B. Beauzamy

Le théorème de Dvoretzky (suite)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 27, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A26_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

SEMINAIRE MAUREY-SCHWARTZ 1972-1973

LE THEOREME DE DVORETZKY

(suite)

par B. BEAUZAMY

Exposé N° XXVII

13 Juin 1973

Considérons un espace de Banach $\mathcal{E}$ de dimension N et un espace euclidien E de même dimension. Si I est un isomorphisme algébrique de $\mathcal{E}$ sur E, l'image $I(\mathcal{B})$ de la boule unité de $\mathcal{B}$ est un corps convexe de E, que nous noterons encore $\mathcal{B}$. Si on munit E de la norme définie par la jauge de $\mathcal{B}$, I est alors un isomorphisme isométrique de $\mathcal{E}$ sur E ; on dira que dans ces conditions E est une réalisation du Banach $\mathcal{E}$.

Quitte à faire des transformations qui sont des isométries d'espaces de Banach, on peut obtenir pour $\mathcal{B}$ la disposition qu'indique le lemme 2.

Notons $r(x) = \|x\|_{\mathcal{E}}$, et si $x \in F_n$, sous-espace de E_N de dimension n donné par le lemme 2, posons

$$r_\infty(x) = \|x\|_{l^\infty}$$

D'après le lemme 2, on a donc :

$$r(x) \leq \|x\|_E \qquad \text{pour } x \in E$$

et

$$\frac{r_\infty(x)}{2} \leq r(x) \qquad \text{pour } x \in F_n.$$

On va maintenant se placer dans F_n. Soit S_n sa sphère unité. On considère l'ensemble $\mathfrak{U}_{\varepsilon_1}(r)$, ε_1-voisinage de l'ensemble $\{r(x) = C_n(r)\}$. Par conséquent, pour tout point x_o de $\mathfrak{U}_{\varepsilon_1}(r)$ (noté plus simplement $\mathfrak{U}_{\varepsilon_1}$), il existe un point x_o de l'ensemble $\{r(x) = C_n(r)\}$ tel que $\|x - x_o\|_E \leq \varepsilon_1$.

On a :

$$|r(x) - C_n(r)| = |r(x) - r(x_o)| \leq |r(x - x_o)| \leq \|x - x_o\|_E \leq \varepsilon_1$$

Posons $\varepsilon_1 = C_n(r)\,\varepsilon_o$ (ε_1 dépend alors de n).

D'après le lemme 1, pour ε_2, il existe un sous-espace F_k (de dimension k) de F_n tel que tout point de S_k se trouve à une distance inférieure ou égale à ε_2 de l'ensemble $S_k \cap \mathfrak{A}_{\varepsilon_1}$.

La dimension de F_k est fonction de n, ε_o, ε_2, et est donnée par la formule :

$$\dim F_k = \left[\frac{1/2\ \varepsilon_o^2\ C_n^2(r)n - \log \frac{1}{\varepsilon_2} - \log 2}{- \log \sin \frac{\varepsilon_2}{2}} \right] + 2$$

On va montrer que la distance entre F_k muni de la norme induite par $\mathcal{E}$ et F_k muni de la norme euclidienne est inférieure à ε.

On a vu que pour tout $x \in S_k \cap \mathfrak{A}_{\varepsilon_1}$, on avait

$$|r(x) - C_n(r)| \leq \varepsilon_o\ C_n(r) ,$$

on va faire, pour simplifier les calculs, une transformation de la norme euclidienne ; on remplace $\|x\|_E$ par $\frac{1}{C_n(r)} \|x\|_E$. On notera $\|\ \ \|$ la nouvelle norme euclidienne. On pose

$$\mathfrak{A}' = \frac{1}{C_n(r)} \left[S_k \cap \mathfrak{A}_{\varepsilon_1} \right] ;$$

soit S' la nouvelle sphère unité.

Après cette transformation, tout point de $\mathfrak{A}'$ vérifie

$$(1) \qquad |r(x) - 1| < \varepsilon_o,$$

et tout point de S_k est à une distance inférieure ou égale à ε_2 de $\mathfrak{A}'$.

