Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

G. Pisier

Bases, suites lacunaires dans les espaces L^p, d'après Kadec et Pelczynski

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 18, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A18_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

BASES, SUITES LACUNAIRES DANS LES ESPACES L^p

D'APRES KADEC ET PELCZYNSKI

par G. PISIER

Exposé n° XVIII

21 Mars 1973

Soit $\gamma : l^2 \hookrightarrow L^p([0,1]dt)$ le plongement gaussien canonique de l^2 dans $L^p([0,1]dt)$. La probabilité cylindrique correspondante sur l^2 est de type p et de cotype 0, quel que soit $p \geq 0$. Cela **signifie** que, sur le sous-espace $\gamma(H)$ de L^p, la topologie induite par $L^p([0,1]dt)$, coïncide avec la topologie induite par $L^o([0,1]dt)$. L'objet de cet exposé est l'étude, d'après Kadec et Pelczynski [2] de tels sous-espaces.

Nous aurons besoin de quelques résultats sur les bases dans les espaces L^p.

§ 1. BASES DANS LES ESPACES QUASI-NORMES

Soit E un espace vectoriel topologique. Une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans E est une base de E si tout élément de E peut s'écrire <u>d'une manière unique</u> comme somme d'une série convergente de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de scalaires.

Une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans E est dite suite basique si c'est une base du sous-espace fermé engendré par les $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on note $[x_n]$. On définit alors des formes linéaires sur $[x_n]$ par :

$$x_n^* \left(\sum_{i=1}^{i=\infty} \alpha_i x_i \right) = \alpha_n$$

Si E est un Banach, si $\|x_n\| = 1 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, il est bien connu que $(x_n^*, n \in \mathbb{N})$ est équicontinue sur $[x_n]$. Plus précisément :

<u>Proposition 1</u> : Soit E un espace quasi-normé complet, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élements non nuls de E est basique si et seulement si il existe une constante K telle que l'on ait :

$$\left\| \sum_{i=1}^{i=m} t_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{i=q} t_i x_i \right\| \tag{1}$$

pour tous entiers m,q avec $q \geq m$ et toute suite scalaire $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La démonstration est facile. (1) ne fait que traduire l'équivalence (obtenue par le théorème du graphe fermé) de la quasi-norme initiale avec la quasi-norme définie, si

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i, \quad \text{par } \|x\|_1 = \sup_{n\geq 1} \|\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i x_i\| .$$

<u>Corollaire 1</u> : Sous les hypothèses de la proposition 1 on a : si E est p-normé

$$\sup_{\substack{x\in[x_n] \\ \|x\|\leq 1}} |x_n^*(x)| = \|x_n^*\| \leq 2^{\frac{1}{p}} \frac{K}{\|x_n\|} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} .$$

en effet

$$\|x_n^*(x)x_n\|^p \leq \|\sum_{i=1}^{i=n} x_i^*(x)x_i - \sum_{i=1}^{i=n-1} x_i^*(x)x_i\|^p \quad \forall\, n > 1$$

$$\leq 2K^p \|x\|^p \qquad (\text{grâce à } (1) \text{ avec } p \to \infty)$$

d'où $\forall\, n \geq 1$: $|x_n^*(x)| \leq 2^{\frac{1}{p}} \frac{K}{\|x_n\|} \|x\|$

<u>Définition</u> : Soient E, F deux espaces quasi-normés complets. Une suite basique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E et une suite basique $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans F sont dites équivalentes si pour toute suite scalaire $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge dans E si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$ converge dans F. Les espaces $[x_n]$ et $[y_n]$ sont alors isomorphes ; si U est l'isomorphisme de $[x_n]$ sur $[y_n]$ défini par $Ux_n = y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont λ-équivalentes si $\|U\|\ \|U^{-1}\| \leq \lambda$.

Les deux théorèmes suivants sont dûs a Bessaga et Pelczynski [1] ils permettent de construire de nouvelles suites basiques en "translatant" une suite basique donnée.

