G. Pisier

(Annexe n° 1) Sur les espaces qui ne contiennent pas de 1_n^∞ uniformément

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A27_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

SUR LES ESPACES QUI NE CONTIENNENT PAS DE l_n^∞ UNIFORMEMENT

par G. PISIER

Annexe

Maurey a montré (cf. exp. XXII, corollaire 1) que les espaces de Banach tels que $1 \in I_E$ coincident avec les espaces qui ne contiennent pas de l_n^∞ uniformément (par définition E contient des l_n^∞ uniformément s'il existe $C > 0$ tel que pour tout entier n, il existe un isomorphisme T de l_n^∞ sur un sous-espace de E tel que $\|T\| \, \|T^{-1}\| \leq C$).

A partir de ses résultats, on peut obtenir une caractérisation en termes de variables aléatoires prenant leurs valeurs dans ces espaces.

<u>Notation</u> : Dans toute la suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$) désigne une suite de variables aléatoires réelles sur $([0,1],dt)$, indépendantes équidistribuées suivant la loi de Gauss (resp. la suite des variables de Rademacher sur $([0,1],dt)$).

<u>Définition</u> : Soit E et F deux espaces quasi-normés et u un opérateur de E dans F.

a) u est dit $(\gamma,1)$-sommant s'il existe une constante C telle que, pour toute suite finie (x_i) dans E

$$\int \| \Sigma\, u(x_i) f_i(t) \| dt \leq C \sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \| \Sigma\, \varepsilon_i x_i \| .$$

b) u est dit (γ,ε)-sommant s'il existe une constante C telle que, pour toute suite finie (x_i) dans E

$$\text{(0)} \qquad \int \| \Sigma\, u(x_i) f_i(t) \| dt \leq C \int \| \Sigma\, \varepsilon_i(t)\, x_i \| \, dt .$$

<u>Rappel</u> : D'après un résultat de Kahane (2) (que l'on peut d'ailleurs retrouver à partir de l'exposé VI) il existe des constantes universelles d_p telles que : pour tout Banach E, pour toute suite finie (x_i) dans E et pour tout $p \geq 1$,

$$\text{(1)} \qquad \left(\int \| \Sigma\, x_i \varepsilon_i(t) \|^p\right)^{1/p} \leq d_p \int \| \Sigma\, x_i \varepsilon_i(t) \| dt .$$

D'après l'exposé VI, il existe des constantes universelles $g_{p,q}$ telles que, pour tout Banach E et pour toute suite finie (x_i) dans E on ait :

$$\text{(2)} \quad \text{si } 0 < p,q < \infty, \ \left(\int \| \Sigma\, f_i(t) x_i \|^p dt\right)^{1/p} \leq g_{p,q} \left(\int \| \Sigma\, f_i(t) x_i \|^q dt\right)^{1/q}$$

<u>Remarque 1</u> : Les énoncés relatifs à (1) et (2) restent vrais dans les espaces quasi-normés mais les constantes ne sont plus qu'universelles dans la classe des espaces α-normés (et ceci pour tout α dans $]0,1]$).

On rappelle qu'une suite de v.a.r. η_n est dite "suite symétrique", si pour toute suite (ξ_n) de nombres valant $+1$ ou -1, la suite $(\xi_n \eta_n)$ a même loi sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que la suite (η_n).

<u>Proposition 1</u> : Soit E un espace de Banach, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $1 \in I_E$

ii) L'identité de E est $(\gamma,1)$-sommante.

iii) Toute suite (η_n) de v. a. r. sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},P)$, telle que $\sup\limits_n \|\eta_n\|_{L^p}$ est fini pour tout p dans $]0,\infty[$, a la propriété suivante :

Pour tout p dans $]0,\infty[$, il existe une constante C_p telle que, pour toute suite finie (x_i) dans E, on ait :

$$\left(\int \|\Sigma\ \eta_i(\omega)x_i\|^p dP(\omega)\right)^{1/p} \leq C_p \sup_{\varepsilon_i=\pm 1} \|\Sigma\ \varepsilon_i x_i\|$$

