B. MAUREY

Probabilités cylindriques, type et ordre. Applications radonifiantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 1, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A1_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

:NTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - 75230 PARIS CEDEX 05

Téléphone : 633-25-79

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

PROBABILITES CYLINDRIQUES, TYPE ET ORDRE. APPLICATIONS RADONIFIANTES

par B. MAUREY

Exposé N° I

25 Octobre 1972

1. PROBABILITES CYLINDRIQUES

Soit E un e.l.c.s. Si N est un sous-espace fermé de E, on notera π_N la projection canonique de E sur E/N. Si M est un autre sous-espace fermé tel que $N \subset M$, il existe une projection $\pi_{M,N}$ de E/N sur E/M telle que : $\pi_M = \pi_{M,N} \circ \pi_N$.

On appelle probabilité cylindrique λ sur E la donnée d'un système projectif de probabilités (nécessairement de Radon) sur les quotients de dimension finie E/N. Autrement dit on se donne pour tout sous-espace fermé N de codimension finie une probabilité $\pi_N(\lambda)$ sur E/N de façon que :

$$N \subset M \Rightarrow \pi_{M,N}(\pi_N(\lambda)) = \pi_M(\lambda)$$

Soient maintenant F un evts, et u un opérateur linéaire continu de E dans F, de rang fini. Le noyau N = Ker u est un sous-espace fermé de codimension finie, et u admet la factorisation :

$$E \xrightarrow{\pi_N} E/N \xrightarrow{\bar{u}} F$$

Nous poserons $u(\lambda) = \bar{u}(\pi_N(\lambda))$. C'est une probabilité de Radon sur F.

Soient E et F deux elcs, u un opérateur linéaire continu de E dans F et λ une probabilité cylindrique sur E. Si N est un sous-espace fermé de codimension finie de F, $\pi_N \circ u$ est de rang fini. Nous définirons une probabilité cylindrique λ' sur F par

$$\pi_N(\lambda') = \pi_N \circ u(\lambda)$$

(On vérifie facilement les relations de compatibilité). Nous dirons que λ' est l'image de λ par u, et nous noterons $\lambda' = u(\lambda)$. Si $\xi \in F'$, on aura évidemment :

$$\xi(u(\lambda)) = {}^t u(\xi)(\lambda)$$

Soient E un elcs et μ une probabilité de Radon sur E. On déduit de μ une probabilité cylindrique $\tilde{\mu}$ sur E en posant :

$$\pi_N(\tilde{\mu}) = \pi_N(\mu)$$

Nous dirons qu'une probabilité cylindrique λ sur E "est de Radon" s'il existe une probabilité de Radon μ sur E telle que $\lambda = \tilde{\mu}$.

Si μ_1 et μ_2 sont deux probabilité de Radon sur E telles que $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$, il résulte du théorème de Prokhorov ([1], exposé 1) que $\mu_1 = \mu_2$. Nous pourrons donc encore noter μ la probabilité cylindrique déduite d'une probabilité de Radon μ.

Rappelons la notion de fonction de type positif. Soient E un espace vectoriel et f une fonction sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que f est de type positif si :

$$\forall n \;;\; \forall\ (c_1, \ldots c_n) \in \mathbb{C}, \qquad \forall\ (x_1, \ldots x_n) \in E :$$

$$\Sigma\ c_i\ \bar{c}_j\ f(x_i - x_j) \geq 0.$$

Par exemple $f(x) = e^{ix}$ est une fonction de type positif sur $\mathbb{R}$. Rappelons le théorème de Bochner. Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; pour qu'une distribution tempérée T sur E soit une probabilité, il faut et il suffit que sa transformée de Fourier $\mathfrak{F}T$ soit une fonction de type positif continue sur E', avec $\mathfrak{F}T(0) = 1$.