<u>Théorème 1</u> : Soit E un espace p-normé complet, x_n une suite basique dans E. Si la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E vérifie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n-y_n\|^p \|x_n^*\|^p = \delta < 1$ alors $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite basique équivalente à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soient i, n, m des entiers avec $n \leq i \leq m$, on a :

$$|t_i| = |x_i^*(\sum_{j=n}^{j=m} t_j x_j)| \leq \|x_i^*\| \, \|\sum_{j=n}^{j=m} t_j x_j\|$$

d'où
$$\|\sum_{j=n}^{j=m} t_j y_j\|^p \leq \|\sum_{j=n}^{j=m} t_j x_j\|^p + \sum_{j=n}^{j=m} |t_j|^p \, \|x_j - y_j\|^p$$
$$\leq \|\sum_{j=n}^{j=m} t_j x_j\|^p (1 + \sum_{j=n}^{j=m} \|x_j^*\|^p \|x_j - y_j\|^p)$$

soit
$$\|\sum_{j=n}^{j=m} t_j y_j\|^p \leq (1+\delta) \, \|\sum_{j=n}^{j=m} t_j x_j\|^p \tag{2}$$

On a de même si $n \leq q$:

$$\|\sum_{j=n}^{j=q} t_j y_j\|^p \geq \|\sum_{j=n}^{j=q} t_j x_j\|^p \, (1-\delta) \tag{3}$$

D'où avec les notations de (1) dans (2) et (3) :

$$\|\sum_{j=1}^{j=m} t_j y_j\| \leq K(\frac{1+\delta}{1-\delta})^{\frac{1}{p}} \, \|\sum_{j=1}^{j=q} t_j y_j\|.$$

Ce qui prouve que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite basique par la proposition 1. L'équivalence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ résulte de (2) et (3).

<u>Remarque 1</u> : Soit V l'isomorphisme de $[x_n]$ sur $[y_n]$ définie par $V\,x_n = y_n$, on a par (2) et (3) $\|V\| \, \|V^{-1}\| \leq (\frac{1+\delta}{1-\delta})^{1/p}$; $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc $(\frac{1+\delta}{1-\delta})^{1/p}$ équivalentes.

<u>Théorème 2</u> : Soit E un espace de Banach et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite basique dans E telle que $[x_n]$ est complémenté - c'est-à-dire qu'il existe une projection U de E sur $[x_n]$ - alors si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans E vérifiant

$$\|U\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \, \|x_n - y_n\| = \delta < 1 \tag{4}$$

alors $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite basique et $[y_n]$ est complémenté dans E.

D'après le théorème 1, comme $\|U\| \geq 1$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite basique équivalente à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'opérateur $A : E \to E$, défini par :

$$\forall\, x \in E \quad : A\,x = x - U\,x + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(Ux)\,y_n)$$

est un isomorphisme de E sur E ; en effet : $Ux = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(Ux)\,x_n$ d'où

$$\|(I - A)x\| = \|\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(Ux)(x_n - y_n)\| \text{ d'où } \|I - A\| \leq \delta < 1.$$

A est donc inversible. De plus $Ax_n = y_n$; l'opérateur $A\,U\,A^{-1}$ est donc une projection de E sur $[y_n]$.

<u>Remarque 2</u> : $\|I - A\| \leq \delta$ entraîne $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\delta}$ et $\|A\| \leq 1 + \delta$ d'où $\|A\,U\,A^{-1}\| \leq \|U\|\,(\frac{1+\delta}{1-\delta})$; si $[x_n]$ est $(1+\varepsilon)$-complémenté, alors $[y_n]$ est $(\frac{1+\delta}{1-\delta})(1+\varepsilon)$ complémenté.

§ 2. APPLICATION AUX ESPACES L^p

Dans toute la suite, Ω désigne un ensemble, $\mathcal{A}$ une tribu sur cet ensemble, et μ une probabilité sur cette tribu. Pour simplifier nous noterons L^p l'espace $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, pour $p \geq 0$. Nous noterons 1_A la fonction indicatrice d'un ensemble A, et si f est une fonction sur Ω, $\{f > a\}$ est l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > a\}$. Nous dirons qu'un sous-espace R de L^p "a la topologie de L^o", si sa topologie est induite par la topologie de L^o ; cela signifie que la restriction à R de l'injection canonique $L^p \to L^o$ est un isomorphisme d'e.v.t. ; cela peut s'écrire :

$$\exists\, \alpha \in\,]0,1[,\ M > 0 \text{ tels que } \forall\, r \in R,$$

$$J_\alpha(r) \geq M\|r\|_{L^p}.$$

Si on pose $\varepsilon = \inf(\alpha,\mu)$, on obtient une condition qui suffit encore à assurer que R a la topologie de L^o :

$$\forall\, r \in R \qquad \mu\{|r| \geq \varepsilon\, \|r\|_{L^p}\} \geq \varepsilon .$$

Cela nous conduit à introduire une classe de parties de L^p : on pose si $p > 0$ et $\varepsilon > 0$

$$M_\varepsilon^p = \{x \in L^p : \mu\{|x| \geq \varepsilon \|x\|_{L^p}\} \geq \varepsilon\} .$$

La proposition suivante montre que pour un sous-espace de L^p, "avoir la topologie de L^0" équivaut à "avoir la topologie de L^q" pour un $q < p$.