<u>Démonstration</u> : <u>$3 \Rightarrow 2$</u> est trivial

<u>$2 \Rightarrow 1$</u> : Si $1 \notin I_E$, d'après l'exposé XXII corollaire 1, pour tout entier n il existe des éléments $x_1,\ldots,x_n$ de E tels que :

$$\forall\ (C_i) \in \mathbb{R}^n,\quad \frac{1}{2}\sup|C_i| \leq \left\|\sum_{i=1}^{i=n} C_i x_i\right\| \leq 2\ \sup\ |C_i|$$

d'où, d'une part $\displaystyle\sup_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\|\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i x_i\right\| \leq 2$

d'autre part

$$\int\left\|\sum_{i=1}^{i=n} f_i(t)x_i\right\|dt \geq \frac{1}{2}\int \sup_{1\leq i\leq n}|f_i(t)|\,dt\ ;$$

comme $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |f_n(t)| = +\infty$ p.s., l'identité de E ne peut pas être $(\gamma,1)$-sommante.

<u>$1 \Rightarrow 3$</u> : Si $1 \in I_E$ il existe $\varepsilon_o > 0$ tel que $1+\varepsilon_o \in I_E$ (cf. exposé XXII corollaire 3). Etant donné p dans $]0,\infty[$, on peut trouver α tel que

$$1 < \alpha \leq 1+\varepsilon_o \quad \text{et} \quad p \leq \alpha' \ (\text{où } \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}=1).$$

D'après le théorème de l'exposé XVII, puisque $\alpha \in I_E$ il existe une constante C_α telle que, pour toute suite finie (x_i) dans E, il existe des réels positifs α_i tels que

$$\sup_{\xi \in B_{E'}} (\Sigma|<\xi, \frac{x_i}{\alpha_i}>|^\alpha)^{1/\alpha} \leq 1$$

et

$$(\Sigma|\alpha_i|^{\alpha'})^{1/\alpha'} \leq C_\alpha \sup_{\varepsilon_i=\pm 1} \|\Sigma\, \varepsilon_i x_i\| \ .$$

(Rappelons que $\sup_{\xi \in B_{E'}} \Sigma|<\xi, x_i>| = \sup_{\varepsilon_i=\pm 1} \|\Sigma\, \varepsilon_i x_i\|$.)

On a alors : $\forall\, C_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\|\Sigma\, C_i x_i\| = \|\Sigma\, C_i \alpha_i \frac{x_i}{\alpha_i}\| \leq (\Sigma|C_i\alpha_i|^{\alpha'})^{1/\alpha'}$$

en particulier :

$$(\int\|\Sigma\, \eta_i(\omega) x_i\|^p dP(\omega))^{1/p} \leq (\int\|\Sigma\, \eta_i(\omega) x_i\|^{\alpha'} dP(\omega))^{1/\alpha'}$$

$$\leq \sup_n \|\eta_n\|_{L^{\alpha'}} (\Sigma|\alpha_i|^{\alpha'})^{1/\alpha'}$$

soit finalement

$$(\int\|\Sigma\, \eta_i(\omega) x_i\|^p dP(\omega))^{1/p} \leq C_\alpha \sup_n \|\eta_n\|_{L^{\alpha'}} \sup_{\varepsilon_i=\pm} \|\Sigma\, \varepsilon_i x_i\|$$

D'où le résultat avec $C_p = C_\alpha \sup_n \|\eta_n\|_{L^{\alpha'}}$.

Proposition 2 : Soit E un espace quasi-normé, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) L'identité de $l^p(E)$ est $(\gamma,1)$-sommante pour un p dans $]0,\infty[$.

ii) L'identité de E est (γ,ε)-sommante.

iii) L'identité de $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu,E)$ est (γ,ε)-sommante pour tout espace mesuré $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et pour tout p dans $]0,\infty[$.