Soit $x \in (1 - \varepsilon_o)\mathfrak{A}'$. On peut poser $x = (1 - \varepsilon_o)y$, $y \in \mathfrak{A}'$, et on a :

$$r(x) = (1 - \varepsilon_o) r(y) .$$

Or, d'après (1), on a

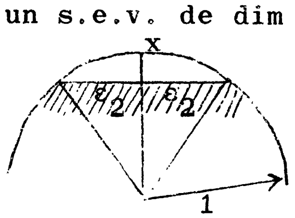
$$1 - \varepsilon_o \leq r(y) \leq 1 + \varepsilon_o,$$

et donc $r(x) \leq (1-\varepsilon_o)(1+\varepsilon_o) < 1$.

Donc $x \in \mathcal{B}$, boule unité du Banach. Donc $(1-\varepsilon_o)\mathfrak{A}' \subset \mathcal{B}$, et, puisque $\mathcal{B}$ est convexe, on a aussi

$$\operatorname{conv}\ (1-\varepsilon_o)\mathfrak{A}' \subset \mathcal{B}.$$

D'autre part, puisque tout point x de S' est à une distance de $\mathfrak{A}'$ inférieure à ε_2, un homothétique de rapport convenable de conv $\mathfrak{A}'$ contient S'. Soit $1/\mathcal{L}$ le rapport de cette homothétie. Si l'on considère une section convenable par un s.e.v. de dim 2, on a la figure suivante



On en déduit que $1-\mathcal{L} = 1-\sqrt{1-\varepsilon_2^2}$ est de l'ordre de $\varepsilon_2^2/2$.

On a donc :

$$\mathcal{L}\ S' \subset \operatorname{conv} \mathfrak{A}'$$

et

$$\mathcal{L}\,(1-\varepsilon_o)S' \subset \operatorname{conv}\ (1-\varepsilon_o)\mathfrak{A}' \subset \mathcal{B}.$$