<u>Proposition</u> : Soit A une partie de $L^p (p>0)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\exists\, \varepsilon \in]0,1[$ tel que $A \subset M_\varepsilon^p$.

ii) $\forall\, q < p$, il existe une constante Cq telle que

$$\|a\|_{L^q} \leq \|a\|_{L^p} \leq Cq\, \|a\|_{L^q} \qquad \forall\, a \in A.$$

iii) $\exists\, q < p$, et il existe une constante Cq telle que

$$\|a\|_{L^q} \leq \|a\|_{L^p} \leq Cq \|a\|_{L^q} \qquad \forall\, a \in A.$$

<u>Démonstration</u> :

i) $\Rightarrow$ ii) : $\|a\|_{L^q} = (\int |a|^q d\mu)^{1/q} \geq \varepsilon^{1+\frac{1}{q}}\, \|a\|_{L^p} \qquad \forall\, a \in A$

ii) $\Rightarrow$ iii) : trivial

iii) $\Rightarrow$ i) : Supposons que l'on a : $\|a\|_{L^p} \leq Cq\, \|a\|_{L^q}$ et $a \notin M_\varepsilon^p$ (avec $0<\varepsilon<1$); alors si on pose $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$ et $S_a = \{|a| \geq \varepsilon \|a\|_p\}$, on a :

$$\begin{aligned} \|a\|_{L^q}^q &= \int_{S_a} |a|^q d\mu + \int_{\complement S_a} |a|^q d\mu \\ &\leq \int_{S_a} |a|^q d\mu + \varepsilon^q\, \|a\|_p^q \end{aligned} \tag{5}$$

Par l'inégalité de Hölder, on a :

$$\|a\,1_{S_a}\|_{L^q} \leq \|a\|_{L^p}\,\|1_{S_a}\|_{L^r}$$

soit

$$\left(\int_{S_a}|a|^q d\mu\right)^{1/q} \leq \|a\|_{L^p}\,\mu(S_a)^{1/r}$$

d'où avec (5)

$$\|a\|^q_{L^q} \leq \|a\|^q_{L^p}\,[\mu(S_a)^{q/r} + \varepsilon^q].$$

Mais $a \notin M^p_\varepsilon$ signifie que $\mu(S_a) < \varepsilon$ d'où si $\delta = \frac{1}{q}\inf\left(\frac{q}{r}, q\right)$,

$$\frac{1}{Cq}\,\|a\|_{L^p} \leq \|a\|_{L^q} < \|a\|_{L^p}\,2^{1/q}\varepsilon^\delta$$

d'où nécessairement ($a \neq 0$) $\qquad \varepsilon > \varepsilon_o = \left(\frac{1}{2^{1/q}C_q}\right)^{1/\delta}$

on a donc finalement

$$\|a\|_{L^p} \leq Cq\,\|a\|_{L^q} \Rightarrow a \in M^p_\varepsilon \quad \text{pour tout } \varepsilon \leq \varepsilon_o.$$

<u>Lemme 1</u> : Les cônes M^p_ε ont les propriétés suivantes ($p > 0$) :

a - Si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ $\qquad M^p_{\varepsilon_1} \supset M^p_{\varepsilon_2}$

b - $\bigcup_{0<\varepsilon<1} = L^p$

c - Si $x \notin M^p_\varepsilon$, il existe un ensemble $A \in \mathcal{a}$ tel que $\mu(A)<\varepsilon$ et $\int\left(\frac{|x|}{\|x\|_p}\right)^p d\mu > 1-\varepsilon^p$

Montrons c : on pose $A = \{|x| \geq \varepsilon\|x\|_p\}$; $x \notin M^p_\varepsilon \Rightarrow x \neq 0$ et $\mu(A) < \varepsilon$,

$\int_{A^c}\left(\frac{|x|}{\|x\|_p}\right)^p d\mu < \varepsilon^p$ donc $\int_A\left(\frac{|x|}{\|x\|_p}\right)^p d\mu > 1 - \varepsilon^p$.

