. Se donner une probabilité cylindrique sur E, c'est se donner pour tout $w \in W$, une probabilité de Radon λ_{w} sur le $\mathbf{K}^{n}$ correspondant, de sorte que pour tout triangle commutatif comme ci-dessous

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{K}^{m} \\ E \arrow[ur, "w_2"] \arrow[dr, "w_1"'] & \\ & \mathbf{K}^{n} \arrow[uu, "\theta \text{ linéaire}"'] \end{tikzcd}$$

on ait $\theta(\lambda_{w_2}) = \lambda_{w_1}$ [vérification facile, à partir de la définition donnée dans [1]].

. Ceci étant, donnons nous L comme au 1), et posons $w \in W$, $w = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ $L(w) = (L(\xi_1),L(\xi_2),\ldots,L(\xi_n))$; puis $\lambda_{w} = L(w)(\mu)$: c'est une probabilité de Radon sur $\mathbf{K}^{n}$ [car $L(w) : \Omega \to \mathbf{K}^{n}$ est Lusin-mesurable]; si $w_2 = \theta \circ w_1$, avec $\theta \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^{n},\mathbf{K}^{m})$ comme ci-dessus, on a $\lambda_{w_2} = L(\theta \circ w_1) = \theta \circ L(w_1)(\mu) = \theta(\lambda_{w_1})$ [puisque, L étant linéaire, "respecte les relations linéaires" du genre $w_2 = \theta(w_1)$, entre suites finies de vecteurs de E']; d'où $\lambda^{L} = (\lambda_{w})_{w \in W}$ est une probabilité cylindrique sur E.

. En outre, si $0 < p < +\infty$, on a pour

$w = \{\xi\}$, $\|\lambda_{\xi}\|_{p}^{p} = \int_{\mathbf{K}} |t|^{p}\, d\lambda_{\xi}(t) = \int |t|^{p}\, dL(\xi)(\mu) = \int |L(\xi)|^{p}\, d\mu$, d'où

$$\|\lambda^L\|_p^* = \sup_{\|\xi\|\le 1} \|\lambda_\xi\|_p = \sup_{\|\xi\|\le 1} \|L(\xi)\|_{L^p(\Omega,\mu)} = \|L\|_p^* \le +\infty$$

(d'où les propriétés de type dans ce cas; vérifications analogues pour $p = +\infty$, et $p = 0$ (en utilisant alors les J_α introduits dans [1])

b) Inversement, si λ est une probabilité cylindrique sur E, nous allons lui associer une (ou plusieurs) f.a.l. sur E', L, de sorte que $\lambda = \lambda^L$.
b_1) Si λ de Radon sur E, on peut prendre $(\Omega,\mu)=(E,\lambda)$, et $L(\xi) = \xi \in L^0(E,\lambda)$: on a bien $\lambda_w = w(\lambda) = L(w)(\lambda)$ $(w \in W)$, par définition.

b_2) Si λ est cylindrique quelconque, on s'appuie sur un cas particulier du théorème de Prokhorov ([3], page I.4, "1er cas"), disant que si (X_i, τ_{ij}) est un système projectif topologique d'espaces compacts, avec $X = \varprojlim(X_i, \tau_{ij})$, et si (μ_i) est un système projectif correspondant de probabilités de Radon, alors la probabilité de Radon $\mu = \varprojlim \mu_i$ existe toujours, sur X [la condition générale (K,ε) du théorème de Prokhorov est ici automatiquement vérifiée].

. On reprend la définition d'une probabilité cylindrique du 2), en modifiant légèrement les notations ; notons K_w l'espace d'arrivée de w, $w \in W$, et notons $w_1 \succ w_2$ s'il existe $\theta : K_{w_1} \to K_{w_2}$ linéaire telle que $w_2 = \theta \circ w_1$: $(K_w)_{w \in W}$ est alors un système projectif d'espaces topologiques, avec pour "transitions" les θ ainsi introduits ; $(\lambda_w)_{w\in W}$ est un système projectif de probabilités de Radon associé.