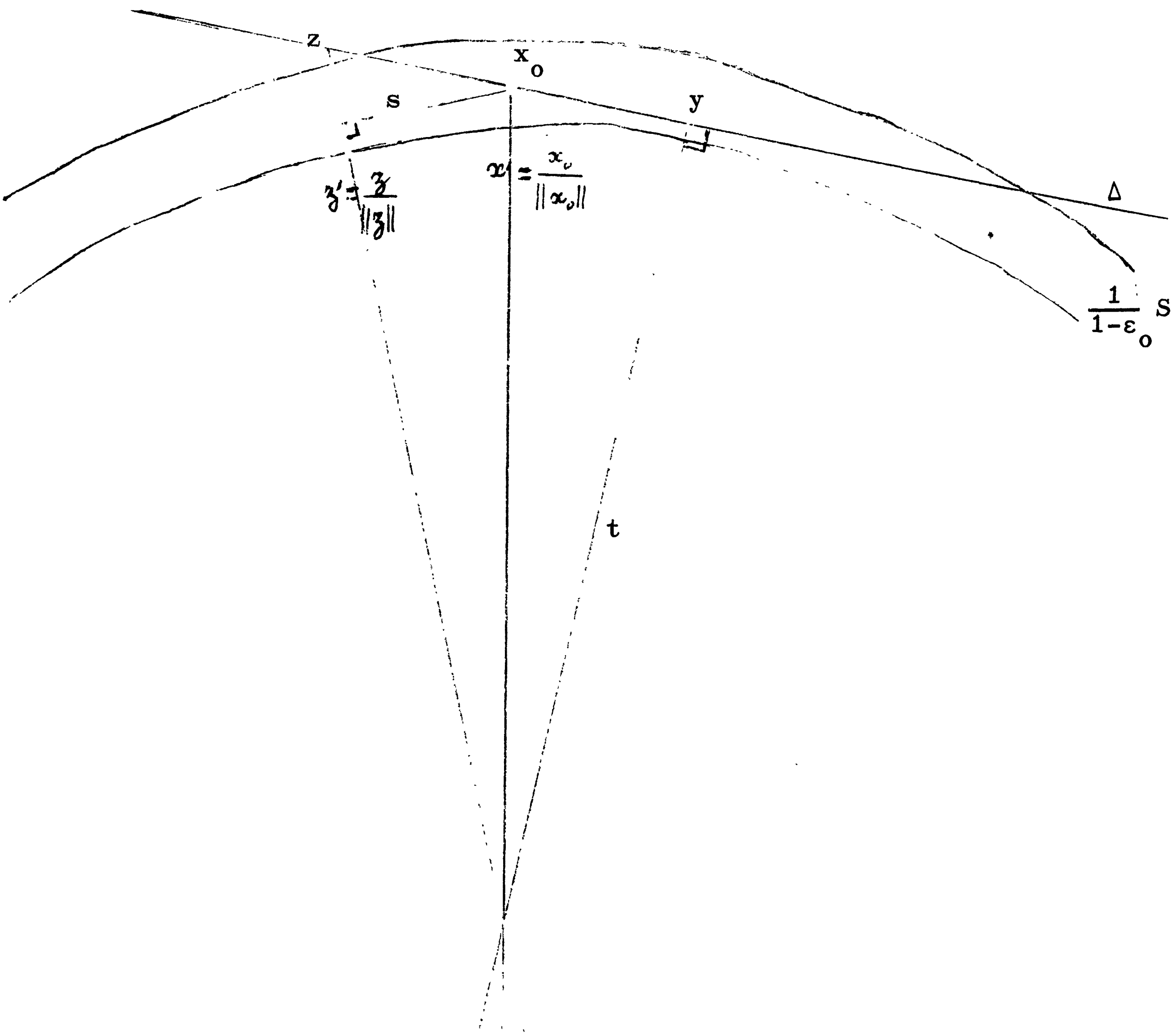
Considérons $z \in \mathcal{B} \cap F_k$. On a $r(z) = 1$, et $\|z\| \geq 1$. Considérons les éléments $z \in \mathcal{B} \cap F_k$ pour lesquels on a $\|z\| > \frac{1}{1-\varepsilon_o}$. Il existe $x_o \in \mathcal{B}$ tel que $\frac{x_o}{\|x_o\|} \in \mathfrak{A}'$, et tel que $\frac{x_o}{\|x_o\|}$ et $\frac{z}{\|z\|}$ soient voisins à moins de ε_2, c'est-à-dire

$$\frac{x_o}{\|x_o\|} - \frac{z}{\|z\|} \leq \varepsilon_2$$

Puisque $\frac{x_o}{\|x_o\|} \in \mathfrak{A}'$, on a $1-\varepsilon_o \leq r(\frac{x_o}{\|x_o\|})$ d'où $\frac{1}{\|x_o\|} \geq 1-\varepsilon_o$ et

$\| x_o \| \leq \dfrac{1}{1 - \varepsilon_o}$.

On considère l'espace de dimension 2 engendré par z et x_o. Soit Δ la droite joignant z à x_o



Soit t la distance de O à Δ ; soit s la distance de x_o à $\{\lambda z\}$. Soit $x'_o = \dfrac{x_o}{\|x_o\|}$, $z' = \dfrac{z}{\|z\|}$.

On a $s < \varepsilon_2 \dfrac{1}{1 - \varepsilon_0}$, car la distance de x' à z' est inférieure à ε_2, donc il en est de même de la distance de x' à $\{\lambda z\}$ et le rapport de l'homothétie qui fait passer de x'_o à x_o est inférieur à $\dfrac{1}{1 - \varepsilon_o}$.