<u>Théorème 1</u> : Soit E un elcs. La donnée d'une probabilité cylindrique λ sur E équivaut à la donnée d'une fonction de type positif f sur E' dont la restriction aux sous-espaces de dimension finie est continue, et telle que $f(0) = 1$. (La correspondance entre λ et f étant donnée par

$$f(\xi) \doteq \int e^{it}\ d\ \xi(\lambda)(t)$$

<u>Démonstration</u> : Si λ est une probabilité cylindrique, on définit sa transformée de Fourier $\mathfrak{F}\lambda$, fonction sur E', par :

$$\mathfrak{F}\lambda(\xi) = \int e^{it}\ d\ \xi(\lambda)(t)$$

Soit N un sous-espace fermé de codimension finie de E. On sait que $(E/N)'$ s'identifie à $N^o = \{\xi \in E' \mid \langle x,\xi\rangle = 0,\ \forall\, x \in N\}$, sous-espace de dimension finie de E'. On voit que la restriction de $\mathfrak{F}\lambda$ à N^o est la transformée de Fourier de $\pi_N(\lambda)$ au sens usuel, donc $\mathfrak{F}\lambda$ est continue et de type positif sur N^o d'après Bochner. On en déduit le résultat puisque tout sous-espace de dimension finie de E' est de est de la forme N^o.

Inversement soit f de type positif sur E', dont la restriction à tout sous-espace de dimension finie est continue. Soit N un sous-espace fermé de codimension finie de E. D'après Bochner, la restriction de f à N^o est la transformée de Fourier d'une probabilité $\pi_N(\lambda)$ sur E/N, et il n'est pas difficile de voir que :

$$N \subset M \Rightarrow \pi_{M,N}(\pi_N(\lambda)) = \pi_M(\lambda),$$

donc f est la transformée de Fourier d'une probabilité cylindrique λ sur E.

<u>Corollaire</u> : Soient E un elcs, λ_1 et λ_2 deux probabilités cylindriques sur E. Si $\xi(\lambda_1) = \xi(\lambda_2)$ pour tout $\xi \in E'$, on a $\lambda_1 = \lambda_2$.

<u>Démonstration</u> : On a alors $\mathfrak{F}\lambda_1 = \mathfrak{F}\lambda_2$.

Nous allons donner un exemple important de probabilité cylindrique. Soit H un espace de Hilbert de dimension finie. On a évidemment la notion de mesure de Lebesgue dx sur H. Considérons la probabilité :

$$\gamma_H = e^{-\pi\|x\|^2}\, dx$$

Si H_1 est un autre Hilbert de même dimension et u une isométrie de H sur H_1, il est clair d'après la forme de γ_H que $u(\gamma_H) = \gamma_{H_1}$. Supposons que $H = F_1 \oplus F_2$, avec F_1 et F_2 orthogonaux, et soient p_1, p_2 les projections sur F_1 et F_2. On a

$$\begin{aligned}\gamma_H = e^{-\pi\|x\|^2} dx &= e^{-\pi(\|p_1(x)\|^2 + \|p_2(x)\|^2)}\, dx \\ &= (e^{-\pi\|p_1(x)\|^2}\, p_1(dx))(e^{-\pi\|p_2(x)\|^2}\, p_2(dx)) \\ &= \gamma_{F_1} \otimes \gamma_{F_2}\end{aligned}$$

Soit maintenant H un Hilbert de dimension infinie, et soit N un sous-espace fermé de codimension finie. L'espace H/N est un Hilbert pour la norme quotient. Posons :

$$\pi_N(\gamma) = \gamma_{H/N}$$

Soit $M \supset N$. On peut écrire $H/N = F_1 \oplus F_2$, avec F_1 et F_2 orthogonaux, $F_1 = \operatorname{Ker} \pi_{M,N}$. Soient p_1 et p_2 les projections. On a :

$$\pi_{M,N} = \pi_{M,N} \circ p_2 ,$$

donc :

$$\pi_{M,N}(\gamma_{H/N}) = \pi_{M,N}(p_2(\gamma_{F_1} \otimes \gamma_{F_2})) = \pi_{M,N}(\gamma_{F_2})$$