. Ce qui précède amène à "compactifier la situation" : on remplace K_w par $(K_w)^\vee$, noté $K_w^\vee$, son compactifié de Čech ; les transitions θ par les $\check{\theta}$, leurs extensions naturelles ; et les λ_w par leurs images $\lambda_w^\vee$ par injection canonique $K_w \to K_w^\vee$. On a un nouveau système projectif d'espaces topologiques -maintenant compacts- avec système projectif de probabilités de Radon associé. D'après le résultat indiqué au début, il existe une probabilité de Radon $\bar{\lambda}$ sur $\Omega = \varprojlim (K_w^\vee)$, telle que pour $\bar{w} : \Omega \to K_w^\vee$ projection canonique, on ait $\bar{w}(\bar{\lambda}) = \lambda_w^\vee$; notons que $\bar{w}$ est $\bar{\lambda}$-presque partout à valeurs dans K_w, puisque $\lambda_w^\vee$ est portée par K_w, et soit $\bar{\bar{w}}$ la $\bar{\lambda}$-classe de $\bar{w}$ considérée comme à valeurs dans K_w.

. Alors $L : E' \to L^0(\Omega,\lambda)$ définie par $L(\xi) = \bar{\bar{\xi}}$ convient. En effet $L(\xi)(\bar{\lambda}) = \bar{\bar{\xi}}(\bar{\lambda}) = \lambda_\xi$, $\xi \in E'$; reste à voir que L est linéaire; fixons ξ, $\eta \in E'$, nous allons montrer que $L(\xi + \eta) - L(\xi) - L(\eta) = 0$ [l'homogénéité se montrerait de même]. Pour cela posons $w_1 = (\xi + \eta, \xi, \eta) \in W$ et définissons $\theta : K_{w_1} \to K$ linéaire, par $\theta(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha - \beta - \gamma$. Alors

$w_2 : E \to K = K_{w_2}$ définie par $w_2 = \theta \circ w_1$ est nulle. Donc $\lambda_{w_2} = \theta(\lambda_{w_1}) = \delta$ (mesure de Dirac à l'origine). Donc $\bar{w}_2 = 0$, $\bar{\lambda}$p.p. Or $\bar{w}_2(\omega) = \overline{\xi + \eta}(\omega) - \bar{\xi}(\omega) - \bar{\eta}(\omega)$ pour les $\omega \in \Omega$ tels que les trois termes de cette expression soient dans K_{w_1} lui-même, donc pour $\bar{\lambda}$ presque tous les $\omega \in \Omega$; donc $0 = \bar{\bar{w}}_2 = \overline{\overline{\xi + \eta}} - \bar{\bar{\xi}} - \bar{\bar{\eta}}$ c'est-à-dire $L(\xi+\eta)-L(\xi)-L(\eta) = 0$ comme cherché.

. On a donc : L est une f.a.l. et λ^L et λ, ayant les mêmes marges scalaires ($\forall\ \xi \in E'$, $\lambda^L_\xi = \lambda_\xi$) sont égales([1]).

c) Mais L construite au b) n'est pas canonique ; nous dirons que deux f.a.l. sur E' : $L_1 : E' \to L^0(\Omega_1\mu_1)$ et $L_2 : E' \to L^0(\Omega_2\mu_2)$ sont <u>isonomes</u> (même loi) si elles définissent la même probabilité cylindrique λ sur E; c'est-à-dire si pour tout $w \in W$ on a $L_1(w)(\mu_1) = L_2(w)(\mu_2)$. Le type est alors le même d'après a) . En résumé,

<u>Théorème 2</u> : Il y a une bijection entre l'ensemble des probabilités cylindriques (resp de type p) sur E et l'ensemble des classes d'isonomie de f.a.l. (resp de type p) sur E' ($0 \leq p \leq +\infty$).

3) <u>Remarques</u> :

a) si $u : E \to F$ est linéaire faiblement continue et si $L : E' \to L^0(\Omega,\mu)$ est une f.a.l. sur E' on a $u(\lambda^L) = \lambda^{L \circ {}^t u}$

b)On peut définir la transformée de Fourier de la f.a.l. $L : E' \to L^0(\Omega,\mu)$ pour $\mathcal{F}L(\xi) = \int \exp iL(\xi)(\omega)d\mu(\omega)$. Alors $\mathcal{F}L = \mathcal{F}(\lambda^L)$

c) Soit $L : E' \to L^p(\Omega,\mu)$ une f.a.l. de type p, et soient $L_i : E' \to L^p(\Omega,\mu)$ continues pour $\sigma(E',E)$ de rang fini équicontinuespour la quasi-norme de E' et convergeant simplement vers L. Alors (λ^{L_i}) est un ensemble de probabilités de Radon sur des sous-espaces de dimension finie de E de type p uniforme, et convergeant cylindriquement vers λ^L : donc λ^L est de type p-approximable. Mais la réciproque est en général inexacte, car si $(\lambda_i) \to \lambda^L$ on ne peut pas toujours les représenter à partir de $L^0(\Omega,\mu)$. On a ici un exemple des inconvénients de la non canonicité (2) c)).

