SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

Théorèmes de factorisation pour les opérateurs à valeurs dans un espace L^P

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 17, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A17_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

THEOREMES DE FACTORISATION POUR LES OPERATEURS A VALEURS DANS UN ESPACE L^p

par B. MAUREY

Exposé N° XVII

14 Mars 1973

Dans l'exposé XV, nous avons démontré que tout opérateur linéaire et continu d'un espace E de type q dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$ et la multiplication par une fonction de $L^r(\Omega,\mu)$, $0 < p \leq q \leq 2$, $1/p = 1/q + 1/r$. Dans cet exposé, nous allons examiner les rapports entre ce type de théorème de factorisation et certaines propriétés des opérateurs p-sommants.

<u>Proposition 1</u> : Soient p et q deux nombres réels tels que $0 < p \leq q \leq +\infty$ C une constante ≥ 0, et E un espace de Banach vérifiant l'hypothèse suivante :

a) Tout opérateur linéaire continu u de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ (μ quelconque) admet la factorisation $u = T_g \circ v$, où v est un opérateur linéaire continu de E' dans $L^q(\Omega,\mu)$, T_g l'opérateur de multiplication par $g \in L^r(\Omega,\mu)$, $1/p = 1/q + 1/r$, et :

$$\|g\|_{L^r} \leq 1 \ ; \ \|v\| \leq C\|u\|$$

Dans ces conditions on a pour tout espace quasi-normé F l'égalité $\pi_q(E,F) = \pi_p(E,F)$, avec plus précisément :

$$\forall\ w \in \pi_q(E,F), \qquad \pi_p(w) \leq C\pi_q(w)$$

Nous démontrerons d'abord un lemme :

<u>Lemme</u> : Sous l'hypothèse a), on a la propriété suivante : toute suite $(x_1,\ldots,x_n)$ de vecteurs de E peut s'écrire $x_i = \alpha_i y_i$, avec α_i réel, $y_i \in E$, et :

$$\Sigma|\alpha_i|^r \leq 1 \ ; \qquad \|(y_i)\|_q^* \leq C\ \|(x_i)\|_p^*$$

<u>Démonstration</u> : Soit $(x_1,\ldots,x_n)$ une suite de vecteurs de E que l'on peut supposer non nuls. Désignons par l_n^p l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la (quasi)-norme $(\sum_{i=1}^n |C_i|^p)^{1/p}$. On définit un opérateur u de E' dans l_n^p par :

$$u(\xi) = (\langle x_i,\xi\rangle)$$

Par hypothèse on peut factoriser u sous la forme

$u = \alpha \circ v$, où $v \in L(E', l_n^q)$ et où α est un opérateur diagonal de multiplication, avec :

$$\Sigma |\alpha_i|^r \leq 1 \ ; \quad \|v\| \leq C\|u\|$$

Posons alors $y_i = \alpha_i^{-1} x_i$ (α_i est non nul, car nous avons supposé x_i non nul). On voit que l'opérateur v est défini par :

$$v(\xi) = (\langle y_i, \xi\rangle), \text{ donc :}$$

$\|(y_i)\|_q^* = \|v\| \leq C\|u\| = C\|(x_i)\|_p^*$, ce qui démontre le lemme.

Démontrons maintenant la proposition : soient F un espace quasi-normé, $w \in \pi_q(E,F)$, et $(x_1,\dots,x_n)$ une suite de vecteurs de E. Ecrivons $x_i = \alpha_i y_i$, la décomposition ayant les propriétés énoncées dans le lemme. Nous aurons d'après l'inégalité de Hölder :

$$(\Sigma\|w(x_i)\|^p)^{1/p} = (\Sigma\|\alpha_i w(y_i)\|^p)^{1/p}$$

$$\leq (\Sigma|\alpha_i|^r)^{1/r}(\Sigma\|w(y_i)\|^q)^{1/q} \leq \pi_q(w)\|(y_i)\|_q^* \leq C\pi_q(w)\ \|(x_i)\|_p^* ,$$

ce qui montre que $\pi_p(w) \leq C\pi_q(w)$.

<u>Remarque 1</u> : On peut intervertir les rôles de E et E' dans la proposition 1 : si E vérifie a), on aura $\pi_q(E',F) = \pi_p(E',F)$. Cela résulte de la densité de la boule de E dans celle de E" pour $\sigma(E'',E')$, qui implique :

$$\sup_{\|x\|_E \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x,\xi_i\rangle|^p\right)^{1/p} = \sup_{\|x\|_{E''}\leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x,\xi\rangle|^p\right)^{1/p}$$

Nous allons voir que la réciproque de la proposition 1 est vraie (moyennant une hypothèse additionnelle si $p < 1$).

<u>Théorème</u> : Soient p et q deux membres réels tels que $0 < p \leq q \leq \infty$, C une constante ≥ 0 et E un espace de Banach (tel que E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique si $p < 1$). Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Tout opérateur linéaire continu u de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ (μ quelconque) admet la factorisation $u = T_g \circ v$, où $v \in L(E',L^q(\Omega,\mu))$, et :

$$\|g\|_{L^r} \leq 1 \quad ; \quad \|v\| \leq C\|u\|$$

b) Toute suite $(x_1,\dots,x_n)$ de vecteurs de E peut s'écrire $x_i = \alpha_i y_i$, avec $\Sigma|\alpha_i|^r \leq 1$ et :

$$\|(y_i)\|_q^* \leq C\|(x_i)\|_p^*$$

c) Pour tout espace quasi-normé F et tout opérateur $w \in \pi_q(E,F)$, on a :

$$\pi_p(w) \leq C\,\pi_q(w)$$

<u>Démonstration</u> : Nous avons déjà vu a) ⇒ b) ⇒ c). Montrons c) ⇒ a), en supposant d'abord que μ soit une probabilité. Soit u un opérateur linéaire de E' dans $L^p(\Omega,\mu)$. L'opérateur u définit une probabilté cylindrique λ de type p sur E, telle que :

$$\xi(\lambda) = u(\xi)(\mu) \quad ; \quad \|\lambda\|_p^* = \|u\| \qquad \text{(cf. exposé IV).}$$

