Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

J. T. Lapresté

Opérateurs se factorisant par un espace L^P, d'après S. Kwapien (suite et fin)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 16 bis, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A16_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

OPERATEURS SE FACTORISANT PAR UN ESPACE L^p

D'APRES S. KWAPIEN

(suite et fin)

par J. T. LAPRESTÉ

Exposé N° 16 Bis

14 Mars 1973

§ 1. QUELQUES NOUVEAUX IDEAUX

1.1 Notons I_F^∞ l'injection canonique de l'espace de Banach F dans l'espace $l^\infty(U_{F'})$ et Q_E^1 la surjection canonique de $l_1(U_E)$ sur E. Si alors $(\mathcal{A},\alpha)$ est un idéal normé on peut lui associer quatre autres idéaux $(\mathcal{A}\backslash,\alpha\backslash)$, $(\mathcal{A},/\alpha)$, $(\mathcal{A}/,\alpha/)$ et $(\backslash\mathcal{A},\backslash\alpha)$ appelés respectivement enveloppes injectives à droite, injective à gauche, projective à droite, projective à gauche, de $\mathcal{A}$, définis par les conditions suivantes :

① $T \in \mathcal{A}\backslash(E,F)$ si et seulement si $I_F^\infty \circ T \in \mathcal{A}(E,l^\infty(U_{F'}))$ et $\alpha\backslash(T) = \alpha(I_F^\infty \circ T)$

② $T \in /\mathcal{A}(E,F)$ si et seulement si $T\circ Q_E^1 \in \mathcal{A}(l'(U_E),F)$ et $/\alpha(T) = \alpha(T\circ Q_E^1)$

③ $T \in \mathcal{A}/(E,F)$ si et seulement si il existe $s \in \mathcal{A}(E,l,(U_F))$ avec $T = Q_F^1 \circ S$ et $\alpha/(T) = \alpha(S)$

④ $T \in \backslash\mathcal{A}(E,F)$ si et seulement si il existe $S \in \mathcal{A}(l^\infty(U_{E'}),F)$ avec $T = S\circ \mathfrak{J}_E^\infty$ et $\backslash\alpha(T) = \alpha(S)$.

De plus, on peut montrer que

$((/\mathcal{A})^*(/\alpha)^*) = (\mathcal{A}^*/,\alpha^*/)$ et

$((\mathcal{A}\backslash)^*(\alpha\backslash)^*) = (\backslash\mathcal{A}^*;\backslash\alpha^*)$.

1.2 Nous allons à présent déterminer les adjoints respectifs de $\mathcal{N}_{r,s}\backslash$, $/\mathcal{N}_{r,s}$, $/\mathcal{N}_{r,s}\backslash$. Pour cela définissons ${}^t\pi_s\mathcal{J}_r$ comme la classe des opérateurs qui s'écrivent comme le composé $B\circ A$ d'un opérateur A r-intégral et d'un opérateur B dont le transposé est s-sommant. On définit une norme sur cette classe en posant ${}^t\pi_s i_r(T) = \inf\,[\pi_s({}^tB).i_r(A)]$ la borne étant prise sur les factorisations possibles pour T.

De même on définit ${}^t\mathcal{J}_s\Pi_r$ et ${}^t\mathcal{J}_s\mathcal{J}_r$ on a alors la proposition suivante.

1.3 <u>Proposition</u> : Les adjoints respectifs des idéaux

$$(\mathcal{N}_{s,r}\backslash, \nu_{s,r}\backslash),\ (/\mathcal{N}_{s,r}, /\nu_{s,t}) \text{ et } (/\mathcal{N}_{s,r}\backslash, /\nu_{s,r}\backslash)$$

ne sont autres que $({}^t\Pi_s\, \mathfrak{I}_r, {}^t\pi_s i_r)\,({}^t\mathfrak{I}_s\, \Pi_r, {}^t i_s \pi_r)$ et $({}^t\mathfrak{I}_s\, \mathfrak{I}_r, {}^t i_s i_r)$.

▲ Nous nous contenterons de la démontrer dans le cas de $(\mathcal{N}_{s,r}\backslash, \nu_{s,r}\backslash)$ les autres démonstrations étant similaires.

D'après 1.1 il suffit de voir que l'on a

$$(\backslash\Pi_{p,r,s}\, \backslash\pi_{p,r,s}) = ({}^t\Pi_s\, \mathfrak{I}_r, {}^t\pi_s\, i_r) \quad (\tfrac{1}{p} = \tfrac{1}{r} + \tfrac{1}{s})$$

Par définition si $T \in {}^t\Pi_s\, \mathfrak{I}_r(E,F)$ on peut écrire :

$$T : E \xrightarrow{A} G \xrightarrow{B} F$$

comme $A \in \mathfrak{I}_r(E,G)$, il admet par conséquent une factorisation :

$$E \xhookrightarrow{u} L^\infty(U_{E'}) \xrightarrow{v} G$$

avec $v \in \Pi_r(L^\infty(U_{E'}), G)$.