d) On peut introduire aussi des f a.l. "abstraites" : si $(\Omega\ \mathcal{A}\ P)$ est un espace de probabilité, soit $L^0(\Omega\,\mathcal{A}\,P)$ l'espace des applications $\Omega \to \mathbf{K}$ mesurables pour les tribus : $\mathcal{A}$, et tribu borélienne de $\mathbf{K}$. Alors $L : E' \to L^0(\Omega\,\mathcal{A}\,P)$ linéaire définit encore une probabilité cylindrique sur E, (car pour $w \in W$, $L(w)(P)$ mesure borélienne sur $\mathbf{K}^n$, est automatiquement de Radon). Considérons par exemple $\Omega = E'^*$, complété faible de E, et soit $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par les $w \in W$. On sait que E'^* s'identifie à un espace $\mathbf{K}^I$ et dans cette identification $\mathcal{A}$ devient la tribu

$\mathcal{B}^I$, où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de $\mathbf{K}$ (cette tribu est en général plus petite que la tribu borélienne de $\mathbf{K}^I$!) Si λ est une probabilité cylindrique sur E, elle définit un système projectif sur les produits finis $\mathbf{K}^J$, $J \subset I$. D'après un théorème de Kolmogoroff, ce système admet une limite P sur $(\mathbf{K}^I, \mathcal{B}^I) = (E'^*, \mathcal{C})$. Si nous posons

$$L(\xi) = \xi \in L^0(E'^*, \mathcal{C}, P) \text{ on a bien } \lambda = \lambda^L.$$

4) <u>f.a.l. et probabilités de Radon</u>

Soit λ une probabilité cylindrique sur E, EVT séparé par son dual, représentée par une f.a.l., L. Y-a-t-il une propriété de L assurant que λ est de Radon sur E ?

a) <u>Remarque</u> : Si $L : E' \to L^0(\Omega, \mu)$, il existe une fonction $\Omega \xrightarrow{\varphi} E'^*$ définie à l'équivalence scalaire μ presque sûre près, scalairement μ mesurable et telle que : $\forall \xi \in E'$ $L(\xi)(\omega) = \langle \xi, \varphi(\omega) \rangle$, μ p.p.

De sorte que $\forall \xi \in E'$, $\lambda_\xi = \xi \circ \varphi(\mu)$. En effet, soit $(\xi_i)_{i \in I}$ une base algébrique de E'; et pour $i \in I$ définissons de manière quelconque $\mathcal{L}(\xi_i) \in L(\xi_i)$ (c'est une vraie fonction, non une classe); si $\xi = \sum_{i \in I} \alpha_i \xi_i$, somme à support fini, posons, pour $\omega \in \Omega$, $\mathcal{L}(\xi)(\omega) = \sum_I \alpha_i \mathcal{L}(\xi_i)(\omega)$; enfin si $w = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \in E'^n$, posons $\mathcal{L}(w) = (\mathcal{L}(\xi^a))_{1 \le a \le n}$. Nous définissons ainsi un système projectif d'applications $\Omega \to \mathbf{K}^n$, d'où une application $\mathcal{C} : \Omega \to \varprojlim (\mathbf{K}^n, w) = E'^*$. Les autres propriétés sont évidentes.

b) Si l'on peut choisir φ dans sa classe de sorte que $\varphi(\Omega) \subset E$, et $\varphi : \Omega \to E$ μ-mesurable Lusin (pas seulement scalairement) alors $\lambda = \lambda^L$ est de Radon. En effet $\lambda' = \varphi(\mu)$ est de Radon sur E, et $\forall \xi \in E'$, $\lambda'_\xi = \xi(\varphi(\mu)) = \lambda_\xi$ d'après a). On dit alors que L est <u>décomposée</u> par φ.