Mais la restriction de $\pi_{M,N}$ à F_2 est une isométrie, donc :

$$\pi_{M,N}(\gamma_{F_2}) = \gamma_{H/M} \quad , \quad \text{soit } \pi_{M,N}(\pi_N(\gamma)) = \pi_M(\gamma).$$

On a ainsi défini une probabilité cylindrique γ sur H, que l'on appelle probabilité cylindrique de Gauss. La transformée de Fourier de γ est $\mathcal{F}\gamma(\xi) = e^{-1/2\|\xi\|^2}$. En vertu du théorème 1, nous aurions pu définir γ en remarquant que $e^{-1/2\|\xi\|^2}$ est de type positif sur H'.

Introduisons maintenant quelques notions de topologie : soient E un evts et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des probabilités de Radon sur E. On définit la topologie étroite sur $\mathcal{P}(E)$ comme la moins fine qui rend continues les applications $\mu \to \mu(f)$, où f est continue bornée sur E, à valeurs réelles. Si g est sci bornée sur E, $\mu \to \mu(g)$ est donc sci pour la topogie étroite.

Rappelons le théorème de Paul Lévy : si E est de dimension finie, un filtre (μ_i) de probabilités sur E converge étroitement vers μ si et seulement si les transformées de Fourier $\mathcal{F}\mu_i$ convergent uniformément sur tout compact de E' vers $\mathcal{F}\mu$.

Soient maintenant E un elcs, et $\check{\mathcal{P}}(E)$ l'ensemble des probabilités cylindriques sur E. On définit la topologie cylindrique sur $\check{\mathcal{P}}(E)$ comme la moins fine rendant continues les applications $\lambda \to u(\lambda)$ de $\check{\mathcal{P}}(E)$ dans $\mathcal{P}(F)$, pour tout espace de dimension finie F et tout $u \in L(E,F)$. (Il suffit évidemment de considérer le cas $u = \pi_N$, où N est un sous-espace fermé de codimension finie.)

On voit facilement que si un filtre de probabilités de Radon (μ_i) sur E converge étroitement vers μ, il converge a fortiori cylindriquement.

<u>Proposition 1</u> : Soit E un elcs. Un filtre (λ_i) de probabilités cylindriques sur E converge cylindriquement vers λ si et seulement si les transformées de Fourier $\mathcal{F}\lambda_i$ convergent vers $\mathcal{F}\lambda$ uniformément sur tout compact de dimension finie de E'.

<u>Démonstration</u> : En appliquant la même méthode que pour le théorème 1, on se ramène à l'application du théorème de Paul Lévy.

2. <u>TYPE DES PROBABILITES CYLINDRIQUES</u>.

Nous appelerons <u>elcs à dual quasi-normé E</u> la donnée d'un elcs E et d'une quasi-norme $\xi \to \|\xi\|$ sur E' telle que $\{\xi \mid \|\xi\| \leq 1\}$ soit borné pour $\sigma(E',E)$. (Rappelons que $\xi \to \|\xi\|$ est une quasi-norme s'il existe $q \in \,]0,1]$ tel que $\forall\, \xi, \eta$, $\|\xi + \eta\|^q \leq \|\xi\|^q + \|\eta\|^q$, $\|\alpha\xi\| = |\alpha| . \|\xi\|$ si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\|\xi\| = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$).

Donnons un exemple de cette situation. Considérons l'espace l^q, $0 < q \leq 1$. Son dual est l^∞. Prenons pour E l'espace l^∞, muni de la topologie $(l^\infty, l^q$ Son dual est alors l^q, que nous munissons de sa quasi-norme naturelle. En résumé, l^∞ muni de $\sigma(l^\infty, l^q)$ est un elcs à dual quasi-normé.

