

# SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. T. LAPRESTÉ

**Opérateurs se factorisant par un espace  $L^p$ , d'après  
S. Kwapien (suite et fin)**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1972-1973), exp. n° 16 bis, p. 1-6

<[http://www.numdam.org/item?id=SAF\\_1972-1973\\_\\_\\_A16\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973___A16_0)>

© Séminaire Maurey-Schwartz  
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES  
*17, rue Descartes*  
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

OPERATEURS SE FACTORISANT PAR UN ESPACE  $L^p$   
=====

D'APRES S. KWAPIEN  
=====

(suite et fin)

par J. T. LAPRESTÉ



§ 1. QUELQUES NOUVEAUX IDEAUX

1.1 Notons  $I_F^\infty$  l'injection canonique de l'espace de Banach  $F$  dans l'espace  $l^\infty(U_F)$  et  $Q_E^1$  la surjection canonique de  $l_1(U_E)$  sur  $E$ . Si alors  $(\mathcal{A}, \alpha)$  est un idéal normé on peut lui associer quatre autres idéaux  $(\mathcal{A} \setminus, \alpha \setminus)$ ,  $(\mathcal{A}, / \alpha)$ ,  $(\mathcal{A} /, \alpha /)$  et  $(\setminus \mathcal{A}, \setminus \alpha)$  appelés respectivement enveloppes injectives à droite, injective à gauche, projective à droite, projective à gauche, de  $\mathcal{A}$ , définis par les conditions suivantes :

- ①  $T \in \mathcal{A} \setminus (E, F)$  si et seulement si  $I_F^\infty \circ T \in \mathcal{A}(E, l^\infty(U_F))$  et  $\alpha \setminus (T) = \alpha(I_F^\infty \circ T)$
- ②  $T \in / \mathcal{A} (E, F)$  si et seulement si  $T \circ Q_E^1 \in \mathcal{A}(l_1(U_E), F)$  et  $/ \alpha (T) = \alpha(T \circ Q_E^1)$
- ③  $T \in \mathcal{A} / (E, F)$  si et seulement si il existe  $s \in \mathcal{A}(E, l_1(U_F))$  avec  $T = Q_F^1 \circ S$  et  $\alpha / (T) = \alpha(S)$
- ④  $T \in \setminus \mathcal{A} (E, F)$  si et seulement si il existe  $S \in \mathcal{A}(l^\infty(U_E), F)$  avec  $T = S \circ J_E^\infty$  et  $\setminus \alpha (T) = \alpha(S)$ .

De plus, on peut montrer que

$$((/ \mathcal{A})^* (/ \alpha)^*) = (\mathcal{A}^* /, \alpha^* /) \quad \text{et}$$

$$((\mathcal{A} \setminus)^* (\alpha \setminus)^*) = (\setminus \mathcal{A}^*; \setminus \alpha^*).$$

1.2 Nous allons à présent déterminer les adjoints respectifs de  $\mathcal{N}_{r,s} \setminus$ ,  $/ \mathcal{N}_{r,s}$ ,  $/ \mathcal{N}_{r,s} \setminus$ . Pour cela définissons  ${}^t \pi_s \mathcal{J}_r$  comme la classe des opérateurs qui s'écrivent comme le composé  $B \circ A$  d'un opérateur  $A$   $r$ -intégral et d'un opérateur  $B$  dont le transposé est  $s$ -sommant. On définit une norme sur cette classe en posant  ${}^t \pi_s i_r (T) = \inf [\pi_s ({}^t B) \cdot i_r (A)]$  la borne étant prise sur les factorisations possibles pour  $T$ .

De même on définit  ${}^t \mathcal{J}_s \prod_r$  et  ${}^t \mathcal{J}_s \mathcal{J}_r$  on a alors la proposition suivante.