Si l'on considère l'injection I_E^∞ de E dans $l^\infty(U_{E'})$ la propriété d'extension de $L^\infty(U_{E'})$ permet d'étendre l'application u en une application $\tilde{u}$ de $l^\infty(U_{E'})$ dans $L^\infty(U_{E'})$ avec $\|u\| = \|\tilde{u}\|$ et $\tilde{u}\, I_E^\infty = u$.

On a donc $T \in \Pi_{p,r,s}(E,F)$, de plus comme $\pi_r(v) = i_r(A)$, on a également

$${}^t\pi_s i_r \geq \pi_{p,r,s}$$

Réciproquement si $T \in \backslash\Pi_{p,r,s}(E,F)$ on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "I_E^\infty"'] & F \\
l^\infty(U_{E'}) \arrow[ur, "S"'] &
\end{tikzcd}$$

avec $S \in \Pi_{p,r,s}(l^\infty(U_{E'}),F)$ mais S s'écrit alors $B_1 \circ A_1$ avec ${}^tB_1 \in \Pi_s(F',G_1')$ et $A_1 \in \Pi_r(l^\infty(U_{E'}),G)$.

Mais il est bien connu qu'un opérateur r-sommant partant d'un espace de type L^∞ est r-intégral ce qui achève la démonstration.

D'un autre côté, on peut également considérer les idéaux $\Gamma_{r,s}\backslash$, $/\Gamma_{r,s}$ et $/\Gamma_{r,s}\backslash$ et on a la proposition :

1.4 <u>Proposition</u> : ① $T \in \Gamma_{r,s}\backslash(E,F)$ si et seulement si T admet la factorisation

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] & S_r \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, hook, "i_1"'] & S_{s'} \arrow[r] \arrow[d, hook, "i_2"] & F \\
 & L^r(\Omega,\mu) \arrow[r, hook, "j"'] & L^{s'}(\Omega,\mu) &
\end{tikzcd}$$

où (Ω,μ) est un espace mesuré, j_1 est l'application induite sur S_r, $S_{s'}$ de l'injection canonique j de $L^r(\Omega,\mu)$ dans $L^{s'}(\Omega,\mu)$ par les injections i_1, i_2

② $T \in /\Gamma_{r,s}(E,F)$ si et seulement si $B_F T$ admet la factorisation

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] & Q_r \arrow[r, "j_1"] & Q_{s'} \arrow[r] & F'' \\
 & L^r(\Omega,\mu) \arrow[r, "j"'] \arrow[u, "\pi_1"] & L^{s'}(\Omega,\mu) \arrow[u, "\pi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

où ici Q_r et $Q_{s'}$ sont des quotients des espaces $L^r(\Omega,\mu)$ et $L^{s'}(\Omega,\mu)$

③ $T \in /\Gamma_{r,s}\backslash(E,F)$ si et seulement si T admet la factorisati

$$E \longrightarrow SQ_r \xrightarrow{j_1} SQ_{s'} \longrightarrow F''$$

(où j_1 est induite par l'injection j de $L^r(\Omega,\mu)$ dans $L^{s'}(\Omega,\mu)$),

à travers des sous-espaces de quotients de $L^r(\Omega,\mu)$ et $L^{s'}(\Omega,\mu)$.

Démontrons simplement la 1ère assertion. Supposons que T admette une telle factorisation ; on a le diagramme :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "A"] & S_r \arrow[r, hook, "j_1"] \arrow[d, hook, "i_1"'] & S_{s'} \arrow[r, "B"] \arrow[d, hook, "i_2"'] & F \arrow[d, "I_F^\infty"] \\ & L^r(\Omega,\mu) \arrow[r, "j"'] & L^{s'}(\Omega,\mu) \arrow[r, dashed, "B_1"'] & l^\infty(U_{F'}) \end{tikzcd}$$

la propriété d'extension de $l^\infty(U_{F'})$ permet d'étendre B en un opérateur de $L^{s'}(\Omega,\mu)$ dans $l^\infty(U_{F'})$ ce qui montre que $I_F^\infty \circ T$ est dans $\Gamma_{r,s}$.
Réciproquement, si $T \in \Gamma_{r,s}\backslash(E,F)$, $I_F^\infty \circ T \in \Gamma_{r,s}(E\ l^\infty(U_{F'})$, et on a la factorisation

$$T : E \xrightarrow{A} L^r(\Omega,\mu) \xleftarrow{j} L^{s'}(\Omega,\mu) \xrightarrow{B} l^\infty(U_{F'})$$