Soient E et F deux elcs à dual quasi-normé. Les "morphismes " de E dans F sont les applications linéaires u continue de E dans F, et telles que la transformée ${}^t u$ soit continue de F' dans E' pour les topologies définies par les quasi-normes. Nous poserons :

$$\|{}^t u\| = \sup_{\|\xi\|_{F'} \leq 1} \|{}^t u(\xi)\|_{E'}$$

Soient E un elcs à dual quasi-normé, λ une probabilité cylindrique sur E et $p \in]0,+\infty[$. Nous dirons que λ est de type p s'il existe une constante C telle que :

$$\forall\, \xi \in E' \qquad \left(\int |t|^p \, d(\xi(\lambda))(t)\right)^{1/p} \leq C\, \|\xi\|$$

On notera $\|\lambda\|_p^*$ la plus petite constante C telle que la propriété ci-dessus soit réalisée.

Nous dirons que λ est de type zéro si pour tout $\alpha \in]0,1[$ il existe $R > 0$ tel que :

$$(1) \qquad \|\xi\| \leq 1 \;\Rightarrow\; \int_{|t|>R} d(\xi(\lambda))(t) \leq \alpha$$

On en déduit par homothétie, pour $\varepsilon > 0$ quelconque :

$$(2) \qquad \|\xi\| \leq \frac{\varepsilon}{R} \;\Rightarrow\; \int_{|t|>\varepsilon} d(\xi(\lambda))(t) \leq \alpha$$

On notera $J_\alpha^*(\lambda)$ la plus petite constante R telle que (1) soit réalisée. Si λ est de type p, avec $p > 0$, elle est de type zéro, et : $J_\alpha^*(\lambda) \leq \alpha^{-1/p}\|\lambda\|_p^*$.

<u>Proposition 2</u> : Soient E et F deux elcs à dual quasi-normé, λ une probabilité cylindrique de type p sur E, et u une application linéaire continue de E dans F. On a :

$$\|u(\lambda)\|_p^* \leq \|{}^t u\|\|\lambda\|_p^* \quad \text{pour } p > 0, \text{ et pour } p = 0 :$$

$$J_\alpha^*(u(\lambda)) \leq \|{}^t u\|\; J_\alpha^*(\lambda) \quad \text{pour tout } \alpha \in]0,1[.$$

La démonstration est immédiate, en utilisant $\xi(u(\lambda)) = ({}^t u(\xi))(\lambda)$.

<u>Lemme</u> : Soient E un elcs à dual quasi-normé, et λ une probabilité cylindrique de type zéro sur E. On a :

$$\|\xi_1 - \xi_2\| \leq \alpha/J_\alpha^*(\lambda) \Rightarrow |\mathcal{F}\lambda(\xi_1) - \mathcal{F}\lambda(\xi_2)| \leq |1 - e^{i\alpha}| + 2\alpha$$

<u>Démonstration</u> : Posons $N = \{x \,|\, \langle x,\xi_1\rangle = \langle x,\xi_2\rangle = 0\}$, et posons $\mu = \pi_N(\lambda)$. On aura :

$$|\mathcal{F}\lambda(\xi_1) - \mathcal{F}\lambda(\xi_2)| = \left|\int_{E/N} e^{i\langle x,\xi_1\rangle} - e^{i\langle x,\xi_2\rangle} d\mu(x)\right| =$$

$$= \left|\int e^{i\langle x,\xi_1\rangle}[1 - e^{i\langle x,\xi_2-\xi_1\rangle}]d\mu(x)\right|$$

$$\leq \int |1 - e^{i<x,\xi_2 - \xi_1>}| \, d\mu(x) \leq \int_{|t|\leq\alpha} |1 - e^{it}| d(\xi_2 - \xi_1)(\lambda)(t) + 2\int_{|t|>\alpha} d(\xi_2-\xi_1)(\lambda)(t)$$

$\leq |1 - e^{i\alpha}| + 2\alpha$, d'après la relation (2).

<u>Proposition 3</u> : Soient E et F deux elcs à dual quasi-normé, et λ une probabilité cylindrique sur E de type zéro. On suppose que F est de dimension finie. Si (u_i) est un filtre sur L(E,F) tel que $\lim_i \|{}^t(u-u_i)\| = 0$, la probabilité $u(\lambda)$ est limite étroite du filtre $(u_i(\lambda))$.