1.3 Proposition : Les adjoints respectifs des idéaux

$$(\mathcal{N}_{s,r} \setminus, \nu_{s,r} \setminus), (/ \mathcal{N}_{s,r}, / \nu_{s,t}) \text{ et } (/ \mathcal{N}_{s,r} \setminus, / \nu_{s,r} \setminus)$$

ne sont autres que  $({}^t \prod_s \mathcal{J}_r, {}^t \pi_s i_r)$   $({}^t \mathcal{J}_s \prod_r, {}^t i_s \pi_r)$  et  $({}^t \mathcal{J}_s \mathcal{J}_r, {}^t i_s i_r)$ .

▲ Nous nous contenterons de la démontrer dans le cas de  $(\mathcal{N}_{s,r} \setminus, \nu_{s,r} \setminus)$  les autres démonstrations étant similaires.

D'après 1.1 il suffit de voir que l'on a

$$(\prod_{p,r,s} \setminus \pi_{p,r,s}) = ({}^t \prod_s \mathcal{J}_r, {}^t \pi_s i_r) \quad \left( \frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right)$$

Par définition si  $T \in {}^t \prod_s \mathcal{J}_r(E, F)$  on peut écrire :

$$T : E \xrightarrow{A} G \xrightarrow{B} F$$

comme  $A \in \mathcal{J}_r(E, G)$ , il admet par conséquent une factorisation :

$$E \xrightarrow{u} L^\infty(U_E) \xrightarrow{v} G$$

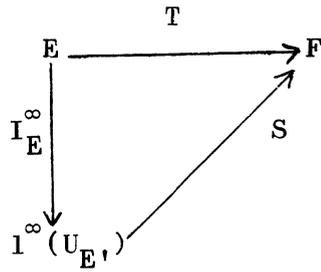
avec  $v \in \prod_r (L^\infty(U_E), G)$ .

Si l'on considère l'injection  $I_E^\infty$  de  $E$  dans  $L^\infty(U_E)$  la propriété d'extension de  $L^\infty(U_E)$  permet d'étendre l'application  $u$  en une application  $\tilde{u}$  de  $L^\infty(U_E)$  dans  $L^\infty(U_E)$  avec  $\|u\| = \|\tilde{u}\|$  et  $\tilde{u} I_E^\infty = u$ .

On a donc  $T \in \prod_{p,r,s} (E, F)$ , de plus comme  $\pi_r(v) = i_r(A)$ , on a également

$${}^t \pi_s i_r \geq \pi_{p,r,s}$$

Réciproquement si  $T \in \prod_{p,r,s} (E, F)$  on a le diagramme

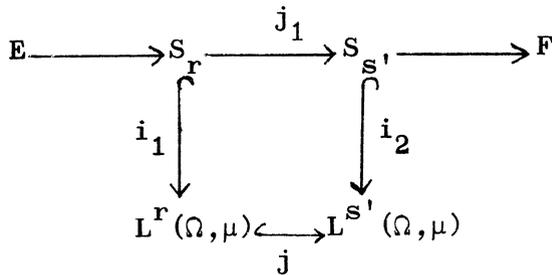


avec  $S \in \prod_{p,r,s}(I^\infty(U_{E'}), F)$  mais  $S$  s'écrit alors  $B_1 \circ A_1$  avec  ${}^t B_1 \in \prod_S(F', G'_1)$  et  $A_1 \in \prod_r(I^\infty(U_{E'}), G)$ .

Mais il est bien connu qu'un opérateur  $r$ -sommant partant d'un espace de type  $L^\infty$  est  $r$ -intégral ce qui achève la démonstration.

