Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

L. Schwartz

Les applications p-sommantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 2, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A2_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - 75230 PARIS CEDEX 05

Téléphone : 633-25-79

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

LES APPLICATIONS p-SOMMANTES

par L. SCHWARTZ

Exposé N° II

8 Novembre 1972

§ 1. DEFINITIONS SUR DES evt

(1.1) On appelle espace vectoriel E à dual quasi-normé la donnée d'un couple (E,E') d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, en dualité séparante, et d'une quasi-norme $\|\ \|$ sur E' pour laquelle la quasi-boule unité est $\sigma(E',E)$ bornée (ce qui revient à dire que l'injection de $(E',\|\ \|)$ dans $\sigma(E',E)$, est continue). On appellera E_N la topologie $(E,\|\ \|_N)$, normée sur E, ayant pour boule unité (convexe équilibrée $\sigma(E,E')$-fermée) la polaire de la quasi-boule unité de E'; c'est la topologie induite par celle du dual fort E" (espace de Banach) de $(E',\|\ \|)$, elle est donc plus fine que $\sigma(E,E')$.

(1.2) On appelle espace bitopologique G la donnée d'un espace vectoriel topologique $(G,\mathcal{C})$ = G, séparé par son dual (mais non nécessairement localement convexe) et d'une "quasi-norme $\|\ \|$ à valeurs dans $[0,+\infty]$", dont les quasi-boules sont bornées et fermées pour la topologie donnée $\mathcal{C}$ de G. Si $\mathcal{G}$ est le sous-espace vectoriel des éléments de quasi-norme finie, $(\mathcal{G},\|\ \|) \to (G,\mathcal{C})$ est donc une injection continue. Mais en général, $(\mathcal{G},\|\ \|)$ a une topologie strictement plus fine que la topologie induite par $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{G}$. Il importe donc de ne pas confondre ces deux topologies (surtout si $\mathcal{G}$ est G lui-même). D'où le nom de bitopologique. Nous appellerons $\mathcal{G}_N$ l'espace $\mathcal{G}$ muni de la quasi-norme $\|\ \|$, alors que $\mathcal{G}$ et G seront toujours considérés comme muni de la topologie $\mathcal{C}$. Les exemples (1.7) et (1.8) seront particulièrement démonstratifs des différences entre $G_{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{G}_N$.

Ces définitions sont légèrement différentes de celles de l'exposé I. Voici des exemples fondamentaux :

(1.3) Un Banach E définit un espace à dual quasi-normé, avec pour E' son dual, muni de la norme duale $\|\ \|$. Alors $\|\ \|_N$ est la norme initiale de E.

(1.3bis) Il en est de même si E est seulement quasi-normé, mais alors E_N est différent de E muni de sa norme initiale. Ainsi :

(1.4) Prenons $(E,E') = (l^s, l^\infty)$, $0 < s < 1$, avec $\|\ \| = \|\ \|_{l^\infty}$ sur E', c'est un espace à dual quasi-normé (et même à dual normé). Alors

$\| \ \|_N = \| \ \|_{l^1}$ sur l^s.

(1.5) Soit F un espace vectoriel quasi-normé séparé par son dual F'. Alors $E = \sigma(F',F)$, $E' = F$, $\| \ \| = \| \ \|_F$ sur E', est un espace vectoriel à dual quasi-normé Ici E_N est le dual fort F' de F, espace de Banach.

(1.6) Un Banach G est un espace bitopologique, avec sa norme.

(1.7) Soit H un Banach. Alors $G = \sigma(H',H)$, avec pour norme la norme duale, est un espace bitopologique.

(1.8) Soit G un quasi-Banach séparé par son dual. Son dual fort G' est un Banach, et aussi son bidual G", et $G \hookrightarrow G''$ est une injection continue. Prenons $E = \sigma(G'',G')$; appelons quasi-boule unité B" de E l'adhérence, dans $\sigma(G'',G')$, de la quasi-boule unité B de G; elle est $\sigma(G'',G')$-compacte. Elle définit sur $\sigma(G'',G')$ une quasi-norme à valeurs dans $[0,+\infty]$, où $\mathcal{G}$, sous-espace vectoriel des éléments de quasi-norme finie, est le sous-espace vectoriel engendré par B". Alors $\sigma(G'',G')$, muni de la quasi-norme jauge de B", est un espace bitopologique, à quasi-boules compactes pour sa topologie $\sigma(G'',G')$.

(1.9) Soit E un espace vectoriel à dual quasi-normé. Soit E^* son dual algébrique. Considérons, dans $\sigma(E^*,E)$, l'adhérence B^* de la quasi-boule unité B' de E'. Elle définit, sur E^*, une quasi-norme à valeurs dans $[0,+\infty]$, dont les quasi-boules sont compactes par $\sigma(E^*,E)$; on fait ainsi de $\sigma(E^*,E)$ un espace vectoriel bitopologique à quasi-boules compactes. De même, si G est un espace bitopologique, le couple $((\mathcal{G}_N)',\mathcal{G}_N)$ est un espace $(\mathcal{G}_N)'$ à dual quasi-normé.

(1.10) Un morphisme d'espaces à duals quasi-normés, $E_1 \xrightarrow{v} E$, est une application linéaire v, dont la transposée ${}^t v : E' \to E_1^*$, envoie la quasi-boule unité de E' dans l'adhérence RB_1^*, dans $\sigma(E_1^*,E_1)$, d'une boule RB_1' de rayon R de E_1'. Le plus petit R possible s'appelle quasi-norme $\|{}^t v\|$ de ${}^t v$.

(1.11) Un morphisme d'espaces bitopologiques, $G \xrightarrow{v} G_1$, est une application linéaire, dont la restriction à $\mathcal{G}_1$ est continue de $(\mathcal{G}_1)_N$ dans $\mathcal{G}_N$; sa quasi-norme $\|v\|$ est sa quasi-norme dans $\mathcal{L}((\mathcal{G}_1)_N;\mathcal{G}_N)$.

§ 2. QUASI-NORMES DANS DES ESPACES DE SUITES

(2.1) Soit G un espace vectoriel bitopologique. Soit $0 < p \leq +\infty$, et soit $g = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G. On posera

$$\|g\|_p = (\Sigma \|g_n\|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } p < +\infty,$$

$$\|g\|_{+\infty} = \sup_n \|g_n\|.$$

On dira que la suite g est l^p ou que $g \in l^p(G)$, si $\|g\|_p < +\infty$; cela exige que g soit dans le sous-espace vectoriel $\mathcal{G}$ des éléments de quasi-norme finie de G. Alors $l^p(G) = l^p(\mathcal{G})$ est un espace vectoriel, sur lequel $\| \ \|_p$ est une quasi-norme, (si, sur $\mathcal{G}$, $\| \ \|$ est une r-quasi-norme, $r \leq 1$, $\| \ \|_p$ est une Min (p,r)-quasi-norme). Si $\mathcal{G}_N$ est complet, on montre (Fischer-Riesz) que $l^p(G)$ est complet.