Soit $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ une suite d'éléments de E'. On considère l'opérateur w de E dans l_n^q défini par :

$$w(x) = (\langle x,\xi_i\rangle)$$

On vérifie facilement que $\pi_q(w) \leq (\Sigma\|\xi_i\|^q)^{1/q}$. (En décomposant w sous la forme :

$$E \longrightarrow l_n^\infty \xrightarrow{(\|\xi_i\|)} l_n^q$$

$$x \longmapsto (\langle x,\|\xi_i\|^{-1}.\xi_i\rangle) \longmapsto (\langle x,\xi_i\rangle) \qquad)$$

On a donc d'après c) $\pi_p(w) \leq C(\Sigma\|\xi_i\|^q)^{1/q}$. D'après l'exposé III, prop. (III,3.1), l'opérateur w est p-radonifiant dans le cas $p \geq 1$ (suppression du bidual ici!), et dans le cas $p < 1$, nous avons supposé que E' vérifie l'hypothèse d'approximation (ce qui l'implique pour le couple (E,E') d'après S. Simmons) . On aura donc :

$$\|w(\lambda)\|_p \leq \pi_p(w)\ \|\lambda\|_p^* \leq C\|u\|(\Sigma\|\xi_i\|^q)^{1/q}$$

Considérons l'application φ de Ω dans l_n^q définie par :

$$\omega \longrightarrow (u(\xi_i)(\omega))$$

On a $w(\lambda) = \varphi(\mu)$. Pour le voir, il suffit de montrer que $c(w(\lambda)) = c(\varphi(\mu))$ pour tout $c \in l_n^{q'}$. Or :

$$c(w(\lambda)) = {}^t w(c)(\lambda) = (\Sigma\, c_i\, \xi_i)(\lambda) = u(\Sigma\, c_i\, \xi_i)(\mu) =$$

$$(\Sigma\, c_i\, u(\xi_i))(\mu) = c \circ \varphi(\mu)$$

Par conséquent :

$$\|w(\lambda)\|_p = (\int \|\varphi(\omega)\|^p d\mu(\omega))^{1/p} = (\int(\Sigma|u(\xi_i)(\omega)|^q)^{p/q} d\mu(\omega))^{1/p}$$

Le résultat découle maintenant du théorème 1 de l'exposé XV, puisque l'on a pour toute suite $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ dans E' :

$$(\int (\Sigma|u(\xi_i)|^q)^{p/q} d\mu)^{1/p} \leq C\|u\|\ (\Sigma\|\xi_i\|^q)^{1/q}$$

Supposons maintenant que μ soit une mesure quelconque, et soit u un opérateur linéaire continu de E' dans $L^p(\Omega,\mu)$. Si $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ est une suite d'éléments de E', on peut trouver une fonction $k \geq 0$ sur Ω, telle que $\int k d\mu = 1$, et que :

$$\cup\{|u(\xi_i)| > 0\} \subset \{k > 0\} = A$$

Considérons l'opérateur $\tilde{k}$ de $L^p(\Omega,\mu)$ dans $L^p(\Omega, k\mu)$ défini par :

$$f \longrightarrow \chi_A k^{-1/p} f\ ; \text{ on a } \|\tilde{k}\| \leq 1.$$

D'après la première partie de la démonstration l'opérateur $\tilde{k}\circ u$ vérifie la condition de factorisation :

$$\left(\int \left(\Sigma \left|\tilde{k}\circ u(\xi_i)\right|^q\right)^{p/q} d(k\mu)\right)^{1/p} \leq C \left\|\tilde{k}\circ u\right\| \left(\Sigma \left\|\xi_i\right\|^q\right)^{1/q}$$

Mais puisque $\{|u(\xi_i)| > 0\} \subset A$, on a :

$$\left(\int \left(\Sigma \left|\tilde{k}\circ u(\xi_i)\right|^q\right)^{p/q} d(k\mu)\right)^{1/p} = \left(\int \left(\Sigma \left|u(\xi_i)\right|^q\right)^{p/q} d\mu\right)^{1/p},$$

ce qui prouve que la condition de factorisation est réalisée pour u lui-même, et la démonstration est terminée.

Remarque 2 : Dans le théorème 1, on peut encore échanger les rôles de E et E'. Compte tenu de la remarque 1, il suffit de voir que si $\pi_q(E',F) = \pi_p(E',F)$ pour tout F, tout opérateur linéaire continu u de E dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$. (Alors le théorème 1 fournit la réponse pour les opérateurs de E" dans $L^p(\Omega,\mu)$) . C'est donc trivial pour $p > 1$, car u se prolonge à E" par bitransposition. Ce sera encore vrai si u est limite simple d'opérateurs (u_i) de norme $\leq \|u\|$ prolongeables à E" avec conservation de la norme, (car la condition de factorisation passe à la limite simple), en particulier d'opérateurs (u_i) de rang fini, de norme $\leq \|u\|$. Cela règle le cas $p = 1$ (car L^1 vérifie l'hypothèse d'approximation métrique), et le cas $p < 1$, si l'on fait l'hypothèse d'approximation métrique sur E.