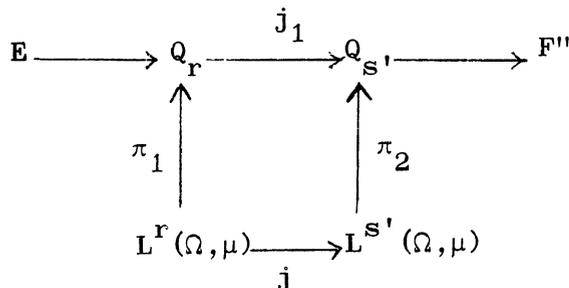
D'un autre côté, on peut également considérer les idéaux  $\Gamma_{r,s} \setminus, / \Gamma_{r,s}$  et  $/ \Gamma_{r,s} \setminus$  et on a la proposition :

**1.4 Proposition** : ①  $T \in \Gamma_{r,s} \setminus(E, F)$  si et seulement si  $T$  admet la factorisation



où  $(\Omega, \mu)$  est un espace mesuré,  $j_1$  est l'application induite sur  $S_r, S_{s'}$  de l'injection canonique  $j$  de  $L^r(\Omega, \mu)$  dans  $L^{s'}(\Omega, \mu)$  par les injections  $i_1, i_2$

②  $T \in / \Gamma_{r,s}(E, F)$  si et seulement si  $B_F T$  admet la factorisation



où ici  $Q_r$  et  $Q_{s'}$ , sont des quotients des espaces  $L^r(\Omega, \mu)$  et  $L^{s'}(\Omega, \mu)$

③  $T \in \Gamma_{r,s} \setminus (E, F)$  si et seulement si  $T$  admet la factorisation

$$E \longrightarrow SQ_r \xrightarrow{j_1} SQ_{s'} \longrightarrow F''$$

(où  $j_1$  est induite par l'injection  $j$  de  $L^r(\Omega, \mu)$  dans  $L^{s'}(\Omega, \mu)$ ),

à travers des sous-espaces de quotients de  $L^r(\Omega, \mu)$  et  $L^{s'}(\Omega, \mu)$ .

Démontrons simplement la 1ère assertion. Supposons que  $T$  admette une telle factorisation ; on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{A} & S_r & \xleftarrow{j_1} & S_{s'} & \xrightarrow{B} & F \\
 & & \downarrow i_1 & & \downarrow i_2 & & \downarrow I_F^\infty \\
 & & L^r(\Omega, \mu) & \xrightarrow{j} & L^{s'}(\Omega, \mu) & \xrightarrow{B_1} & l^\infty(U_{F'})
 \end{array}$$

la propriété d'extension de  $l^\infty(U_{F'})$  permet d'étendre  $B$  en un opérateur de  $L^{s'}(\Omega, \mu)$  dans  $l^\infty(U_{F'})$  ce qui montre que  $I_F^\infty \circ T$  est dans  $\Gamma_{r,s}$ .

Réciproquement, si  $T \in \Gamma_{r,s} \setminus (E, F)$ ,  $I_F^\infty \circ T \in \Gamma_{r,s}(E, l^\infty(U_{F'}))$ , et on a la factorisation

$$T : E \xrightarrow{A} L^r(\Omega, \mu) \xleftarrow{j} L^{s'}(\Omega, \mu) \xrightarrow{B} l^\infty(U_{F'})$$

Soit  $S_r = \overline{A(E)}$  adhérence dans  $L^r(\Omega, \mu)$

$S_{s'} = \overline{j S_r}$  adhérence dans  $L^{s'}(\Omega, \mu)$

Il est facile de constater alors que  $B(S_{s'}) \subset F$  et le théorème est démontré. ▼

D'autre part on peut remarquer en se basant sur la définition des différentes barres que l'on a un lemme point pour analogue à (3.9, exposé XIII) ; de plus la maximalité de  $\Gamma_{r,s}$  implique celle de  $\Gamma_{r,s}$ ,  $\Gamma_{r,s} \setminus$  et  $\Gamma_{r,s} \setminus$  et on peut démontrer le théorème

1.5 Théorème : ①  $u \in \Gamma_{r,s}(E,F)$  si et seulement si pour tout espace de Banach  $G$  et tout opérateur  $v \in \prod_s(F,G)$ ,  $t(vu) \in \prod_{r'}(G',E')$

②  $u \in \Gamma_{r,s} \setminus(E,F)$  si et seulement si pour tout espace de Banach  $G$  et tout opérateur  $v \in \mathcal{J}_s(F,G)$  on a  $t(vu) \in \mathcal{J}_{r'}(G',E')$

③  $u \in \Gamma_{r,s} \setminus(E,F)$  si et seulement si pour tout espace de Banach  $G$  et tout opérateur  $v \in \mathcal{J}_s(F_1, g)$  on a  $t(vu) \in \prod_{r'}(G',E')$ .