<u>Exemple</u> : $E = \mathbf{K}^{\mathbb{N}}$, λ probabilité cylindrique sur $\mathbf{K}^{\mathbb{N}}$. Alors $E = E'^*$, car E est faiblement complet ; et toute $\varphi : \Omega \to \mathbf{K}^{\mathbb{N}}$ scalairement μ-mesurable est μ-mesurable d'après un résultat classique. Donc φ définie au a) vérifie les conditions de b) et : <u>toute probabilité cylindrique sur $\mathbf{K}^{\mathbb{N}}$ est de Radon</u> (une démonstration directe utilisant le théorème de Prokhorov est facile).

c) Inversement, si λ est de Radon sur E, peut-on choisir φ dans sa classe vérifiant les conditions de b)? On a en fait le résultat suivant :

<u>Théorème 5</u> : (i) Soit E un EVT séparé par son dual et soit $L : E' \to L^0(\Omega,\mu)$ une f.a.l. sur E'. S'il existe $\varphi : \Omega \to E$, μ-mesurable et telle que $\forall \xi \in E'$, $\xi \circ \varphi = L(\xi)$ dans $L^0(\Omega,\mu)$, alors $\lambda^L = \varphi(\mu)$ et elle est donc de Radon .
De plus ' d'ordre p $\Leftrightarrow \varphi \in L^p(\Omega,\mu,E)$; avec si $p \neq 0$, $\|\varphi\| = \|\lambda\|_p$ (si E est à dual quasi-normé)

(ii) la réciproque est vraie si E a ses compacts métrisables - par exemple si E est métrisable, ou souslinien ou dual vague de Fréchet séparable.

(iii) Si φ existe, elle est unique dans $L^0(\Omega,\mu,E)$.

Démontrons (ii) lorsque E est souslinien (par une méthode différente de celle de [3]).

Dans ce cas, il existe une suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E' qui sépare E ([4], proposition II.2). Définissons alors $v : E \to \mathbf{K}^{\mathbb{N}}$ par $v(x) = (\langle x,\xi_n\rangle)$. Soit $\lambda_1 = v(\lambda)$; on a $\lambda_1 = \lambda^{L_1}$, où $L_1 : \mathbf{K}^{(\mathbb{N})} \xrightarrow{\ t_v\ } E' \xrightarrow{\ L\ } L^0(\Omega,\mu)$ est décomposée par $\varphi_1 : \Omega \to \mathbf{K}^{\mathbb{N}}$, $\varphi(\omega) = (L(\xi_n)(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$. L'application v est injective continue, donc définit un isomorphisme borélien de E sur $v(E)$ (cf. [4]); posons $\varphi = [v^{-1}_{|v(E)}]\ \varphi_1$: elle est μ-mesurable, et $\varphi(\mu) = v^{-1}(\lambda_1) = \lambda$; on a $v^{-1}_{|v(E)} \circ \varphi_1(\omega) = x$ tel que $v(x) = (L(\xi_n)(\omega))$ donc $\langle x,\xi_n\rangle = L(\xi_n)(\omega)$ pour tout n, ce qui signifie $\xi_n \circ \varphi(\omega) = L(\xi_n)(\omega)$ pour tout n,p.p. Mais (ξ_n) est totale dans $\sigma(E',E)$ puisqu'elle sépare E, donc dans $\tau(E',E)$; et $L : \tau(E',E) \to L^0(\Omega,\mu)$ est continue (cela veut exactement dire que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $K \subset E$ faiblement compact convexe tel que $\xi \in K^0 \Rightarrow \lambda_\xi(\xi K) > 1-\varepsilon$ - ce qui est vrai car λ est de Radon -; donc on a en fait par densité : $\xi \circ \varphi(\omega) = L(\xi)(\omega)$, p.p. pour tout $\xi \in E'$. Donc φ décompose L, <u>cqfd</u>.

(iii) résulte de ce que, si φ_1 et φ_2 décomposent λ, on a : $\forall\, \xi \in E'$, $\xi\circ\varphi_1(\omega)$ $\xi\circ\varphi_2(\omega) = L(\xi)(\omega)$ μ-pp, et que deux fonctions μ-mesurables, égales scalairement μ-p.p sont en fait égales μ-p.p. (voir [3], fin de la page XIII-1, mais c'est facile).