D'autre part, puisque $\mathcal{B}$ est convexe, $r(\lambda z + (1-\lambda)x_o) \geq 1$ lorsque $\lambda < 0$ (c'est-à-dire à droite de x_o sur la figure). Considérons d'abord le cas où la distance t de 0 à Δ est atteinte en un point situé entre x_o et z (c'est-à-dire $0 \leq \lambda \leq 1$). Alors cette distance est certainement supérieure à la distance de 0 à la droite Δ' joignant z' et x_o' ; cette dernière vaut $t' = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_2^2}{4}}$. On a donc $t \geq \sqrt{1-\frac{\varepsilon_2^2}{4}}$. Dans la cas où elle est atteinte pour un $\lambda < 0$, soit y le point correspondant. Puisque $\mathcal{B}$ est convexe, on a $r(y) \geq 1$, et, puisque $\mathcal{K}(1-\varepsilon_o)S' \subset \mathcal{B}$, on a $t \geq \mathcal{K}(1-\varepsilon_o)$. Cette dernière condition sera toujours vérifiée si

$$\sqrt{1-\frac{\varepsilon_2^2}{4}} \geq \mathcal{K}(1-\varepsilon_o), \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$\varepsilon_2^2 \leq 4[1-\mathcal{K}^2(1-\varepsilon_o)^2], \text{ d'où :}$$

① $$\varepsilon_2 \leq 2\sqrt{1-\mathcal{K}^2(1-\varepsilon_o)^2}.$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{\|z\|}{\|z-x_o\|} = \frac{t}{s} .$$

On en déduit que, si ε_2 vérifie ①,

$$\frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_o}\|z\| \geq s\|z\| = t\|z-x_o\| \geq \mathcal{K}(1-\varepsilon_o)\|z-x_o\| \geq (1-\varepsilon_o)(\|z\|-\|x_o\|)$$

D'où :

$$\frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_o}\|z\| \geq \mathcal{K}(1-\varepsilon_o)\|z\| - \mathcal{K}(1-\varepsilon_o)\|x_o\|$$

et

$$\left(\mathcal{K}(1-\varepsilon_o) - \frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_o}\right)\|z\| \leq \mathcal{K}(1-\varepsilon_o)\|x_o\|$$

d'où
$$\frac{\mathcal{K}(1-\varepsilon_o)^2-\varepsilon_2}{1-\varepsilon_o}\ \|z\| \leq \mathcal{K}(1-\varepsilon_o)\,\|x_o\|$$

c'est-à-dire :

$$\|z\| \leq \frac{\mathcal{K}(1-\varepsilon_o)^2}{\mathcal{K}(1-\varepsilon_o)^2-\varepsilon_2}\ \|x_o\|$$

Or on sait que $\|x_o\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon_o}$.

Si l'on veut que $\|z\| \leq 1+2\,\varepsilon_o$, il suffit donc que

$$\frac{\mathcal{K}(1-\varepsilon_o)}{\mathcal{K}(1-\varepsilon_o)^2-\varepsilon_2} \leq 1+2\,\varepsilon_o$$

d'où

$$\varepsilon_2 \leq \mathcal{K}\,[(1-\varepsilon_o)^2-\frac{(1-\varepsilon_o)}{1+2\varepsilon_o}]$$

$$\leq \mathcal{K}[1-\varepsilon_o]\ \frac{(1-\varepsilon_o)(1+2\varepsilon_o)-1}{1+2\,\varepsilon_o}$$

② $$\leq \mathcal{K}\ \frac{\varepsilon_o(1-\varepsilon_o)(1-2\varepsilon_o)}{1+2\,\varepsilon_o}$$

Comme on a certainement $\mathcal{K} \geq 1-\varepsilon_2^2$, il suffit, pour que la condition ② soit vérifiée, que l'on ait

$$\varepsilon_2 \leq (1-\varepsilon_2^2)\ \frac{\varepsilon_o(1-\varepsilon_o)(1-2\varepsilon_o)}{1+2\,\varepsilon_o}$$

et dès que $\varepsilon_2 \leq 1/2$, il suffira que

③ $$\varepsilon_2 \leq \frac{3}{4}\ \frac{\varepsilon_o(1-\varepsilon_o)(1-2\varepsilon_o)}{1+2\varepsilon_o}$$

On vérifie aisément que la condition ③ implique la condition ① . Par conséquent, lorsque ③ est vérifiée, on a

$$\|z\| \leq 1-2\varepsilon_o$$

Comme d'autre part on sait que $\|z\| \geq 1$, on en déduit que la distance de F_k en norme euclidienne à F_k en norme $r(x)$ est majorée par $1 + 2\varepsilon_0$.