Démonstration : i) $\Rightarrow$ ii). On note x(k) la k-ième composante d'un élément x de $l^p(E)$. Par hypothèse et d'après (1) et (2), il existe C telle que, pour toute suite finie $(x_i)_{1\le i\le n}$ dans $l^p(E)$:

$$(3)\qquad \int \sum_k \Big\| \sum_{i=1}^{i=n} x_i(k) f_i(t) \Big\|^p dt \le C^p \sup_{\varepsilon_i=\pm 1} \sum_k \Big\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i x_i(k) \Big\|^p ;$$

on peut écrire, si $(x_i)_{i\le i\le n}$ est une suite finie dans E

$$\int \Big\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t) x_i \Big\|^p dt = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{k=2^n} \Big\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t_k) x_i \Big\|^p$$

où

$$t_k \in \left]\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right[.$$

On pose alors

$$x_i(k) = \begin{cases} \varepsilon_i(t_k) x_i & \text{si} \quad 1 \le k \le 2^n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et on écrit (3) :

$$(4)\qquad \int \sum_{k=1}^{k=2^n} \Big\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t_k) x_i f_i(t) \Big\|^p dt \le C^p \sup_{\varepsilon_i=\pm 1} \sum_{k=1}^{k=2^n} \Big\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i \varepsilon_i(t_k) x_i \Big\|^p$$

mais le second membre vaut

$$2^n C^p \sup_{\varepsilon_i=\pm 1} \int dt \Big\| \sum \varepsilon_i \varepsilon_i(t) x_i \Big\|^p$$

soit encore (puisque $(\varepsilon_n(\cdot))$ est une suite symétrique sur $([0,1]dt)$)

$$2^n C^p \int dt \; \|\Sigma\, \varepsilon_i(t) x_i\|^p$$

. le premier membre vaut :

$$\sum_{k=1}^{k=2^n} \int dt \|\Sigma\; \varepsilon_i(t_k) x_i f_i(t)\|^p$$

soit encore (puisque (f_n) est une suite symétrique sur $([0,1],dt)$) :

$$2^n \int dt \; \|\sum_{i=1}^{i=n} x_i f_i(t)\|^p$$

on obtient donc en divisant (4) par 2^n :

$$\int dt \; \|\Sigma\, x_i f_i(t)\|^p \leq C^p \int dt \; \|\Sigma\; \varepsilon_i(t) x_i\|^p$$

et l'identité de E est bien (γ,ε)-sommante d'après (1) et (2) .

<u>ii) ⇒ iii)</u>. Quand μ est σ-finie, iii) s'obtient facilement par intégration (compte tenu de (1) et (2)) par rapport à μ de l'inégalité (0) puis en appliquant Fubini.

Dans le cas général, on utilise l'argument de l'exposé XXIII, théorème 4, pour se ramener au cas σ-fini.

Enfin iii) ⇒ i) est trivial.

<u>Proposition 3</u> : Soit E un espace de Banach dont l'identité est (γ,ε)-sommante. Soit (η_n) une suite symétrique de v. a. r. sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},P)$ vérifiant

$$\sup_n \left(\int |\eta_n|^p dP\right)^{1/p} < \infty \text{ pour tout } p \text{ dans }]0,\infty[.$$

Alors, pour tout p dans $]0,\infty[$, il existe une constante C_p telle que, pour toute suite finie (x_i) dans E :

$$\left(\int \|\Sigma\eta_i(\omega) x_i\|^p dP(\omega)\right)^{1/p} \leq C_p\left(\int \|\Sigma\; \varepsilon_i(t) x_i\|^p\, dt\right)^{1/p}$$