<u>Démonstration</u> : D'après le théorème de Paul Lévy, il faut voir que $\mathcal{F}(u_i(\lambda))$ tend vers $\mathcal{F}(u(\lambda))$ uniformément sur toute quasi-boule de F'. Or, si $\|{}^t(u-u_i)\| \leq \alpha/R\, J^*_\alpha(\lambda)$, on a d'après le lemme :

$$\|\xi\| \leq R \Rightarrow |\mathcal{F}(u_i(\lambda))(\xi) - \mathcal{F}(u(\lambda))(\xi)| = |\mathcal{F}\lambda({}^tu_i(\xi)) - \mathcal{F}\lambda({}^tu(\xi))| \leq$$
$$\leq |1 - e^{i\alpha}| + 2\alpha,$$

d'où le résultat.

3. <u>ORDRE DES PROBABILITES DE RADON. APPLICATIONS RADONIFIANTES</u>

Nous aurons à considérer par la suite des probabilités sur des espaces de Banach qui ne seront pas de Radon pour la topologie normée, mais seulement pour une topologie localement convexe moins fine . Nous sommes donc conduits à poser la définition suivante :

Nous appellerons <u>elcs bitopologique</u> la donnée d'un espace vectoriel E muni d'une topologie $\mathcal{C}$ d'elcs et d'une quasi-norme s.c.i. pour $\mathcal{C}$. Si de plus les quasi-boules fermées sont compactes pour $\mathcal{C}$, nous dirons que E est un elcs bitopologique à quasi-boules compactes. Nous dirons qu'une probabilité μ est de Radon sur elcs bitopologique si elle est de Radon pour la topologie $\mathcal{C}$.

Soient E un elcs bitopologique, et μ une probabilité de Radon sur E. Puisque la quasi-norme sur E est supposée s.c.i. pour $\mathcal{C}$, on peut considérer pour $p \in]0, +\infty[$:

$$\|\mu\|_p = \left(\int \|x\|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$$

Nous dirons que μ est d'ordre p si $\|\mu\|_p$ est fini.

Considérons maintenant la situation suivante : soient E et F deux elcs, u un opérateur de E dans F, et λ une probabilité cylindrique sur E. Nous voudrions savoir si $u(\lambda)$ est de Radon sur F. Pour cela, nous voulons employer le processus suivant : supposons que λ soit limite cylindrique d'un filtre de probabilités de Radon (λ_i). Alors $u(\lambda)$ est évidemment limite cylindrique des $(u(\lambda_i))$. S'il existe une partie $A \subset \check{\mathcal{P}}(F)$, cylindriquement compacte et formée de probabilités de Radon, telle que $u(\lambda_i) \in A$ pour chaque i, nous aurons à la limite $u(\lambda) \in A$, donc $u(\lambda)$ sera de Radon sur F. D'où l'intérêt du résultat suivant :

<u>Proposition 4</u> : Soit E un elcs bitopologique à quasi-boules compactes. L'ensemble A des mesures de Radon μ sur E telles que $\|\mu\|_p \leq 1$ $(0 < p < +\infty)$ est étroitement compact, donc a fortiori cylindriquement compact. (Les topologies étroite et cylindrique considérées sont relatives à la topologie $\mathcal{C}$ d'elcs sur E).

<u>Démonstration</u> : Soit $\mathcal{C}$ la topologie d'elcs sur E, et soit $\check{E}$ le compactifié de Čech de E muni de $\mathcal{C}$. Si (μ_i) est un ultrafiltre sur A, il admet une limite étroite μ dans $\mathcal{P}(\check{E})$ qui est compact. Pour savoir que μ est portée par E, nous devons montrer que :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\quad \exists\ K \text{ compact} \subset E, \text{ tel que } \mu(K) \geq 1 - \varepsilon .$$