<u>Lemme 2</u> : Soit $p > 0$, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{a}$, deux à deux disjoints, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans L^p telle que $\|u_n\|_p = 1$ et $u_n = 1_{A_n} u_n$ pour tout entier n. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite basique dans

L^p, 1-équivalente à la base canonique de l^p. De plus si $p \geq 1$, $[u_n]$ est 1-complémenté dans L^p.

On a : $\| \sum_{i=1}^{i=n} t_i u_i \|_p = (\sum_{i=1}^{i=n} |t_i|^p)^{1/p}$ d'où la première partie de l'énoncé (avec $\|u_n^*\| = 1$ pour tout entier n). Si $p \geq 1$, soit $u'_n \in L^{p'}$ telle que

$$\|u'_n\|_{p'} = \langle u'_n, u_n \rangle = 1 \ ;$$

si on pose $\forall\, x \in L^p \quad Px = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u'_n, x1_{A_n} \rangle\, u_n$, on vérifie aisément que P projette L^p sur $[u_n]$ et que $\|P\| = 1$.

Nous pouvons démontrer le principal résultat de [2].

<u>Théorème 3</u> : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans L^p avec $p > 0$ (resp : $p \geq 1$) telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas inclus dans M_ε^p. Alors pour tout $\delta > 0$, il existe une suite extraite $y_k = x_{n_k}$ telle que $\left(\frac{y_k}{\|y_k\|_p}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite basique $(1 + \delta)$ équivalente à la base canonique de l^p (resp : et telle que $[y_n]$ est $(1 + \delta)$-complémenté dans L^p).

<u>Démonstration</u> : On va extraire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite "translatée" d'une suite basique qui vérifie les hypothèses du lemme 2.

Si $x \in L^p$, la fonction d'ensemble $A \to \int_A |x|^p d\mu$ est absolument continue par rapport à μ ; soit η positif donné avec $\eta\left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p - 1} \right) < 1$ et $\eta < 1$.

On peut construire par récurrence une suite extraite de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soit $x_{n_k} = y_k$ et une suite d'ensembles A'_k dans $\mathcal{Q}$ tels que :

$$\int_{A'_k} \left(\frac{y_k}{\|y_k\|_p}\right)^p d\mu > 1 - \eta\, 4^{-(k+1)p} \tag{4}$$

$$\int_{A'_{k+1}} \sum_{i=1}^{i=k} \left(\frac{|y_i|}{\|y_i\|_p} \right)^p d\mu < \eta\, 4^{-(k+1)p} \tag{5}$$

[On utilise pour cela le lemme 1 : 1 c assure l'existence d'éléments vérifiant (4) et (5), 1 a et 1 b permettent de choisir $n_1 < n_2 < n_3 \dots$]

On pose alors $A_k = A'_k - \bigcup_{i=k+1}^{\infty} A'_i$ et $z_k = \frac{y_k}{\|y_k\|_p} 1_{A_k}$.

On a :

$$1 \geq \|z_k\|_p^p = \int_{A_k} \left|\frac{y_k}{\|y_k\|_p}\right|^p d\mu \geq \int_{A'_k} \left(\frac{|y_k|}{\|y_k\|_p}\right)^p - \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_{A'_i} \left|\frac{y_k}{\|y_k\|_p}\right|^p d\mu$$

soit par (4) et (5)

$$(6) \qquad 1 \geq \|z_k\|_p^p \geq 1 - \eta\, 4^{-(k+1)p} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \eta\, 4^{-ip} \geq 1 - \eta\, 4^{-kp}\left[\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p - 1}\right]$$

(6) entraîne en particulier que $\|z_k\|_p \neq 0$; si on pose $u_k = \frac{z_k}{\|z_k\|_p}$, u_k vérifie les hypothèses du lemme 2.

On a :

$$(7) \qquad \left\|\frac{y_k}{\|y_k\|_p} - z_k\right\|_p^p = \int_{\complement A_k} \left(\frac{|y_k|}{\|y_k\|_p}\right)^p d\mu \leq \int_{\complement A'_k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_{A'_i}$$

$$< \eta\, 4^{-(k+1)p} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \eta\, 4^{-ip} = \eta\, 4^{-kp}\left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p - 1}\right)$$

On a donc si $p \geq 1$

$$\forall k \geq 1 \qquad \left\|\frac{y_k}{\|y_k\|_p} - u_k\right\|_p \leq \left\|\frac{y_k}{\|y_k\|_p} - z_k\right\|_p + \|z_k - u_k\|_p$$

d'où par (6) et (7), comme $\|z_k - u_k\|_p = 1 - \|z_k\|_p \leq 1 - \|z_k\|_p^p$

$$\left\|\frac{y_k}{\|y_k\|_p} - u_k\right\|_p < \eta^{1/p}\, 4^{-k} + \eta^{1/p}\, 4^{-k}$$

et avec les notations du lemme (2) :