§ 2. THEOREME DE DUALITE

1) Cotype

a) Définition 1 : Soit E un e.l.c.s. à dual E' quasi normé, par $\|.\|$. Soit λ une probabilité cylindrique sur E. λ est dite de cotype p ($p < 0$ ou $0 < p < +\infty$) si la convergence vers zéro de $\|\lambda_\xi\|_p = [\int_{\mathbb{R}} t^p d\lambda_\xi(t)]^{1/p}$ entraîne $\|\xi\| \to 0$. Adaptation évidente si $p = +\infty$. On pose alors $^*\|\lambda\|_p = \sup_{\|\xi\| \geq 1} \frac{1}{\|\lambda_\xi\|_p}$ ($p < 0$ ou $0 < p \leq +\infty$) qu'on appelle le p-cotype de λ ; de sorte que

$$(1) \qquad \forall\, \xi \in E',\ \|\xi\| \leq {}^*\|\lambda\|_p\, \|\lambda_\xi\|_p$$

b) λ est dite de cotype 0 s'il existe $0 < \alpha < 1$, tel que λ soit de cotype J_α (cf.[1]) au sens suivant : la convergence vers 0 de $J_\alpha(\lambda_\xi) = \inf\{R \in \overline{\mathbb{R}} : \lambda_\xi]R, +\infty] \leq \alpha\}$ entraîne $\|\xi\| \to 0$. On ne définit pas le 0-cotype de λ.

2) Remarque :

a) Noter la dissymétrie des définitions de type 0 (pour tout α...) et cotype 0 (il existe α ...)

b) le type exprime la concentration uniforme des λ_ξ, $\|\xi\| \leq 1$. Le cotype la dispersion uniforme des λ_ξ, $\|\xi\| \geq 1$; par exemple s'il existe $\xi \neq 0$ ($\|\xi\| > 1$ si l'on veut) avec $\lambda_\xi = \delta$, alors λ n'est pas de cotype p.

c) Si $E' \xrightarrow{L} L^0(\Omega,\mu)$ est une f.a.l. qui représente λ, λ est de cotype p $\Leftrightarrow$ la convergence vers 0 de $L(\xi)$ dans $L^p(\Omega,\mu)$ entraîne $\|\xi\| \to 0$

d) λ de cotype p $\Rightarrow$ λ de cotype q, pour $q \geq p$.

3) Théorème de dualité.

a) Hypothèses : Dans ce qui suit on se donne un réel p avec $p \neq 0$ et $p \neq \infty$, un e.l.c.s. E à dual quasi normé, la topologie de la quasi norme $\|.\|$ sur E' étant plus fine que $\sigma(E',E)$, les quasi-boules étant $\sigma(E',E)$ bornées et fermées; un espace G bitopologique (cf. [2]), la 1ère topologie (notée $\mathcal{C}$ dans [2]) étant $\sigma(G,G')$ supposée séparée, et la quasi-norme pouvant prendre des valeurs infinies ; enfin on se donne $u : \sigma(E,E') \to \sigma(G,G')$ linéaire et continue.

b) Remarque à propos de la mesure de Pietsch ([2]).

S'il existe une mesure de Radon μ sur $\sigma(E',E)$ (et non seulement sur la

quasi-boule unité) et C fini tels que $\forall\, x \in E$, $\|ux\| \leq C(\int |\langle x,\xi\rangle|^p \, d\mu(\xi))^{1/p}$ peut-on en déduire que u est p-sommante ?
La réponse n'est pas sûre, car $\xi \mapsto \langle x,\xi\rangle$ n'est pas bornée sur $\sigma(E',E)$ (alors qu'elle l'était sur la quasi-boule unité). Si nous introduisons la fonction bornée $\xi \mapsto \frac{\langle x,\xi\rangle}{\|\xi\|} = v(x)(\xi)$ nous obtenons

$$\|u(x)\| \leq C\Big(\int_{\sigma(E',E)} |v(x)(\xi)|^p . \|\xi\|^p \, d\mu(\xi)\Big)^{1/p} = C\Big(\int |v(x)(\xi)|^p d\nu'(\xi)\Big)^{1/p}$$

mais $d\nu'(\xi) = \|\xi\|^p . d\mu(\xi)$ n'est plus une probabilité ; pourtant si nous supposons que $\|\mu\|_p = [\int \|\xi\|^p \, d\mu(\xi)\,]^{1/p} < +\infty$ (c'est-à-dire que μ est d'ordre p) alors $d\nu(\xi) = \left(\frac{\|\xi\|}{\|\mu\|_p}\right)^p d\mu(\xi)$ est une probabilité, (si $\|\mu\|_p = 0$, l'hypothèse entraîne : $\forall\, x \in E$, $\|ux\| = 0$, et u est p-sommante), l'on a

$$\|ux\| \leq C.\|\mu\|_p \quad \Big(\int_{\sigma(E',E)} |v(x)(\xi)|^p \, d\nu(\xi)\Big)^{1/p}$$

et l'on retombe sur la situation décrite en [2] : $v(x)(.)$ mesurable bornée sur $(\sigma(E',E),\nu)$-espace topologique muni d'une probabilité de Radon et inégalité convenable : on peut donc dire que u est p-sommante, avec d'ailleurs $\pi_p(u) \leq C\|\mu\|_p$.