(2.1') On aura aussi besoin de considérer des valeurs de p finies ≤ 0 ♦. Mais alors nous ne considérerons que des suites finies. Soit $g = (g_n)_{0 \leq n \leq N}$ une suite de N + 1 éléments de G. On posera

$$\|g\|_p = \Big(\sum_{0 \leq n \leq N} \|g_n\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = 1 \Big/ \Big(\sum_{0 \leq n \leq N} \frac{1}{\|g_n\|^{\bar{p}}}\Big)^{\frac{1}{\bar{p}}}$$

$$\text{si } p < o, \ \bar{p} = |p|;$$

$$\|g\|_o = \exp\Big(\sum_{0 \leq n \leq N} \frac{\log \|g_n\|}{N+1}\Big) = \Big(\prod_{0 \leq n \leq N} \|g_n\|\Big)^{\frac{1}{N+1}}$$

$\|g\|_o$ n'est autre que la moyenne géométrique des éléments de la suite finie g. Pour $p \leq 0$, si l'un des g_n est nul, $\|g\|_p = 0$; il n'est donc pas possible d'identifier une suite de N + 1 éléments à une suite de N + k + 1 éléments dont les k derniers sont nuls. On a toujours $\|g\|_p < +\infty$.

Si l'un des g_n est dans $G - \mathcal{G}$, $\|g_n\| = +\infty$ donc $\frac{1}{\|g_n\|^{\bar{p}}} = 0$, et il ne compte pas dans le calcul de $\|g\|_p$. Remarquons que $p \mapsto \|g\|_p$ (qu'on peut calculer, pour $p \geq 0$, en identifiant g à une suite infinie dont tous les éléments de rang $\geq N + 1$ sont nuls) est continue, sauf en géné-

♦ Comme le montrera la proposition (5.7), seules les valeurs > - 1 seront en fait utiles.

ral au point p = 0.

[Supposons d'abord tous les $g_n \neq 0$. Posons $A(p) = \sum_{0\leq n\leq N} \|g_n\|^p$, pour $p \neq 0$, $A(0) = N + 1$. La fonction A est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $A'(0) = \sum_{0\leq n\leq N} \log\|g_n\|$. Lorsque $p \neq 0$ tend vers 0,

$$\|g\|_p = (A(p))^{\frac{1}{p}} = (\ldots)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{A(p)}{A(0)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= (N+1)^{\frac{1}{p}} \exp\left(\frac{\log A(p) - \log A(0)}{p}\right)$$

$$\sim (N+1)^{\frac{1}{p}} \exp\left(\frac{A'(0)}{A(0)}\right) = (N+1)^{\frac{1}{p}} \|g\|_o ;$$

donc, sauf dans le cas d'une suite à 1 élément ($N = 0$), $\|g\|_p$ tend vers $+\infty$ quand $p \neq 0$ tend vers 0.

Si maintenant la suite g a k éléments $\neq 0$, $0 \leq k \leq N + 1$, $\|g\|_p \sim k^{\frac{1}{p}} \left(\prod'_{0\leq n\leq N} \|g_n\|\right)^{1/k}$, où $\prod'$ est le produit calculé sur les $g_n \neq 0$, et $\|g\|_o = 0$ si $k < N+1$].

(2.2) Soit E un espace vectoriel à dual quasi-normé. Soit d'abord $p > 0$, et soit $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie d'éléments de E (une suite finie peut alors être identifiée à une suite infinie à nombre fini de termes $\neq 0$). On posera

$$\|e\|^*_p = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n,\xi\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} , \text{ pour } p < +\infty ;$$

$$\|e\|^*_{+\infty} = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n,\xi\rangle| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|e_n\|_{E_N}$$ (de sorte que, dans le cas de l'exemple (1.3) = (1.6) où $\| \ \|_{E_N} = \| \ \|_E$, $\|e\|^*_{+\infty} = \|e\|_{+\infty}$).

On dira que e est scalairement l^p, $e \in \mathcal{S}l^p(E)$, si $\|e\|^*_p < +\infty$. Alors $\mathcal{S}l^p(E)$ est un espace vectoriel, sur lequel $\| \ \|^*_p$ est une quasi-norme (très exactement une Min(p,1)-quasi-norme). D'ailleurs $\xi \mapsto (\langle e_n,\xi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une application linéaire continue de E' dans l^p, et $\|e\|^*_p$ est la quasi-norme de cette application; de sorte que $\mathcal{S}l^p(E) \subset \mathcal{L}(E',l^p)$, et que $\| \ \|^*_p$ est la quasi-norme induite sur $\mathcal{S}l^p(E)$ par $\mathcal{L}(E';l^p)$.

On voit facilement que, si E_N est complet, $\mathcal{S}l^p(E)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E'; l^p)$, donc complet, c'est un quasi-Banach.

(2.2') Maintenant soit p fini ≤ 0, et soit $e = (e_n)_{0\leq n\leq N}$ une suite finie d'éléments de E. On posera

$$\|e\|_p^* = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \Big(\sum_{0\leq n\leq N} |\langle e_n,\xi\rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$= 1 \Big/ \operatorname{Inf}_{\|\xi\|\leq 1} \Big(\sum_{0\leq n\leq N} \frac{1}{|\langle e_n,\xi\rangle|^{\bar p}}\Big)^{\frac{1}{\bar p}}$$

pour $p < 0$, $\bar p = |p|$;

$$\|e\|_0^* = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \Big(\prod_{0\leq n\leq N} |\langle e_n,\xi\rangle|\Big)^{\frac{1}{N+1}} .$$

Si l'un des e_n est nul, $\|e\|_p^* = 0$. Si au contraire tous les e_n sont $\neq 0$, comme E' n'est pas réunion finie d'hyperplans, il existe au moins un ξ tel que tous les $\langle e_n,\xi\rangle$ soient $\neq 0$; donc $\|e\|_p^* \neq 0$.

§ 3. LES APPLICATIONS p-SOMMANTES

(3.1) Soient E un espace vectoriel à dual quasi-normé, G un espace vectoriel bitopologique, u une application linéaire de E dans G. On dit que u est p-sommante, $-\infty < p \leq +\infty$, s'il existe une constante M finie ≥ 0 telle que, pour toute suite finie e d'éléments de E,

(3.2) $\|u(e)\|_p \leq M\|e\|_p^*$.