Démonstration : Si l'identité de E est (γ,ε)-sommante celle de $L^p([0,1],dt,E)$ l'est aussi (cf. prop.2) ; donc (prop. 1) il existe C_p telle que, pour toute suite finie (x_i) dans E

$$\left(\int \|\Sigma\, \eta_i(\omega)\ \varepsilon_i(.)x_i\|^p_{L^p([0,1],E)} dP(\omega)\right)^{1/p} \leq C_p \sup_{\varepsilon_i=\pm 1} \left(\int \|\Sigma\ \varepsilon_i\varepsilon_i(t)x_i\|^p dt\right)^{1/p}$$

Par des arguments de symétrie (les suites $(\varepsilon_i\varepsilon_i(t))$ et $(\varepsilon_i(t)\eta_i(\omega))$ sont distribuées respectivement comme $(\varepsilon_i(t))$ et $(\eta_i(\omega))$) on en déduit $\left(\int \|\Sigma\ \eta_i(\omega)x_i\|^p dt\right)^{1/p} \leq C_p\left(\int \|\Sigma\ \varepsilon_i(t)x_i\|^p dt\right)^{1/p}$. On aurait pu aussi faire une démonstration identique à celle de i) $\Rightarrow$ ii) dans la proposition. 2.

Lemme : Soit (η_n) une suite symétrique de v.a.r. sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{Q},P)$. La suite $\varepsilon_n(.) \otimes |\eta_n(.)|$ sur $([0,1]dt) \times (\Omega,P)$ est distribuée (sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) comme la suite (η_n). Si E est un espace de Banach et si (x_i) est une suite finie dans E on a, si les variables η_n sont intégrables et non nulles :

$$\left(\int \|\Sigma\ x_i\varepsilon_i(t)\|^p dt\right)^{1/p} \leq \frac{1}{\inf_n \|\eta_n\|_{L^1}} \left(\int \|\Sigma\ \eta_i(\omega)x_i\|^p dP(\omega)\right)^{1/p}$$

pour tout p dans $[1,\infty[$.

Démonstration : La première affirmation est élémentaire. Montrons la deuxième : fixons t, on a :

$$\left\|\int dP(\omega)\ \Sigma\ |\eta_i(\omega)|\ \varepsilon_i(t)x_i\right\| \leq \int \|\Sigma\ |\eta_i(\omega)|\varepsilon_i(t)x_i\|\ dP(\omega)$$

d'où en intégrant en t après élévation à la puissance p :

$$\left(\int dt\ \|\Sigma\ \|\eta_i\|_{L^1}\ \varepsilon_i(t)x_i\|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int \|\Sigma\,\varepsilon_i(t)\ |\eta_i(\omega)|x_i\|^p dP(\omega)\,dt\right)^{1/p};$$

d'après la 1ère partie de l'énoncé, le deuxième membre est égal à

$$\left(\int dP(\omega)\|\Sigma\ \eta_i(\omega)x_i\|^p\right)^{1/p};$$

d'après le principe de contraction (cf. exposé VII, lemme 1) :

$$(\int dt \, \| \Sigma \varepsilon_i(t) \, x_i \|^p)^{1/p} \leq \sup_i \frac{1}{\|\eta_i\|_{L^1}} \, (\int \| \Sigma \, \varepsilon_i(t) x_i \|\eta_i\|_{L^1} \|^p dt)^{1/p}$$

cqfd.

<u>Corollaire</u> : Soit E un espace de Banach dont l'identité est (γ,ε)-sommante, soit η_n une suite symétrique sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{a},P)$ telle que : . $\delta = \inf \|\eta_n\|_{L^1} > 0$.

. $\sup_n \| \eta_n \|_{L^p} < \infty$ pour tout p dans $]0,\infty[$.