Ceci achève la démonstration de la première partie du théorème.

Il reste à montrer que la dimension k du sous-espace considéré tend vers l'infini avec n. Nous allons pour cela utiliser la seconde partie du lemme 2.

On a vu que, pour $x \in E_n$,

$$\frac{r_\infty(x)}{2} \leq r(x).$$

On en déduit aisément que

$$C_n(\frac{r_\infty}{2}) \leq C_n(r)$$

Or, on peut montrer que

$$C_n(\frac{1}{f}) = \frac{1}{C_n(f)}$$

Posons $R_n = \frac{1}{C_n(r_\infty(x))} = C_n(\frac{1}{r_\infty(x)})$. Si nous montrons que :

$$n\, C_n^2(r_\infty) \underset{n \to \infty}{\to} \infty ,$$

on en déduira que

$$n\, C_n^2(r) \underset{n \to \infty}{\to} \infty$$

et donc que $k \underset{n \to \infty}{\to} \infty$.

Or, pour cela, il nous suffit de montrer que :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ \frac{1}{C_n(r_\infty)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\, C_n(\frac{1}{r_\infty}) \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

c'est-à-dire que $R_n = o(\sqrt{n})$, $n \to \infty$.

Nous allons donc montrer le lemme

Lemme 3 : (Dvoretzky-Figiel) Soit, dans la situation du théorème, et avec les notations, $R_n = \dfrac{1}{C_n(r_\infty)}$. Alors $R_n = o(\sqrt{n})$, lorsque $n \to \infty$.

Démonstration : Posons :

$$\sigma_n = \mu_n(S_n),$$

où μ_n, déjà introduite, est la mesure $n-1$ dimensionnelle sur S_n. On a :

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} .$$

Posons en outre :

$$M_n = \int_{S_n} \frac{1}{r_\infty(x)}\, d\tilde{\mu}_n(x) = \frac{1}{\sigma_n}\int_{S_n} \frac{1}{r_\infty(x)}\, d\mu_n(x) .$$

Il est aisé de vérifier que

$$R_n < 2M_n$$

En effet, l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff permet d'affirmer que :

$$\tilde{\mu}_n\{\frac{1}{r_\infty} < 2\int \frac{1}{r_\infty}\, d\tilde{\mu}_n\} > 1/2 .$$

Pour démontrer le lemme, il suffit donc de vérifier que $M_n = o(\sqrt{n})$. En fait, on peut même montrer que

$$M_n = \sqrt{\frac{n}{2\log n}} + O\left(\frac{\sqrt{n}\,\log\log n}{\log^{3/2} n}\right)$$

Nous nous limiterons à la démonstration de la première assertion, et nous renvoyons à [4] pour la seconde .

Considérons la fonction $f_n \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, définie par

$$f_n(x) = \pi^{-n/2} \quad \frac{e^{-\|x\|^2}}{r_\infty(x)} \quad ,$$

et on pose $I_n = \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\,dx$.

On va d'abord calculer I_n en coordonnées sphériques. On a :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\infty dR \int_{\|x\|=R} f_n(x)\,d\mu_n(x). \\
&= \int_0^\infty dR \int_{\|x\|=R} \pi^{-n/2} \frac{e^{-R^2}}{r_\infty(x)}\,d\mu_n(x) \\
&= \int_0^\infty dR \int_{S_n} \pi^{-n/2} \frac{e^{-R^2} R^{n-1}}{r_\infty(x)} \frac{1}{R}\,d\mu_n(x) \\
&= \int_0^\infty \sigma_n\, \pi^{-n/2} e^{-R^2} R^{n-2} \Big(\frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} \frac{1}{r_\infty(x)}\,d\mu_n(x)\Big)\,dR \\
&= \int_0^\infty \sigma_n\, R^{n-2}\, e^{-R^2}\, M_n\,dR. \\
&= \frac{2M_n}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty R^{n-2}\, e^{-R^2}\,dR\,,
\end{aligned}$$

et donc on a :

$$I_n = M_n \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad .$$ Or on sait que :