(8) $$\|p\| \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\frac{y_k}{\|y_k\|_p} - u_k\right\|_p \|u_k^*\| < \eta^{1/p}\,\frac{2}{3} < 1.$$

De même pour $0 < p < 1$:

$$\|z_k - u_k\|_p^p = (1 - \|z_k\|_p)^p \leq \left[\frac{\eta}{p}\, 4^{-kp}\left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p - 1}\right)\right]^p$$

$$\left\|\frac{y_k}{\|y_k\|_p} - u_k\right\|_p^p \leq \left\|\frac{y_k}{\|y_k\|_p} - u_k\right\|_p^p + \|z_k - u_k\|_p^p$$

$$< \eta\, 4^{-kp}\left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p - 1}\right) + \left[\frac{\eta}{p}\, 4^{-kp}\left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p - 1}\right)\right]^p$$

d'où

(9) $$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k^*\|^p \left\|\frac{y_k}{\|y_k\|} - u_k\right\|_p^p \leq K_p\, \eta + K'_p\, \eta^p,$$ où K_p et K'_p

ne dépendent que de p ; on obtient donc le résultat dès que $K_p\eta + K'_p\eta^p < 1$.

Enfin il suffit de se référer aux remarques 1 et 2 pour prouver que si η est assez petit, la condition de l'énoncé relative à δ est vérifiée.

Proposition 3 : Si $0 < p < 2$, l^p n'est pas de type p.

Démonstration : Soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la base canonique de l^p, soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite stable d'ordre p. Si l^p était de type p, on aurait :

$$\forall\, \alpha \in \,]0,1[, \qquad \exists\, K_\alpha > 0 \quad \text{telle que :}$$

$$J_\alpha\left(\left\|\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i\, e_i\, f_i(t)\right\|_{l^p}, dt\right) \leq K_\alpha\left(\sum_{i=1}^{i=n} \|\alpha_i\, e_i\|_{l^p}^p\right)^{1/p}$$

pour toute suite scalaire $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$; soit

$$J_\alpha\left(\left(\sum_{i=1}^{i=n} |\alpha_i\, f_i(t)|^p\right)^{1/p}, dt\right) \leq K_\alpha\left(\sum_{i=1}^{i=n} |\alpha_i|^p\right)^{1/p}$$

Or la condition $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p < \infty$ ne suffit pas en général à entraîner la convergence p.s de $\sum_{i=1}^{i=\infty} |\alpha_i f_i(t)|^p$; en effet $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i f_i(t)|^p \overset{p.s}{<} \infty$ équivaut à $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p(1 + |\mathrm{Log}\, |\frac{1}{\alpha_i}||) < \infty$. (cf. [4] prop. XXVI. 3.3).

Proposition 4 : Soit $p \in]0,2[$ (resp. $p \in [1,2[$) et R un sous-espace fermé de L^p. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

a) R est de type p.

b) R ne contient pas de sous espace isomorphe à l^p.

(resp. b') R ne contient pas de sous espace complémenté isomorphe à l^p).

c) R a la topologie de L^o.

Démonstration :

a) ⇒ b) résulte de la proposition 3

b) ⇒ b') est trivial.

b')⇒ c) résulte du théorème 3.

c) ⇒ a) a été démontré précédemment (cf. [3] prop. 2).

Remarque 3 : Comme l^2 est de type 2, a ⇒ b est faux pour p = 2. D'ailleurs on ne peut obtenir de caractérisation analogue à la proposition 4 qui ne fasse intervenir que la structure de R à une isomorphie près ; car, par exemple, $L^2([0,1],dt)$ (qui n'a pas la topologie de $L^o([0,1],dt)$!) contient un sous-espace fermé qui lui est isométrique et qui a la topologie de $L^o([0,1]dt)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Bessaga , A. Pelczynski : On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. Studia Math. XVII (1958). p.151-164.

[2] I. Kadec, A. Pelczynski : Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the space L_p. Studia Math. XXI, (1962), p.161-176.

[3] B. Maurey : Séminaire Maurey-Schwartz 1972-73, exposés X-XI.

[4] L. Schwartz : Séminaire Schwartz 1969-70, exposé XXVI.