Alors pour tout p dans $[1,\infty[$ il existe une constante a_p telle que : pour toute suite finie (x_i) dans E

$$(\int \|\Sigma \, \eta_i \, x_i \|^p dP)^{1/p} \leq a_p \int \| \Sigma \, \eta_i \, x_i \| \, dP.$$

D'après la proposition précédente,

$$(\int \| \Sigma \, \eta_i x_i \|^p dP \,)^{1/p} \leq C_p (\int \| \Sigma \, \varepsilon_i(t) x_i \|^p dt \,)^{1/p} \; .$$

D'après (1)

$$(\int \| \Sigma \, \varepsilon_i(t) x_i \|^p dt)^{1/p} \leq d_p \int \|\Sigma \, \varepsilon_i(t) x_i \| \, dt$$

enfin, d'après le lemme

$$\int \| \Sigma \, \varepsilon_i(t) x_i \| \, dt \leq \frac{1}{\delta} \int \|\Sigma \, \eta_i \, x_i \| \, dP$$

d'où le résultat avec

$$a_p = \frac{C_p d_p}{\delta} \quad .$$

<u>Remarque 2</u> : La conclusion de la proposition 3 n'est évidemment vraie que si l'identité de E est $(\gamma$-$\varepsilon)$-sommante. Par contre, cela n'est plus le cas a priori pour le corollaire. Celui-ci est à rapprocher des résultats de Hoffman-Jørgensen (exposé VI) ; il faut remarquer qu'aucune hypothèse

d'indépendance n'est faite : les hypothèses numériques équivalent à dire que (η_n) est une suite basique équivalente à la base canonique de l^2 et ceci dans $L^p(\Omega,P)$ pour tout p dans $]0,\infty[$. Il est possible que ce corollaire soit vrai dans tout Banach.

Les propositions 2 et 3 résolvent en partie un problème posé par Hoffmann-Jørgensen (1). Celui-ci a conjecturé que les espaces E dans lesquels la convergence p.s de $\Sigma\, \varepsilon_n(.)x_n$ équivaut à celle de $\Sigma\, \eta_n x_n$ quand (η_n) est une suite de variables indépendantes équidistribuées suivant une loi symétrique ayant certaines propriétés de régularité à l'infini, étaient ceux qui ne contenaient pas c_o. Comme, pour de telles séries, la convergence p.s équivaut à la convergence dans $L^o(E)$ ou dans $L^p(E)$, un tel énoncé -sans constante- se ramène aisément à un énoncé avec constante. L'espace $l^2(l^\infty_n)$ des suites (x_k) dans $\prod_{k=1}^{\infty} l^\infty_k$ telles que $\Sigma\, \|x_k\|^2 < \infty$ est un contre exemple car il est réflexif (donc ne contient pas c_o) mais il contient des l^∞_n uniformément (la conjecture est donc fausse avec $\eta_n = f_n$).

En fait, les propositions 2 et 3 montrent que les espaces en question sont exactement les espaces E tels que $l^1(E)$ (ou $l^p(E)$, ou $L^p([0,1],E)$) ne contient pas de l^∞_n uniformément.
pour $p\geq 1$

Par ailleurs, les hypothèses de la proposition 3 sur les (η_n) sont moins restrictives que celles de (1). Il paraît raisonnable de conjecturer que si $L^1([0,1],E)$ contient uniformément des l^∞_n, il en est de même de E.

Posé en ces termes le problème est à rapprocher d'une seconde conjecture de (1) : si $L^1([0,1],dt,E)$ contient c_o, est-ce que E le contient aussi ?

En termes d'opérateurs sommants, le problème équivaut à : si $1 \in I_E$ est-ce que $1 \in I_{l^2(E)}$?, il est alors naturel de le rapprocher d'un problème de (3) : si $2 \in I_E$ est-ce que $2 \in I_{l^2(E)}$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Hoffmann-Jørgensen : Sums of independent Banach space valued random variables. Aarhus Universitet Matematisk Institut, Preprint series 72-73, n°15.

[2] J. P. Kahane : Some random series of functions, Heath Mathematical monographs, 1968.

[3] B. Maurey : Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans un espace L^p. A paraître dans Astérisque.