Pour $p > 0$, cette inégalité reste alors vraie pour une suite infinie e, par passage à la limite. La borne inférieure des M pour lesquels l'inégalité ci-dessus est vraie s'appelle quasi-norme p-sommante de u, et se note $\pi_p(u)$. Pour $p > 0$, l'ensemble $\prod_p(E;G)$ des applications p-sommantes de E dans G est un espace vectoriel, sur lequel π_p est une quasi-norme (une Min (r,p)-quasi-norme, si $\|\ \|$ est une r-quasi-norme sur le sous-espace vectoriel G_N des éléments de G de quasi-norme finie).

Pour $p < 0$, et pour une suite finie $(e_n)_{0\leq n\leq N}$, l'inégalité (3.2) s'écrit :

(3.3) $$\sum_{0\leq n\leq N} \frac{1}{\|u(e_n)\|^{\bar p}} \geq \frac{1}{(\pi_p(u))^{\bar p}} \inf_{\|\xi\|\leq 1} \sum_{0\leq n\leq N} \frac{1}{|\langle e_n,\xi\rangle|^{\bar p}}$$

pour $p \neq 0$, $\bar p = |p|$;

$$\prod_{0\le n\le N} \|u(e_n)\| \le (\pi_o(u))^{N+1} \sup_{\|\xi\|\le 1} \prod_{0\le n\le N} |<e_n,\xi>| .$$

Quel que soit p, on voit que l'image par u de la boule-unité de E_N est contenue dans la quasi-boule de rayon $\pi_p(u)$ de $\mathcal{G}_N$; il suffit, pour le voir, d'appliquer (3.2) à une suite e à un seul élément. Donc u est linéaire continue de E_N dans $\mathcal{G}_N$; et $\pi_p(u)$ est au moins égal à la quasi-norme de u dans $\mathcal{L}(E_N;\mathcal{G}_N)$. Pour p = $+\infty$, il est équivalent de dire que u est ∞-sommante ou qu'elle est continue de E_N dans $\mathcal{G}_N$, et

$$\prod\nolimits_{\infty}(E;G) = \mathcal{L}(E_N;\mathcal{G}_N), \pi_\infty(u) = \|u\|_{\mathcal{L}(E_N;\mathcal{G}_N)}.$$

<u>Proposition (3.4)</u> : <u>Soit</u> $p > 0$. <u>Pour que u, application linéaire continue de E_N dans $\mathcal{G}_N$, soit p-sommante, il faut et il suffit que l'image par u de toute suite e scalairement l^p de E soit une suite l^p de</u> G.

<u>Démonstration</u> : Il est évident que c'est nécessaire, montrons que c'est suffisant. Supposons que u ne soit pas p-sommante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une suite finie $e^{(n)}$, à N_n éléments, telle que $\|e^{(n)}\|_p^* \le \frac{1}{2^n}$, et $\|ue^{(n)}\|_p \ge 2^n$. Appelons e la suite infinie obtenue en mettant les suites $e^{(n)}$ les unes à la suite des autres ; on aura $\|e\|_p^* < +\infty$, $\|u(e)\|_p = +\infty$, ce qui est contradictoire.

<u>Proposition (3.4bis)</u> : Supposons E_N et $\mathcal{G}_N$ complets, et soit u une application linéaire continue de E_N dans $\mathcal{G}_N$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1) u est 1-sommante;
2) u transforme toute suite scalairement l^1 de E en une suite l^1 de G;
3) u transforme toute suite sommable de E_N en une suite l^1 de G.

<u>Démonstration</u> : L'implication 1 ⇒ 2 résulte de la proposition précédente. D'autre part, toute suite sommable de E_N est scalairement l^1, donc 2 ⇒ 3. Supposons 3 réalisée L'espace $S(E_N)$ des suites sommables de E_N est un

sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{S}l^1(E)$; comme $\mathcal{S}l^1(E)$ est complet, $S(E_N)$ est complet pour la topologie induite.

Alors u définit une application linéaire $\tilde{u}$ de $S(E_N)$ métrique complet dans $l^1(\mathcal{G}_N)$ métrique complet; elle est trivialement continue quand on munit $l^1(\mathcal{G}_N)$ de la topologie moins fine induite par $\mathcal{G}_N^{\mathbb{N}}$, puisque u est continue de E_N dans $\mathcal{G}_N$; donc son graphe est fermée, donc $\tilde{u}$ est continue. On en tire aussitôt l'existence d'une constante M telle que l'on ait (3.2) avec p = 1, donc u est 1-sommante, 3 ⇒ 1, cqfd.

Proposition (3.5) : Soit u une application p-sommante de E dans G. Soit v un morphisme d'espaces à dual quasi-normés de E_1 dans E, w un morphisme d'espaces bitopologiques de G dans G_1. Alors w u v est p-sommante de E_1 dans G_1, et

$$\pi_p(w\,u\,v) \leq \|w\|\ \pi_p(u)\|{}^t v\|. \tag{3.6}$$

Démonstration : Soit e_1 une suite finie d'éléments de E_1. Alors, en supposant p > 0 :

$$\|w\,u\,v\,(e_1)\|_p \leq \|w\|\|u\,v\,(e_1)\|_p \leq \|w\|\ \pi_p(u)\ \|v(e_1)\|_p^* \leq \|w\|\pi_p(u) \sup_{\substack{\|\xi\|\leq 1\\ \xi\in E'}} \|\langle v\,e_1,\xi\rangle\|_{l^p}$$

$$= \|w\|\ \pi_p(u) \sup_{\substack{\|\xi\|\leq 1\\ \xi\in E'}} \|\langle e_1, {}^t v\,\xi\rangle\|_{l^p} \leq \|w\|\ \pi_p(u) \sup_{\substack{\|\eta\|\leq\|{}^t v\|\\ \eta_1\in E_1^*}} \|\langle e_1,\eta_1\rangle\|_{l^p}$$

[la norme $\|\eta_1\|$ est ici prise dans l'espace bitopologique $\sigma(E_1^*,E_1)$ décrit à (1.9)] $\leq \|w\|\ \pi_p(u)\ \|{}^t v\| \sup_{\substack{\|\eta_1\|\leq 1\\ \eta_1\in E_1^*}} \|\langle e_1,\eta_1\rangle\|_{l^p} \leq \|w\|\pi_p(u)\|{}^t v\| \sup_{\substack{\|\eta_1\|\leq 1\\ \eta_1\in E_1'}} \|\langle e_1,\eta\rangle\|_{l^p}$

$$= \|w\|\ \pi_p(u)\|{}^t v\|\ \|e_1\|_p^*,$$

ce qui montre le résultat. Nous laissons à l'éventuel lecteur le soin de vérifier que tout se passe de la même manière pour p < 0 et p = 0; c'est dû à ce que les fonctions $\|\ \|_p$ et $\|\ \|_p^*$ sont toujours homogènes de degré 1, pour la multiplication par les scalaires.