Soit $S_r = \overline{A(E)}$ adhérence dans $L^r(\Omega,\mu)$

$S_{s'} = \overline{j\,S_r}$ adhérence dans $L^{s'}(\Omega,\mu)$

Il est facile de constater alors que $B(S_{s'}) \subset F$ et le théorème est démontré. ▼

D'autre part on peut remarquer en se basant sur la définition des différentes barres que l'on a un lemme point pour analogue à (3.9, exposé XIII) ; deplus la maximalité de $\Gamma_{r,s}$ implique celle de $/\Gamma_{r,s}$, $\Gamma_{r,s}\backslash$ et $/\Gamma_{r,s}\backslash$ et on peut démontrer le théorème

1.5 <u>Théorème</u> : ① $u \in /\Gamma_{r,s}(E,F)$ si et seulement si pour tout espace de Banach G et tout opérateur $v \in \prod_s(F,G)$, ${}^t(vu) \in \prod_{r'}(G',E')$

② $u \in \Gamma_{r,s}\backslash(E,F)$ si et seulement si pour tout espace de Banach G et tout opérateur $v \in \mathfrak{I}_s(F,G)$ on a ${}^t(vu) \in \mathfrak{I}_{r'}(G',E')$

③ $u \in /\Gamma_{r,s}\backslash(E,F)$ si et seulement si pour tout espace de Banach G et tout opérateur $v \in \mathfrak{I}_s(F_1 g)$ on a ${}^t(vu) \in \prod_{r'}(G',E')$.

Ce théorème donne des caractérisations analogues à 3.4 (exposé XVI) pour les sous-espaces de L^p, les quotients de L^p et les sous-espaces de quotients de L^p.

ANNEXE

Nous avons dans l'exposé XVI admis le théorème

<u>Théorème</u> : Pour tout couple (p,r) d'indices vérifiant $1 < r < p < +\infty$, l'identité de l'espace de Hilbert H admet la factorisation :

$$H \xrightarrow{A} L^p(\Omega,\mu) \overset{j}{\hookrightarrow} L^r(\Omega,\mu) \xrightarrow{B} H$$

où (Ω,μ) est un espace de probabilité et j l'injection canonique.

▲ ① Démontrons d'abord le résultat dans le cas où H est l'espace l^2. Dans ce cas, considérons la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions de Rademacher. On sait que l'application :

$$u_r : l^2 \longrightarrow L^r([0,1],dx) : (c_n) \mapsto \sum_n c_n r_n$$

réalise un plongement pour tout réel r avec $0 \leq r < +\infty$. De plus l'image (commune) de l^2 par les u_r est complémentée dans chaque espace $L^r([0,1]dx)$, lorsque $1 < r < \infty$. En effet considérons l'application :

$$\pi_r : L^r([0,1],dx) \to l^2 : g \longrightarrow (\langle g, r_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$$

π_r est bien définie (elle n'est autre que ${}^t u_{r'}$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$) et de plus $\pi_r \circ u_r = id_{l^2}$, on a donc la factorisation: $id_{l^2} : l^2 \xrightarrow{u_r} L^r([0,1]dx) \xrightarrow{\pi_r} l^2$

mais également puisque si $p > r$ $u_r = j\ u_p$:

$$id_{l^2} : l^2 \xrightarrow{u_p} L^p([0,1]dx) \xrightarrow{j} L^r([0,1]dx) \xrightarrow{\pi_r} l^2$$

ce qui démontre l'assertion dans ce cas.

② Soient à présent H un espace de Hilbert arbitraire et (M,N) un couple de sous-espaces de H respectivement de dimension et de codimension finies.

On peut alors facilement trouver des opérateurs continus A, B, C, D avec $\|A\| = \|B\| = \|C\| = \|D\| = 1$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\mathfrak{J}_M"] \arrow[dr, "A"'] & & H \arrow[rrrr, "id_H"] & & & & H \arrow[rr, "P_N"] \arrow[dr, "C"'] & & H/N \\
& l^2 \arrow[ur, "B"'] & & & & & & l^2 \arrow[ur, "D"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif et $C\ id_H B = id_{l^2}$.

$$\text{Alors } \gamma_{p,r'}(P_N\ id_H\ \mathfrak{J}_M) \le \gamma_{p,r'}(id_{l^2})\ \|A\|\ \|D\|$$

$$\le \|u_p\|\ \|\pi_r\|$$

donc $\gamma_{p,r'}(id_H) \le \|u_p\|\ \|\pi_r\|$ par maximalité de $\Gamma_{p,r'}$.

Q.E.D. ▼