c) On se donne maintenant une probabilité de Radon μ sur $\sigma(E',E)$, d'ordre p, et l'on cherche une condition assurant qu'elle est mesure de Pietsch relative à l'application u. On va supposer que μ est l'image par ${}^t u$ d'une certaine probabilité cylindrique ρ sur $\sigma(G',G)$; on cherche donc une inégalité du genre $\|ux\| \leq C.[\int |\langle x,\xi\rangle|^p \, d\mu(\xi)\,]^{1/p}$. Or

$[\int |\langle x,\xi\rangle|^p \, d\mu(\xi)\,]^{1/p} = [\int |t|^p \, d\mu_x(t)\,]^{1/p}$ car μ est une mesure cylindrique ; c'est l'image de ρ donc : $\ldots = [\int |t|^p \, d\rho_{u(x)}(t)\,]^{1/p} = \|\rho_{u(x)}\|_p$; on veut donc minorer $\|\rho_{u(x)}\|_p$: il faut une hypothèse du genre cotype, et en effet si ρ est de cotype p on a d'après (1) page 6

${}^*\|\rho\|_p . \|\rho_{u(x)}\|_p \geq \|u\,x\|$: on a l'inégalité cherchée avec $C = {}^*\|\rho\|_p$, et d'après b) u est p-sommante avec $\pi_p(u) \leq {}^*\|\rho\|_p \|\mu\|_p$.

Résumons :

<u>Théorème 4</u> : Les hypothèses étant celles du a), s'il existe une probabilité cylindrique ρ sur $\sigma(G',G)$ de cotype p, dont l'image par ${}^t u$ est une probabilité de Radon sur $\sigma(E',E)$ d'ordre p (relatif à la quasi-norme donnée sur E') alors u est p-sommante de $\sigma(E,E')$ dans G. On a en fait

$$\pi_p(u) \leq {}^*\|\rho\|_p . \|\mu\|_p \qquad (\mu = {}^t u(\rho))$$

<u>1er cas particulier</u> : E et G sont des quasi-Banach. Les quasi-normes utiles sont celles de G et la norme de dual de E'.

<u>2ème cas particulier</u> : $E = \sigma(F',F)$ avec F quasi-Banach, la quasi-norme sur E' est celle de F ; $G = \sigma(H',H)$ avec H quasi-Banach; la norme sur G est la norme de dual de H'. Dans ce cas, on peut remplacer l'hypothèse "μ de Radon sur $\sigma(E',E) = \sigma(F,F')$" par "$\mu$ de Radon sur $\sigma(F'',F')$", l'ordre étant mesuré par la quasi-norme de F", (Cf. [2], n°(1-8)) sans changer la conclusion. En effet l'application directe du théorème donne u p-sommante de $\sigma(F',F'')$ dans G, c'est-à-dire $\forall x_1,\ldots,x_n \in F'$

$$[\Sigma \|ux_i\|^p]^{1/p} \leq \pi_p(u) \sup_{\substack{\xi''\in F'' \\ \|\xi''\|\leq 1}} (\Sigma|\langle x_i,\xi''\rangle|^p)^{1/p} = \pi_p(u) \sup_{\substack{\xi\in F \\ \|\xi\|\leq 1}} (\Sigma|\langle x_i,\xi\rangle|^p)^{1/p}$$

par densité au sens de $\sigma(F'',F')$ de la quasi-boule unité fermée de F dans celle de F". D'où p-sommante de $\sigma(F',F)$ dans G, comme annoncé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Séminaire Maurey-Schwartz, 1972-1973, Exposé N°I.

[2] Séminaire Maurey-Schwartz, 1972-1973, Exposé N°II.

[3] Séminaire L. Schwartz, 1969-1970 : Applications radonifiantes Ecole Polytechnique, Paris.

[4] L. Schwartz : Mesures de Radon sur un espace topologique, Tata Institute (Bombay).