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} = \sqrt{\frac{n}{2}} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

Pour achever la démonstration, il suffit donc de montrer que I_n est bornée. Pour cela, posons :

$$\psi(t) = \int_{r_\infty \leq t} f_n(x)\,dx$$

et

$$\eta(t) = \pi^{-n/2} \int_{r_\infty \le t} e^{-\|x\|^2} dx$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n \int_{r_\infty \le t} e^{-|x_1|^2} \ldots\ldots e^{-|x_n|^2} dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n \left(\int_{|x_1| \le t} e^{-|x_1|^2} dx_1\right) \ldots \left(\int_{|x_n| \le t} e^{-|x_n|^2} dx_n\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^n \left(\int_o^t e^{-u^2} du\right)^n .$$

Montrons que $\psi'(t) = \frac{1}{t} \eta'(t)$. On a :

$$\psi'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{t \le r_\infty \le t+h} f_n(x) dx$$

$$\eta'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{t \le r_\infty \le t+h} e^{-\|x\|^2} dx$$

d'où

$$\psi'(t) - \frac{1}{t} \eta'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{t \le r_\infty \le t+h} e^{-\|x\|^2} \left(\frac{1}{r_\infty(x)} - \frac{1}{t}\right) dx = 0$$

On a :

$I_n = \int_o^\infty d\psi(t) = \int_o^\infty \frac{1}{t} d\eta(t) = \int_o^\infty \frac{1}{t^2} \eta(t)\, dt$, après intégration par parties.

Donc :

$$I_n = \int_o^\infty \frac{1}{t^2} \left(\int_o^t e^{-u^2} du\right)^n dt .$$

On va montrer que I_n, en tant que fonction de u, est bornée. Pour cela, on décompose I_n en deux morceaux :

$$I_n^1 = \int_1^\infty \frac{1}{t^2} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_o^t e^{-u^2} du\right)^n dt \le \int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt = 1$$

$$I_n^2 = \int_o^1 \frac{1}{t^2} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_o^t e^{-u^2} du\right)^n dt$$

or $\int_0^t e^{-u^2}du \leq t$, donc I_n^2 est convergente dès que $n \geq 2$. Puisque

$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2}du \leq 1$, l'intégrale est une fonction décroissante de n, ce qui achève la démonstration du lemme 3, et celle du théorème.

Nous allons maintenant donner une application du théorème de Dvoretzky en démontrant un résultat dû à J. Lindenstrauss et L. Tzafriri [3] :

<u>Théorème</u> : Un espace de Banach dont tous les sous-espaces fermés sont complémentés est isomorphe à un espace de Hilbert.

Rappelons tout d'abord qu'un sous-espace F d'un espace de Banach $\mathcal{E}$ est dit complémenté s'il existe une projection de $\mathcal{E}$ sur F.

Nous admettons le lemme suivant, dont la démonstration peut être trouvée dans [1] :

<u>Lemme 3</u> : Soit $\mathcal{E}$ un espace de Banach dont tout sous-espace est complémenté. Alors il existe $\lambda \geq 1$ tel que tout sous-espace de dimension finie soit l'image d'une projection de norme inférieure ou égale à λ.

Nous aurons également besoin du lemme suivant :

<u>Lemme 4</u> : Soit $\mathcal{E}$ un espace de Banach vérifiant la propriété suivante : il existe un nombre β tel que tout sous-espace F de dimension finie n de $\mathcal{E}$ se trouve à une distance inférieure ou égale à β de l'espace euclidien l_n^2.

Alors $\mathcal{E}$ est isomorphe à un espace de Hilbert.

<u>Démonstration</u> : On peut plonger $\mathcal{E}$ dans l'ultraproduit de ses sous-espaes de dimension finie, qui, d'après l'hypothèse, est isomorphe à un ultraproduit d'espaces de Hilbert. Mais un ultraproduit d'espaces de Hilbert est lui-même isomorphe à un espace de Hilbert, d'où la conclusion. (Voir [5], et voir aussi [2] pour une autre méthode).