Soit R tel que $1/_{R^p} \leq \varepsilon$. Soit B_R la quasi-boule fermée de rayon R. On a pour tout i :

$$\mu_i(\complement B_R) \leq 1/_{R^p} \leq \varepsilon, \text{ soit aussi : } \mu_i(B_R) \geq 1 - \varepsilon.$$

Mais puisque B_R est fermé pour $\mathcal{C}$, on a par convergence étroite

$$\mu(B_R) \geq \limsup_i \mu_i(B_R) \geq 1 - \varepsilon,$$

ce qui prouve bien que μ est portée par E puisque B_R est compact pour $\mathcal{C}$ par hypothèse. D'autre part puisque la quasi-norme est s.c.i. pour $\mathcal{C}$:

$$\int \|x\|^p d\mu(x) \leq \liminf_i \int \|x\|^p d\mu_i(x) \leq 1,$$

ce qui achève la démonstration.

Conformément à ce que nous avons dit avant la proposition 4 nous sommes conduits à poser la définition suivante : soient E un elcs à dual quasi-normé, λ une probabilité cylindrique sur E, et $p \in]0,+\infty[$. Nous dirons que λ est de type p approximable s'il existe une constante C et un filtre de probabilités de Radon (λ_i), portées par des sous-espaces de dimension finie de E, qui converge cylindriquement vers λ, et tel que :

$$\forall\ i,\ \|\lambda_i\|_p^* \leq C$$

On notera $\|\lambda\|_p^{*a}$ la borne inférieure des constantes C telles que la propriété ci-dessus soit réalisée.

Il serait encore plus agréable d'avoir, au lieu de probabilités de Radon portées par des sous-espaces de dimension finie, des probabilités à support fini. C'est effectivement possible d'après la proposition suivante:

<u>Proposition 5</u> : Soit E un elcs à dual quasi-normé. Toute probabilité de Radon λ portée par un sous-espace de dimension finie de E, et telle que $\|\lambda\|_p^* \leq 1$, $(0 < p < \infty)$ est cylindriquement adhérente à l'ensemble des probabilités de Radon μ à support fini, telles que $\|\mu\|_p^* \leq 1$. En conséquence, on peut remplacer dans la définition du type p approximable "portée par un sous-espace de dimension finie" par : "à support fini".

<u>Démonstration</u> : Définissons une norme sur E par :

$$\|x\| = \sup_{\|\xi\|\leq 1} |<x,\xi>|$$

Si λ est une probabilité de Radon sur E portée par un sous-espace de dimension finie, on voit facilement que $\lambda_R = \chi_{B_R}\lambda + (1-\lambda(B_R))\delta_0$ converge étroitement, donc cylindriquement vers λ quand $R \to \infty$, et que $\|\lambda_R\|_p^* \leq \|\lambda\|_p^*$. Il suffit donc de montrer le résultat lorsque λ est portée par une boule. Dans ce cas on peut trouver une suite (g_n) de fonctions étagées telle que :

$$\left(\int \|x - g_n(x)\|^p d\lambda(x)\right)^{1/p} \leq 1/n$$

Posons $\nu_n = \left(\dfrac{g_n}{1+1/n}\right)(\mu)$. Il est clair que ν_n est à support fini, et converge étroitement vers μ. D'autre part, pour $p \geq 1$ et $\|\xi\| \leq 1$:

$$\left(\int |\langle x,\xi\rangle|^p d\nu_n(\xi)\right)^{1/p} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \left(\int |\langle g_n(x),\xi\rangle|^p d\lambda(x)\right)^{1/p}$$

$$\leq \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \left[\left(\int |\langle x,\xi\rangle|^p d\lambda(x)\right)^{1/p} + \left(\int |\langle x - g_n(x),\xi\rangle|^p d\lambda(x)\right)^{1/p}\right] \leq 1.$$

(Pour $p < 1$, la démonstration est analogue en utilisant :

$$\int |\langle g_n(x),\xi\rangle|^p d\lambda(x) \leq \int |\langle x,\xi\rangle|^p d\lambda(x) + \int |\langle x - g_n(x),\xi\rangle|^p d\lambda(x).\ )$$

Soient E un elcs à dual quasi-normé, F un elcs bitopologique et u un opérateur linéaire continu de E dans F. Nous dirons que u est p-radonifiant (resp : approximativement p-radonifiant) de E dans F, $0 < p < \infty$, si pour toute probabilité cylindrique λ de type p sur E (resp : de type p-approximable) $\mu(\lambda)$ est de Radon d'ordre p sur F.