§ 4. INEGALITES ET FACTORISATION DE PIETSCH.

Théorème (4.1) : Soient E un espace à dual quasi-normé, G un espace bitopologique, u une application linéaire de E dans G. Soit $p < +\infty$. Pour que u soit p-sommante, il faut et il suffit qu'il existe une application linéaire v de E dans un $L^\infty(Z,\nu)$, où Z est un ensemble muni d'une tribu et ν une probabilité sur Z, telle que la transposée ${}^t v : (L^\infty(Z,\nu))' \to E^*$ envoie les caractères de l'algèbre $L^\infty(Z,\nu)$ dans une quasi-boule RB^*, où B^* est l'adhérence dans $\sigma(E^*,E)$ de la quasi-boule unité B' de E' ◆, et que l'on ait :

(4.2) $$\|u(x)\| \leq \|v(x)\|_{L^p(Z,\nu)} \qquad \text{si } p > 0,$$

(4.3) $$\|u(x)\| \leq \left(\int_Z |(v(x))(z)|^p d\nu(z)\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{si } p < 0$$ ◆◆

◆ v n'est pas nécessairement un morphisme d'espaces à duals quasi-normés de E dans L^∞, car, la quasi-boule RB^* n'étant pas en général convexe, ${}^t v$ n'envoie pas nécessairement toute la boule unité de L^∞ dans RB^*. Ce sera un morphisme si B' est convexe, et on aura alors $R = \|{}^t v\|$. Si E est un Banach, exemple (1.3), v sera simplement une application linéaire continue, $R = \|{}^t v\| = \|v\|$. Ceci montre que l'énoncé donné dans la prop. (3.6) page 200 de Schwartz [1] est inexact : l'application ${}^t v$ définie après (3.7) a seulement la propriété indiquée ici relative aux caractères de L^∞, points extrémaux de la boule-unité, mais non la propriété indiquée pour toute la boule unité de L^∞. Le (4,12.1) de Schwartz [1] page 222 doit être modifié de la même manière.

◆◆ C'est la même chose, si ce n'est qu'on ne peut pas parler de l'espace L^p pour $p \leq 0$.

(4.4) $\qquad \|u(x)\| \le \exp\left(\int_Z \log |(v(x))(z)| \, d\nu(z)\right) \qquad$ si $p = 0$.

Dans ce cas, $\pi_p(u) \le R$. En outre, il est possible de choisir pour Z l'adhérence B^{*p} dans $\sigma(E^*, E)$ de la quasi-boule-unité B' de E', de la munir de la topologie $\sigma(B^*, E)$ qui la rend compacte (voir (1.9)), de prendre pour ν une probabilité de Radon, et de prendre pour v l'application de E dans $L^\infty(B^*, \nu)$ qui, à $x \in E$, fait correspondre $v(x)$, classe dans $L^\infty(B^*, \nu)$ de la fonction continue sur B^* : $\xi \mapsto \pi_p(u)\langle x, \xi\rangle$.

Démonstration :

1) Supposons cette condition réalisée, et montrons que u est p-sommante, avec $\pi_p(u) \le R$.

Tout d'abord $L^\infty(Z, \nu)$ est une C^*-algèbre de Banach commutative. Soit $\hat{Z}$ son spectre, compact. Alors on sait qu'il existe un isomorphisme de C^*-algèbres de Banach commutatives, $f \mapsto \hat{f}$, de $L^\infty(Z, \nu)$ sur $C(\hat{Z})$, espace des fonctions continues sur $\hat{Z}$. Soit $\hat{\nu}$ la probabilité de Radon sur $\hat{Z}$ définie par $\hat{\nu}(\hat{f}) = \nu(f)$; elle a pour support $\hat{Z}$ tout entier.

Alors on sait aussi que $C(\hat{Z}) \to L^\infty(\hat{Z}, \hat{\nu})$ est un isomorphisme (toute fonction sur $\hat{Z}$, $\hat{\nu}$-mesurable et bornée, est $\hat{\nu}$-presque partout égale à une fonction continue unique). Si alors $f^\bullet$ est une ν-classe de fonctions ν-mesurables ≥ 0 sur Z, elle est la limite croissante des $\mathrm{Inf}(f^\bullet, n)$, $n \in \mathbb{N}$, donc on peut lui faire correspondre une fonction $\hat{f} = \lim_{n \to \infty} (\mathrm{Inf}(f^\bullet, n))^\wedge$, fonction sci ≥ 0 donc une $\hat{\nu}$-classe $\hat{f}$ de fonctions $\hat{\nu}$-mesurables ≥ 0, avec conservation des intégrales: $\int_Z^* f \, d\nu = \int_{\hat{Z}}^* \hat{f} \, d\hat{\nu}$; d'où le même résultat pour les ν-classes de fonctions réelles bornées supérieurement ou bornées inférieurement. Il est donc possible de remplacer Z, ν par $\hat{Z}, \hat{\nu}$ dans la propriété supposée, en remplaçant $v(x)$ par $\hat{v}(x) = (v(x))^\wedge$.

Nous conserverons Z, ν, mais supposerons que Z est un espace compact, ν une probabilité de Radon sur Z, et que v est une application de E dans le Banach $C(Z)$, avec l'inégalité (4.2) ou (4.3) ou (4.4). Supposons d'abord $p > 0$, et soit e $(e_n)_{0 \le n \le N}$ une suite finie d'éléments de E.

$$\|u(e)\|_p^p = \sum_{0\le n\le N} \|u(e_n)\|^p$$

$$\le \sum_{0\le n\le N} \int_Z |(v(e_n))(z)|^p d\nu(z)$$

$$= \int_Z \sum_{0\le n\le N} = \int_Z \sum_{0\le n\le N} |<v(e_n), \delta_{(z)}>|^p d\nu(z)$$

(où $\delta_{(z)} \in C'(Z)$ est la mesure de Dirac du point z, de norme 1 dans $C'(Z)$)

$$= \int_Z \sum_{0\le n\le N} |<e_n, {}^t v(\delta_{(z)})>|^p d\nu(z)$$

$$\le \sup_{z\in Z} \sum_{0\le n\le N} |<e_n, {}^t v(\delta_{(z)})>|^p$$

(parce que ν est de masse 1)

$$\le R^p \operatorname{Sup}_{\substack{\|\xi\|\le\|{}^t v\| \\ \xi\in E^*}} \sum_{0\le n\le N} |<e_n,\xi>|^p$$

(parce que $\delta_{(z)}$ est un caractère de $C(Z)$)

$$= R^p \operatorname{Sup}_{\substack{\|\xi\|\le 1 \\ \xi\in E'}}$$ (d'après la définition de l'espace

bitopologique $\sigma(E^*,E)$, (1.9)) $= R^p \|e\|_p^{*p}$, donc u est p-sommante, et $\pi_p(u) \le R$.