Démonstration du théorème : On suppose $\mathcal{E}$ de dimension infinie, sinon il n'y a rien à démontrer. Soit λ la constante donnée par le lemme 3. Soit B un sous-espace de $\mathcal{E}$ de dimension n, et posons

(1) $$\alpha = d(B, l_n^2).$$

On veut montrer, pour pouvoir appliquer le lemme 4, que l'on peut majorer α par un nombre indépendant de n.

Nous reprenons les notations de [3]. Soit Q une projection de $\mathcal{E}$ sur B de norme inférieure ou égale à λ. D'après le théorème de Dvoretzky, il existe un sous-espace C de $(I - Q)\mathcal{E}$ (où I désigne l'identité) tel que l'on ait :

(2) $$d(C, l_n^2) \leq 2.$$

(On peut appeler C supplémentaire de B relativement à la projection Q).

Il résulte de (1) et (2) que B et C sont isomorphes ; on peut trouver un isomorphisme T de B sur C tel que l'on ait :

$$\frac{1}{2\alpha} \|x\| \leq \|Tx\| \leq \|x\| ,$$

pour tout $x \in B$.

Notons D le sous-espace de $\mathcal{E}$ constitué des éléments de la forme :

$$D = \{x + \mu\, Tx, \qquad x \in B\},$$

où $\mu = 2^6 \lambda^2$.

Soit P une projection de norme inférieure ou égale à λ sur D. Tout élément de D se décompose donc en la somme d'un élément de B et d'un élément de C. Soit $V = QPT$, opérateur de B dans lui-même. Montrons que l'on a, pour tout $x \in B$:

$$PTx = Vx + \mu\, TVx.$$

On peut décomposer, par hypothèse :

$$P\,Tx = y + \mu T y\,, \qquad \text{où } y \in B.$$

Il s'agit donc de montrer que :

$$y + \mu Ty = Q(y + \mu\, T y) + \mu\, TQ(y+\mu T y)$$

Or, puisque $y \in B$, $Qy = y$, et , par construction, on a $Q\,T = 0$.

On en déduit l'inégalité annoncée .

On a donc :

$$\|V_x\| \leq \lambda^2\ \|T_x\|.$$

D'autre part, pour tout $x \in B$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} Px &= P(x + \mu\, Tx) - \mu P\, Tx \\ &= x + \mu\, Tx - \mu\, PT\, x, \text{ puisque } x + \mu Tx \in D, \end{aligned}$$

(3) $$Px = x + \mu\, Tx - \mu\,(\,Vx + \mu T\ Vx).$$

Or, si l'on remarque que

$$x = Q(x + \mu\, Tx) = Q\,P(x + \mu Tx) = Q\,Px + \mu\, Q\,P\,Tx,$$

on déduit de (3) :

$$(I - Q)Px = \mu(Tx - \mu\, T\,Vx).$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \|(I - Q)Px\| &= \mu\|Tx - \mu\, TVx\| \\ &\geq \frac{\mu}{2\alpha}\|x - \mu\, Vx\| \\ &\geq \frac{\mu}{2\alpha}\,(\,\|x\| - \mu\|Vx\|) \\ &\geq \frac{\mu}{2\alpha}\,(\,\|x\| - \mu\lambda^2\ \|\,Tx\|) \end{aligned}$$

Cette minoration n'a évidemment d'intérêt que lorsque $\|T\| \leq \frac{1}{\mu\lambda^2} \|x\|$.