<u>Théorème 2</u> : Soient E un elcs à dual quasi-normé, F un elcs bitopologique à quasi-boules compactes, et u un opérateur linéaire continu de E dans F. Pour que u soit approximativement p-radonifiant de E dans F, il suffit qu'il existe une constante C telle que pour toute probabilité λ à support fini, on ait :

$$\|u(\lambda)\|_p \leq C\|\lambda\|_p^*$$

On en déduit pour λ de type p-approximable :

$$\|u(\lambda)\|_p \leq C\ \|\lambda\|_p^{*a}$$

<u>Démonstration</u> : Soient λ de type p-approximable sur E et $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 5, il existe un filtre de probabilités à support fini (λ_i) qui converge cylindriquement vers λ et tel que :

$$\forall\ i \qquad \|\lambda_i\|_p^* \leq \|\lambda\|_p^{*a} + \varepsilon$$

Les images $u(\lambda_i)$ convergent cylindriquement vers $u(\lambda)$, et vérifient par hypothèse :

$$\forall i \quad \|u(\lambda_i)\|_p \leq C(\|\lambda\|_p^{*a} + \varepsilon)$$

D'après la proposition 4, $u(\lambda)$ est de Radon et vérifie :

$\|u(\lambda)\|_p \leq C(\|\lambda\|_p^{*a} + \varepsilon)$, d'où le résulat puisque ε est arbitraire.

4. L'HYPOTHESE D'APPROXIMATION

Soit E un elcs à dual quasi-normé. Nous dirons que le couple (E,E') vérifie l'hypothèse d'approximation métrique si l'identité de E' est limite simple (pour la topologie quasi-normée) d'un filtre (π_i) d'opérateurs de rang fini, continus pour $\sigma(E',E)$ et tels que $\|\pi_i\| \leq 1$.

Proposition 6 : Soit E un elcs à dual quasi-normé. Si le couple (E,E') vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, toute probabilité cylindrique λ de type p sur E est de type p-approximable, et $\|\lambda\|_p^{*a} = \|\lambda\|_p^{*}$. En conséquence, toute application approximativement p-radonifiante de E dans un elcs bitopologique F est p-radonifiante.

Démonstration : Soit (π_i) un filtre d'opérateurs de rang fini sur E' vérifiant les conditions de la définition. Par hypothèse $\sigma_i = {}^t\pi_i$ opère de E dans E. Posons $\lambda_i = \sigma_i(\lambda)$. On a :

$$\|\lambda_i\|_p^* \leq \|\pi_i\| \; \|\lambda\|_p^* \leq \|\lambda\|_p^* \qquad \text{(Proposition 2)}$$

Montrons que λ_i converge cylindriquement vers λ.

Pour cela, nous devons montrer que si F est de dimension finie, et si $v \in L(E,F)$, $v(\lambda_i)$ converge étroitement vers $v(\lambda)$. Mais puisque ${}^tv$ est de rang fini, $\lim_i \|{}^t(v \circ \sigma_i - v)\| = 0$, donc $v(\lambda_i) = v(\sigma_i(\lambda))$ converge étroitement vers $v(\lambda)$ d'après la proposition 3. Ceci achève la démonstration, puisque λ_i est de Radon, portée par un sous-espace de dimension finie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Séminaire L. Schwartz 1969-70, Ecole Polytechnique.

[2] L. Schwartz : Probabilités cylindriques et applications radonifiantes, Jour. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sec 1A, vol.18 n°2 p.139-286 (1970).

****