Soit maintenant $p < 0$, $\bar{p} = |p|$.

$$\left(\frac{1}{\|u(e)\|_p}\right)^{\bar{p}} = \sum_n \frac{1}{\|u(e_n)\|^{\bar{p}}}$$

$$\ge \sum_n \int_Z \frac{1}{|v(e_n)(z)|^{\bar{p}}} d\nu(z) = \int_Z \sum_n$$

$$\ge \operatorname{Inf}_{z\in Z} \sum_n \frac{1}{|<e_n, {}^t v(\delta_{(z)})>|^{\bar{p}}}$$

$$\ge \frac{1}{R^{\bar{p}}} \operatorname{Inf}_{\|\xi\|\le 1} \sum_n \frac{1}{|<e_n,\xi>|^{\bar{p}}}$$

$$= \frac{1}{R^{\bar{p}}} \frac{1}{\|e\|_p^{*\bar{p}}}$$

d'où encore $\|u(e)\|_p \leq R\,\|e\|_p^*$, donc $\pi_p(u) \leq R$.

Supposons enfin p = 0.

$$\prod_{0\leq n\leq N} \|u(e_n)\| \leq \prod_{0\leq n\leq N} \exp\left(\int_Z \log|v(e_n)(z)|\,d\nu(z)\right)$$

$$= \exp\left(\sum_n \int_Z \ldots\right) = \exp\left(\int_Z \sum_n \ldots\right)$$

$$\leq \exp\left(\operatorname{Sup}_{z\in Z} \sum_n \log|\langle e_n, {}^t v\,\delta_{(z)}\rangle|\right)$$

$$= \operatorname{Sup}_{z\in Z} \prod_{0\leq n\leq N} |\langle e_n, {}^t v(\delta_{(z)})\rangle|$$

$$\leq R^{N+1} \operatorname{Sup}_{\|\xi\|\leq 1} \prod_{0\leq n\leq N} |\langle e_n,\xi\rangle| = R^{N+1}\|e\|_o^{*(N+1)},$$

d'où encore $\|u(e)\|_o \leq R\|e\|_o^*$, et $\pi_o(u) \leq R$.

2) Supposons inversement que u soit p-sommante. Prenons $Z = B^*$, $v(x)(\xi) = \pi_p(u)\langle x,\xi\rangle$, donc $v(x) \in C(B^*)$, v application linéaire de E dans $C(B^*)$. La transposée ${}^t v$ est l'application de $C'(B^*)$ dans E^* qui, à une mesure de Radon $\nu \in C'(B^*)$, fait correspondre l'élément ${}^t v(\nu)$ de E^*, définissant la forme linéaire sur E : $x \mapsto \pi_p(u) \int_{B^*} \langle x,\xi\rangle\, d\nu(\xi)$.
En particulier, si $\delta_{(\xi)}$ est un caractère de $C(B^*)$, $\xi \in B^*$, ${}^t v(\delta_{(\xi)}) = \pi_p(u)\xi \in \pi_p(u)B^*$; ${}^t v$ envoie donc bien les caractères de $C(B^*)$ dans $\pi_p(u)B^*$, mais, B^* n'étant pas forcément convexe, n'envoie pas en général la boule unité de $C'(B^*)$ dans $\pi_p(u)B^*$.

Nous devons montrer qu'on peut alors trouver une probabilité de Radon ν sur $\sigma(B^*,E)$, telle que l'on ait (4.2), (4.3), ou (4.4). On utilisera pour cela le lemme :

<u>Lemme (4.5)</u> : <u>Soit Γ un ensemble de fonctions sci</u> (semi-continues inférieurement) <u>sur un compact Z à valeurs dans $]-\infty,+\infty]$</u>, <u>stable par addition</u>, <u>et tel que chaque fonction $\varphi \in \Gamma$ ait un minimum ≤ 0</u>. <u>Alors</u>

<u>il existe une probabilité de Radon</u> ν <u>sur</u> Γ <u>telle que pour toute</u> $\varphi \in \Gamma$, $\nu(\varphi) \leq 0$.

<u>Démonstration du lemme (4.5)</u> : Supposons d'abord que Γ soit un cône[♦] convexe $\subset C(Z)$. Soit Ω le cône convexe ouvert formé des fonctions continues > 0 sur Z. Alors $\Gamma \cap \Omega = \emptyset$. Donc il existe (Hahn-Banach) une forme linéaire continue $\nu \in C'(Z)$, > 0 sur Ω, ≤ 0 sur Γ; $\nu > 0$ sur Ω signifie que ν est une mesure ≥ 0 non identiquement nulle, on peut donc supposer que c'est une probabilité, d'où le résultat.

Supposons maintenant Γ formé de fonctions sci, et seulement stable par addition. Soit Γ' l'ensemble des fonctions <u>continues</u> φ' sur Z ayant la propriété suivante : il existe $\varphi \in \Gamma$ et k rationnel ≥ 0 tels que $\varphi' \leq k\varphi$. Alors Γ' est encore stable par addition (si $\varphi_1' \leq \frac{p_1}{q_1}\varphi_1$, $\varphi_2' \leq \frac{p_2}{q_2}\varphi_2$, on aura $\varphi_1' + \varphi_2' \leq \frac{1}{q_1q_2}(p_1q_2\varphi_1 + p_2q_1\varphi_2)$, et $p_1q_2\varphi_1 + p_2q_1\varphi_2 \in \Gamma$) et par multiplication par les scalaires rationnels ≥ 0; en outre, toute fonction de Γ' a un minimum ≤ 0. Soit alors Γ'' l'adhérence de Γ' dans $C(Z)$; c'est maintenant un cône convexe fermé, et toute fonction de Γ'' a un minimum ≤ 0. Donc il existe une probabilité de Radon ν sur Z telle que, pour toute $\varphi'' \in \Gamma''$, $\nu(\varphi'') \leq 0$. Alors, pour $\varphi \in \Gamma$, $\nu(\varphi) = \sup_{\substack{\Psi \in C(Z) \\ \Psi \leq \varphi}} \nu(\Psi) \leq 0$,

<u>cqfd</u>.