Ce théorème donne des caractérisations analogues à 3.4 (exposé XVI) pour les sous-espaces de  $L^p$ , les quotients de  $L^p$  et les sous-espaces de quotients de  $L^p$ .

## ANNEXE

Nous avons dans l'exposé XVI admis le théorème

Théorème : Pour tout couple  $(p,r)$  d'indices vérifiant  $1 < r < p < +\infty$ , l'identité de l'espace de Hilbert  $H$  admet la factorisation :

$$H \xrightarrow{A} L^p(\Omega, \mu) \xrightarrow{j} L^r(\Omega, \mu) \xrightarrow{B} H$$

où  $(\Omega, \mu)$  est un espace de probabilité et  $j$  l'injection canonique.

▲ ① Démontrons d'abord le résultat dans le cas où  $H$  est l'espace  $l^2$ . Dans ce cas, considérons la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des fonctions de Rademacher. On sait que l'application :

$$u_r : l^2 \longrightarrow L^r([0,1], dx) : (c_n) \mapsto \sum_n c_n r_n$$

réalise un plongement pour tout réel  $r$  avec  $0 \leq r < +\infty$ . De plus l'image

(commune) de  $l^2$  par les  $u_r$  est complétée dans chaque espace  $L^r([0,1]dx)$ , lorsque  $1 < r < \infty$ . En effet considérons l'application :

$$\pi_r : L^r([0,1], dx) \rightarrow l^2 : g \longrightarrow (\langle g, r_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$$

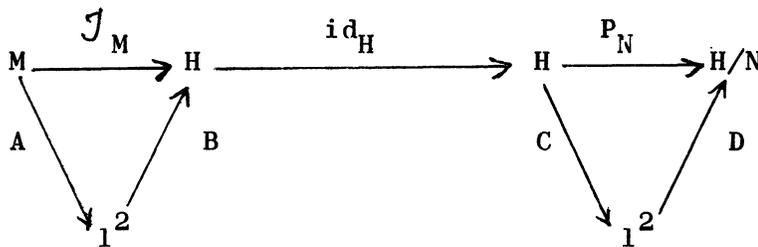
$\pi_r$  est bien définie (elle n'est autre que  ${}^t u_r$ ,  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ ) et de plus  $\pi_r \circ u_r = id_{l^2}$ , on a donc la factorisation:  $id_{l^2} : l^2 \xrightarrow{u_r} L^r([0,1]dx) \xrightarrow{\pi_r} l^2$  mais également puisque si  $p > r$   $u_r = j \circ u_p$  :

$$id_{l^2} : l^2 \xrightarrow{u_p} L^p([0,1]dx) \xrightarrow{j} L^r([0,1]dx) \xrightarrow{\pi_r} l^2$$

ce qui démontre l'assertion dans ce cas.

② Soient à présent  $H$  un espace de Hilbert arbitraire et  $(M, N)$  un couple de sous-espaces de  $H$  respectivement de dimension et de codimension finies.

On peut alors facilement trouver des opérateurs continus  $A, B, C, D$  avec  $\|A\| = \|B\| = \|C\| = \|D\| = 1$  tel que le diagramme



soit commutatif et  $C \circ id_H \circ B = id_{l^2}$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors } \gamma_{p,r'}(P_N \circ id_H \circ J_M) &\leq \gamma_{p,r'}(id_{l^2}) \|A\| \|D\| \\ &\leq \|u_p\| \|\pi_r\| \end{aligned}$$

donc  $\gamma_{p,r'}(id_H) \leq \|u_p\| \|\pi_r\|$  par maximalité de  $\Gamma_{p,r'}$ .

Q.E.D. ▼