D'autre part, d'après (2), il existe un isomorphisme $\mathfrak{U}$ de C sur l_n^2 tel que, pour tout $y \in C$, on ait :

$$\frac{1}{2}\|y\| \leq \|\mathfrak{U}y\| \leq \|y\|.$$

Considérons l'espace de Hilbert $l_n^2 \oplus l_n^2$, muni de la norme

$$(\Sigma\, a_n^2 + \Sigma\, b_n^2)^{1/2}$$

et considérons l'opérateur $\hat{T}$ de B dans $l_n^2 \oplus l_n^2$ défini par

$$\hat{T}x = (\frac{1}{2}\,\mathfrak{U}\,Tx\,,\ \frac{1}{4\lambda^2}\,\mathfrak{U}(I - Q)Px)$$

D'après la définition de la norme, on a :

$$\|\hat{T}x\| \leq \frac{1}{2}\,\|\mathfrak{U}\,Tx\| + \frac{1}{4\lambda^2}\,\|\mathfrak{U}(I - Q)Px\|$$

$$\|\hat{T}x\| \leq \frac{1}{2}\|\mathfrak{U}\|\ \|T\|\ \|x\| + \frac{1}{4\lambda^2}\|\mathfrak{U}\|\ \|I - Q\|\ \|P\|\ \|x\|$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\|x\| + \frac{\lambda(\lambda+1)}{4\lambda^2}\,\|x\| \leq \|u\|.$$

Et, toujours la définition de la norme de $l_n^2 \oplus l_n^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\|\hat{T}x\| &\geq \max\,[\frac{1}{2}\|\mathfrak{U}\,T\,x\|,\ \frac{1}{4\lambda^2}\,\|\mathfrak{U}(I-Q)\,P\,x\|\,] \\
&\geq \max\,[\frac{1}{4}\|Tx\|\ ,\ \frac{1}{8\,\lambda^2}\,\|(I-Q)P\,x\|] \\
&\geq \max\,[\frac{1}{4}\,\|Tx\|,\frac{\mu}{16\alpha\lambda^2}\,(\|x\| - \mu\,\lambda^2\|Tx\|)
\end{aligned}$$

On va considérer deux cas.

- Supposons d'abord que l'on ait

$$\lambda^4 2^7\,\|Tx\| \geq \|x\|,$$

alors

$$\|\hat{T}x\| \geq \frac{1}{4}\|Tx\| \geq \frac{1}{\lambda^4 2^9}\|x\|$$

- Si l'on a

$$\lambda^4 2^7 \| Tx \| < \|x\|,$$

puisque $\mu = 2^6\lambda^2$, on peut écrire :

$$\|\hat{T}x\| \geq \frac{\mu}{16\alpha\lambda^2}(\|x\| - \lambda^4 2^6\|Tx\|)$$

$$\geq \frac{\mu}{2^5\alpha\lambda^2}\|x\| = \frac{2}{\alpha}\|x\|$$

On a donc finalement :

$$\|\hat{T}x\| \geq \min\left(\frac{2}{\alpha},\frac{1}{\lambda^4 2^9}\right)\|x\|, \text{ pour tout } x \in B.$$

Par conséquent, $\hat{T}$ est un isomorphisme de B sur l_n^2. Si l'on avait :

$$\|\hat{T}x\| \geq \frac{2}{\alpha}\|x\|,$$

On pourrait écrire :

$$\frac{2}{\alpha}\|x\| \leq \|\hat{T}x\| \leq \|x\|$$

et la distance de B à l_n^2 serait inférieure à $\frac{\alpha}{2}$, ce qui contredit l'hypothèse $d(B,l_n^2) = \alpha$. On a donc :

$$\|\hat{T}x\| \geq \frac{1}{\lambda^4 2^9}\|x\|$$

et

$$\frac{1}{\lambda^4 2^9}\|x\| \leq \|\hat{T}x\| \leq \|x\|$$

d'où

$$\alpha = d(B,l_n^2) \leq \lambda^4 2^9,$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. J. Davis, D. W. Dean and I. Singer : Complemented subspaces and Λ systems in Banach spaces, Israël J. of Maths 6-(1968)-303-309.

[2] J. Lindenstrauss : On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces, Michigan Math. J. 10 (1963) - 241-252.

[3] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri : On the complemented subspaces problem, Israël J. of Maths vol. 9 - 1971, 263-269.

[4] V. D. Milman : New proof of the theorem of A. Dvoretzky on intersections of convex bodies.

[5] Séminaire Maurey-Schwartz 1972-1973, exposé XVIbis.