Achevons maintenant la démonstration du 2) du théorème (4.1). Soit $e = (e_n)_{0 \leq n \leq N}$ une suite finie d'éléments de E, telle que tous les $u(e_n)$ soient $\neq 0$, donc aussi tous les e_n. Posons

$$\varphi_e(\xi) = \sum_n \|u(e_n)\|^p - (\pi_p(u))^p \sum_n |<e_n,\xi>|^p, \qquad \text{si } p > 0;$$

$$\varphi_e(\xi) = \frac{1}{(\pi_p(u))^{\bar{p}}} \sum_n \frac{1}{|<e_n,\xi>|^{\bar{p}}} - \sum_n \frac{1}{\|u(e_n)\|^{\bar{p}}}, \quad \text{si } p < 0,\ \bar{p} = |p|;$$

$$\varphi_e(\xi) = \sum_n \log \|u(e_n)\| - \sum_n \log|<\pi_o(u)e_n,\xi>| \qquad \text{si } p = 0.$$

♦ Un cône ici ne contient pas nécessairement l'origine : c'est un ensemble stable par multiplication par les réels > 0.

Alors φ_e est une fonction continue sur B^* (topologie $\sigma(E^*,E)$!), à valeurs dans $]-\infty,+\infty]$ (dans $\mathbb{R}$ pour $p > 0$). L'ensemble Γ des φ_e, lorsque N et e varient, est stable par addition, parce que, si $e = (e_n)_{0\le n\le N}$ et $f = (f_m)_{0\le n\le N}$ sont deux suites finies, $\varphi_e + \varphi_f = \varphi_g$, où g est la suite $(e_o, e_1, \dots e_N, f_o, f_1, \dots, f_M)$ à $M+N+2$ éléments. (C'est même un cône convexe si $p \neq 0$).

Toute $\varphi \in \Gamma$ a un minimum ≤ 0 sur B^*, ou encore un Inf ≤ 0 sur B', par définition même de $\pi_p(u)$. Donc il existe une probabilité de Radon ν sur B^* tel que $\nu(\varphi) \le 0$ pour toute $\varphi \in \Gamma$, d'après la lemme (4.5). En prenant φ_e définie par une suite e à un seul élément x, on trouve exactement :

$$\|u(x)\| \le \left(\int_{B^*} |\pi_p(u)<x,\xi>|^p d\nu(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} \quad , \qquad \text{pour } p \neq 0,$$

$$\|u(x)\| \le \exp\left(\int_{B^*} \log|<\pi_o(u)x,\xi>| d\nu(\xi)\right), \quad \text{pour } p = 0, \qquad \text{cqfd.}$$

Théorème (4.7) (factorisation de Pietsch) : Soit $0 < p < +\infty$. Soient E un espace à dual quasi-normé, G un espace bitopologique tel que $\mathcal{G}_N$ soit complet, u une application linéaire de E dans G. Pour qu'elle soit p-sommante, il faut et il suffit qu'il existe un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "u_1"'] & L^\infty(Z,\nu) \arrow[r, "j"] & L^p(Z,\nu) \\
& S \arrow[ur, "j'"] \arrow[rr, "u_2"'] & & G
\end{tikzcd} \quad ,$$

où Z,ν,v sont comme dans le théorème (4.1), où S est un sous-espace vectoriel fermé de $L^p(Z,\nu)$, avec la quasi-norme induite, et j' son injection canonique, et où u_2 est linéaire continue de quasi-norme ≤ 1 de S dans G (c.à.d. dans $\mathcal{G}_N$). Alors $\pi_p(u) \le R$ défini à (4.1); et on peut prendre $Z = B^*$, $(v(x))(\xi) = \pi_p(u)<x,\xi>$ comme dans (4.1).

Démonstration : Si un tel diagramme existe, on a l'inégalité de Pietsch $\|u(x)\| \leq \|u_1(x)\|_S = \|j'u_1(x)\|_{L^p(Z,\nu)} = \|jv(x)\|_{L^p(Z,\nu)}$, donc u est p-sommante, et $\pi_p(u) \leq R$.

Inversement, supposons u p-sommante. On a une inégalité de Pietsch comme dans (4.1). Alors l'application linéaire $jv(x) \mapsto u(x)$ de $jv(E)$ dans G_N est bien définie, et continue de quasi-norme ≤ 1, puisque $\|u(x)\| \leq \|jv(x)\|_{L^p}$. Comme G_N est complet, elle se prolonge en une application linéaire continue u_2, de norme ≤ 1, de S dans G_N, où S est l'adhérence de $jv(E)$ dans $L^p(Z,\nu)$; et, pour $x \in E$, $u(x) = u_2\, jv(x) = u_2 u_1(x)$

cqfd.

Remarque : Pour $p \leq 0$, il y a bien une inégalité de Pietsch, mais pas de factorisation de Pietsch parce que $L^p(Z,\nu)$ n'existe pas.

§ 5. APPLICATIONS DES THEOREMES DE PIETSCH.

Proposition (5.1) : Soient Z un ensemble muni d'une tribu, ν une mesure ≥ 0 sur cette tribu, α une fonction de $L^p(Z,\nu)$, $0 < p \leq +\infty$. Alors la multiplication par α est une application p-sommante de $L^\infty(Z,\nu)$ dans $L^p(Z,\nu)$, de quasi-norme p-sommante $\leq \|\alpha\|_{L^p(Z,\nu)}$.

Démonstration : Elle se factorise comme suit :

$$L^\infty(Z,\nu) \xrightarrow{\mathrm{Id}} L^\infty\left(Z, \frac{|\alpha|^p \nu}{\|\alpha\|^p_{L^p}}\right) \xrightarrow{\mathrm{Id}} L^p\left(Z, \frac{|\alpha|^p \nu}{\|\alpha\|^p_{L^p}}\right) \xrightarrow[\text{par } \alpha]{\text{multiplication}} L^p(Z,\nu).$$

La première application v, entre espaces de Banach, est linéaire continue de norme ≤ 1; la deuxième u est p-sommante, pour $p < +\infty$, de quasi-norme $\pi_p(u) \leq 1$, parce que $\frac{|\alpha|^p \nu}{\|\alpha\|^p_{L^p}}$ est une probabilité, et c'est vrai aussi pour $p = +\infty$ puisqu'alors toute application linéaire continue u entre Banach est ∞-sommante, et $\pi_\infty(u) = \|u\|$; la troisième w, la multiplication par α, est linéaire continue de norme $\leq \|\alpha\|_{L^p}$; il suffit donc d'appliquer la proposition (3.5) et l'inégalité (3.6).

<u>Proposition (5.2)</u> : <u>Une application linéaire u, p-sommante, est q-sommante pour</u> $q \geq p$, <u>et</u> $\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$.

<u>Démonstration</u> : Montrons d'abord que, si ν est une probabilité sur Z et f une fonction ν-mesurable, $p \to J(p)=(\int_Z |f(z)|^p d\nu(z))^{\frac{1}{p}}$ est croissante sur $]-\infty,+\infty]$ (en la remplaçant par ce qu'il faut pour $p = 0$ et $p = +\infty$). Pour $p > 0$, cela résulte de l'inégalité de Hölder. Pour $p < 0$ aussi, car cela revient à dire que $\overline{p} \mapsto (\int_Z |\frac{1}{f(z)}|^{\overline{p}} d\nu(z))^{\frac{1}{\overline{p}}}$ est croissante pour $\overline{p} > 0$. Il suffit donc, pour couvrir tous les cas de figure sur $]-\infty,+\infty]$, de montrer que, lorsque $p > 0$, $J(p) \geq J(0)$, de sorte que la fonction sera croissante sur $[0,+\infty]$, et, par changement de p en -p et de f en $\frac{1}{f}$, elle le sera aussi sur $]-\infty,0]$, donc sur $]-\infty,+\infty]$ (en fait, $J(p) \geq 0$ est toujours défini pour $p \neq 0$, à valeurs dans $[0,+\infty]$, mais peut n'être pas défini pour $p = 0$; cependant, si J n'est pas identique à $+\infty$ sur $]0,+\infty]$, $J(0)$ est défini et $<+\infty$, et, si J n'est pas identique à 0 sur $]-\infty,0[$, $J(0)$ est défini et > 0; le seul cas où $J(0)$ n'est pas défini est celui où J est $+\infty$ sur $]0,+\infty]$ et 0 sur $]-\infty,0[$, auquel cas elle est bien croissante malgré son indétermination !). Il suffit de nous placer dans le cas suivant : $J(p_0) < +\infty$ pour un $p_0 > 0$, et $J(0)$ est défini et > 0, autrement dit $\int_Z |\log|f(z)||d\nu(z) < +\infty$. En particulier, f est ν-presque partout finie et $\neq 0$. Posons $A(p) = \int_Z |f(z)|^p d\nu(z)$, $p_0 \geq p > 0$. Comme $|f(z)|^p \leq 1 + |f(z)|^{p_0}$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que A est continue sur $]0,p_0]$, et tend, à l'origine, vers $A(0) = \int_Z d\nu(z) = 1$. Dérivons formellement par rapport à p :

$$A'(p) = \int_Z |f(z)|^p \log|f(z)| d\nu(z)| \ ;$$

comme, pour $p \leq p_0 - \varepsilon$, $|f(z)|^p|\log|f(z)|| \leq$ const. $(|f(z)|^{p_0}+|\log|f(z)||)$, le théorème de dérivation sous le signe $\int$ montre que A est effectivement continuement dérivable sur $[0,p_0[$, et que $A'(0) = \int_Z \log|f(z)|d\nu(z)$. Donc $J(p) = (A(p))^{\frac{1}{p}}$, d'après la raisonnement fait à (2.1'), et compte tenu de $A(0) = 1$, tend vers $\exp(A'(0)) = \exp \int_Z \log|f(z)|d\nu(z)$ lorsque $p > 0$ tend vers 0; la croissance de J dans $]0,p_0]$ montre alors sa croissance dans $[0,p_0]$.

Alors l'inégalité de Pietsch $\|u(x)\| \leq (\int_Z |v(x)(z)|^p d\nu(z))^{\frac{1}{p}}$, si u est p-sommante, avec $R = \pi_p(u)$ (voir définition de R au théorème (4.1)), donne a fortiori $\|u(x)\| \leq (\int_Z |v(x)(z)|^q d\nu(z))^{\frac{1}{q}}$ pour $q \geq p$, donc $\pi_q(u) \leq R = \pi_p(u)$.

<u>Corollaire (5.3)</u> : <u>Pour toute application linéaire u de E dans G, il existe une coupure</u> $p_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, <u>telle que</u> u <u>soit p-sommante pour</u> $p > p_0$ <u>et ne le soit pas pour</u> $p < p_0$.

Nous verrons (conjecture de Pietsch démontrée par B. Maurey et S. Chevet) que, si E est un Banach, la coupure p_0 est ou bien ≥ 1, ou bien -1, ou bien $-\infty$ (voir (5.6) et (5.7) pour mieux comprendre).

<u>Proposition (5.4)</u> : <u>Soient</u> E <u>Banach et</u> G <u>bitopologique</u>. <u>Si</u> u <u>est p-sommante</u>, $p < +\infty$, <u>elle est faiblement compacte de</u> E <u>dans</u> $\mathcal{G}_N$ <u>et</u> G, <u>et transforme tout faiblement compact de</u> E <u>en un compact de</u> $\mathcal{G}_N$ <u>et</u> G.

<u>Démonstration</u> : On peut toujours, d'après (5.2), supposer $1 < p < +\infty$. On a la factorisation de Pietsch (4.7), avec v continue. Soit B la boule unité de E; comme L^p est reflexif, jv(B) est faiblement relativement compacte. Donc $u_1(B)$ est faiblement relativement compacte dans S faiblement fermé de $L^p(Z,\nu)$, donc $u(B) = u_2u_1(B)$ est faiblement relativement compacte dans $\mathcal{G}_N$, a fortiori dans G. Soit ensuite K un faiblement compact de E; alors v(K) est faiblement compact dans $L^\infty(Z,\nu)$. Mais L^∞ a la propriété de Dunford-Pettis : si j est une application linéaire continue de L^∞ dans un espace vectoriel localement convexe (ici L^p), qui transforme la boule en une partie faiblement relativement compacte (ici L^p est réflexif), j transforme tout faiblement compact v(K) de L^∞ (faiblement veut dire : pour $\sigma(L^\infty,(L^\infty)'))$ en un compact, ici de L^p; donc jv(K) est compact dans S; alors $u(K) = u_2u_1(K)$ est compact dans $\mathcal{G}_N$, à fortiori dans G

<u>Proposition (5.5) (Dvoretzky-Rogers)</u> : <u>Soit</u> E <u>un Banach</u>. <u>Si toute suite sommable de</u> E <u>est absolument sommable</u>, E <u>est de dimension finie</u>.

<u>Démonstration</u> : En vertu de la proposition (3.4bis), l'application identique de E est 1-sommante. Donc, d'après (5.4) sa boule unité est faiblement compacte parce que faiblement fermée : donc, par réapplication de

(5.4), compacte, cqfd.

Proposition (5.6) : Soit u une application linéaire continue de rang fini de E_N dans $\mathcal{G}_N$. Alors elle est p-sommante pour tout $p > -1$.

Démonstration : Posons $u(E) = H$, que nous munirons de la structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$ par choix d'une base. On peut factoriser u par :

$$E \xrightarrow{u} H = \mathbb{R}^n \xrightarrow{Id} H = \mathbb{R}^n \hookrightarrow G \quad .$$

D'abord $E \xrightarrow{u} H$ est un morphisme d'espaces à duals quasi-normés. En effet, elle est continue de E_N dans H, muni de la topologie quasi-normée induite par $\mathcal{G}_N$, donc dans $\mathbb{R}^n$; donc ${}^t v$ est continue de $(\mathbb{R}^n)'$ dans $(E_N)' \subset E^*$, donc envoie la boule unité de $\mathbb{R}^n$ dans une boule de $(E_N)'$, c.à.d. dans l'adhérence, pour $\sigma(E^*,E)$, d'une boule de E'. Ensuite $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathcal{G}_N$ est continue, donc $\mathbb{R}^n \hookrightarrow G$ est un morphisme d'espaces bitopologiques. Il reste donc, par la proposition (3.5), à montrer que l'application identique de $\mathbb{R}^n$ est p-sommante pour $p > -1$. Il suffit de le montrer pour $-1 < p < 0$. $|p| = \bar{p}$. Prenons pour mesure de Pietsch sur $(\mathbb{R}^n)' = \mathbb{R}^n$ la mesure de Lebesgue sur la boule unité B, normalisée pour qu'elle ait la masse 1. On doit montrer que $\dfrac{1}{\|x\|^{\bar{p}}} \geq \text{const.} \displaystyle\int_B \frac{1}{|\langle x,\xi\rangle|^{\bar{p}}}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n$. On peut se borner, par homogénéité, à $\|x\| = 1$; puis, à cause de l'invariance par rotation, à $x = (1,0,0,\ldots 0)$. Il suffit alors de savoir que, pour tout $\bar{p} < 1$,

$$\int_B \frac{1}{|\xi_1|^{\bar{p}}}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n < +\infty,$$

ce qui résulte aussitôt de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{d\xi_1}{|\xi_1|^{\bar{p}}} < +\infty$, cqfd.

La proposition suivante montre au contraire que seul le cas $p > -1$ est intéressant :

Proposition (5.7) : Soit u une application linéaire de E dans G, telle que u(E) contienne au moins un sous-espace vectoriel H de dimension 2 de $\mathcal{G}$. Alors u n'est pas p-sommante pour $p \leq -1$.

Moralement, une application ne peut être p-sommante, $p \leq -1$, que si elle est de rang 0 ou 1.

<u>Démonstration</u> : Supposons qu'elle le soit, nous aboutirons à une contradiction. Soit $\bar{p} = |p|$. Il existe un sous-espace vectoriel L de dimension 2 de E tel que u soit une bijection de L sur H. Munissons L et H de bases, la deuxième image de la première par u, ce qui permet d'identifier L et H à $\mathbb{R}^2$, et la restriction $u : L \to H$ à l'identité de $\mathbb{R}^2$. Les normes $\mathbb{R}^2$ et E_N sur L sont équivalentes, donc lorsque ξ décrit la quasi-boule unité B' de E', sa restriction η à L parcourt une partie de $L' = \mathbb{R}^2$ contenue dans et contenant une boule de $\mathbb{R}^2$. Autrement dit les deux valeurs de $\|e\|_p^*$, pour une suite e de L, correspondant à cette suite considérée dans $\mathbb{R}^2$ ou dans E_N, sont majorées chacune par une constante fois l'autre. De même, la norme $\mathbb{R}^2$ et la quasi-norme de G sont équivalentes sur H, donc les deux valeurs de $\|u(e)\|_p$, correspondant à u(e) considérée comme suite dans $\mathbb{R}^2$ ou dans G, sont majorées chacune par une constante fois l'autre. De ce que $u : E \to G$ est p-sommante, on déduit donc que u = identité de $\mathbb{R}^2$, est p-sommante. Nous allons montrer que ceci est contradictoire pour $p \leq -1$. Il doit en effet exister une probabilité de Pietsch ν sur la boule unité B de $\mathbb{R}^2$, dont nous retiendrons seulement que, pour tout x de norme 1, $\int_B \frac{1}{|\langle x, \xi\rangle|^{\bar{p}}} d\nu(\xi) < +\infty$.

De cela on déduit d'abord que tout rayon du disque unité est ν-négligeable, sans quoi, en prenant x sur ce rayon, on trouverait une intégrale infinie.

Appelons $F(\theta)$ la ν-mesure du secteur angulaire

$$0 \leq \mathrm{Arg}(\xi_1, \xi_2) \leq \theta$$

(les $\leq$ peuvent être remplacés par des $<$ d'après ce que nous venons de voir). Alors F est une fonction croissante sur $[0, 2\pi]$, $F(0) = 0$, $F(2\pi) = 1$. Donc il existe au moins un point θ' où F n'ait pas une dérivée nulle. Il existe donc une suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers θ', et un nombre $\alpha > 0$, tel que

$$\left|\frac{F(\theta_n) - F(\theta')}{\theta_n - \theta}\right| \geq \alpha.$$

Prenons alors une nouvelle base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$, donnant des coordonnées nouvelles ξ_1', ξ_2', avec pour deuxième vecteur de base le vecteur unitaire d'argument θ. Prenons pour x le premier vecteur de base. On a l'inégalité

$$+\infty > \int_B \frac{1}{|\langle x,\xi\rangle|^{\bar{p}}} \, d\nu(\xi) = \int_B \frac{1}{|\xi'_1|^{\bar{p}}} \, d\nu(\xi'_1 . \xi'_2) .$$

Comme les rayons ne portent pas de masse, si S_n est le secteur angulaire $\theta_n \leq \mathrm{Arg}(\xi_1,\xi_2) \leq \theta^\cdot$ ou $\theta^\cdot \leq \mathrm{Arg}(\xi_1,\xi_2) \leq \theta_n$ selon que $\theta^\cdot < \theta_n$ ou $\theta_n > \theta^\cdot$. $\int_{S_n} \frac{1}{|\xi'_1|^{\bar{p}}} \, d\nu(\xi'_1,\xi'_2)$ doit donc tendre vers 0 pour n infini, par la convergence dominée de Lebesgue. Or cette intégrale est

$$\geq \frac{1}{|\sin(\theta_n - \theta^\cdot)|^{\bar{p}}} \; |F(\theta_n) - F(\theta)| \geq \left| \frac{F(\theta_n) - F(\theta^\cdot)}{\theta_n - \theta^\cdot} \right|$$

(puisque $\bar{p} \geq 1$ et $|\sin u| \leq |u|$) $\geq \alpha$, donc elle ne peut pas tendre vers 0, d'où la contradiction, <u>cqfd</u>.
