J. T. Lapresté

Opérateurs se factorisant par un espace L^P, d'après S. Kwapien

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 16, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A15_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

OPERATEURS SE FACTORISANT PAR UN ESPACE L^p

D'APRES S. KWAPIEN

par J. T. LAPRESTÉ

Exposé N° XVI

7 Mars 1973

Cet exposé est la suite de l'exposé XIII, dont on reprend les notations.

§ 1 MAXIMALITE DE $\Gamma_{r,s}$

On a démontré dans l'exposé XIII, que

$$(\prod_{p,r,s},\pi_{p,r,s}) = (\Gamma^*_{s,r},\gamma^*_{s,r}).$$

Nous allons démontrer maintenant que $(\prod^*_{p,r,s},\pi^*_{p,r,s}) = (\Gamma_{s,r},\gamma_{s,r})$.

1.1 Rappelons tout d'abord la définition et les propriétés élémentaires des ultraproduits : [cf [1]].

Si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces de Banach indexée par un ensemble I préordonné filtrant, on désignera par $l_\infty(E_i)_I$ l'espace des familles $x = (x_i)_{i\in I}$ avec $x_i \in E_i$ et $\sup \|x_i\| < +\infty$.

Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre tendant vers l'infini sur I ; on définit une semi-norme sur $l_\infty(E_i)_I$ par

$$\|x\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|x_i\|$$

On désignera par $(\prod E_i)/\mathfrak{U}$ (ultraproduit) le quotient complété de $l^\infty(E_i)_I$ par cette semi-norme.

Si nous supposons données à présent une autre famille F_i d'espaces de Banach, et une famille u_i d'opérateurs linéaires de E_i dans F_i respectivement, on peut si u_i est uniformément bornée en déduire de manière naturelle un opérateur

$$u = \prod u_i/\mathfrak{U}$$

de $(\prod E_i)/\mathfrak{U}$ dans $\prod F_i/\mathfrak{U}$ vérifiant de plus

$$\|u\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|u_i\| < +\infty.$$

Démontrons à présent que $\Gamma_{r,s}$ est stable par ultraproduit :

1.2 <u>Proposition</u> : Supposons donné pour chaque $i \in I$ un opérateur $u_i \in L(E_i,F_i)$, tel que $\gamma_{r,s}(u_i) \leq 1$, et F_i étant supposé réflexif. On a alors :

$$\gamma_{r,s}(\prod u_i/\mathfrak{U}) \leq 1$$

$\triangle$ Par hypothèse on a pour chaque $i \in I$ une factorisation :

$$E_i \xrightarrow{A_i} L^r(\Omega_i,\mu_i) \xrightarrow{M_{\varphi_i}} L^{s'}(\Omega_i,\mu_i) \xrightarrow{B_i} F_i,$$

avec $\|A_i\| \leq 1+\varepsilon$, $\|B_i\| \leq 1+\varepsilon$, et où M_{φ_i} est la multiplication par une fonction φ_i que nous pouvons supposer <u>positive</u>,

$$\|\varphi_i\|_{L^p} \leq 1, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s} = 1.$$

Par passage à l'ultraproduit on en déduit :

$$\prod E_i/\mathfrak{U} \xrightarrow{A} L^r(\Omega_i,\mu_i)/\mathfrak{U} \xrightarrow{M} L^{s'}(\Omega_i,\mu_i)/\mathfrak{U} \xrightarrow{B} \prod F_i/\mathfrak{U},$$

avec $\|A\| \leq 1+\varepsilon$, $\|B\| \leq 1+\varepsilon$ et $\|M\| \leq 1$.

Mais on sait d'après [1] que $\prod L^r(\Omega_i,\mu_i)/\mathfrak{U}$ et $\prod L^{s'}(\Omega_i,\mu_i)/\mathfrak{U}$ s'identifient respectivement à des espaces $L^r(\Omega_1,\mu_1)$ et $L^{s'}(\Omega_2,\mu_2)$. Dans le cas $r = s'$, la démonstration est achevée puisque $\prod u_i/\mathfrak{U}$ se factorise par un espace L^r. Dans le cas $s' < r$, le résultat découlera de la proposition suivante :

1.3 <u>Proposition</u> : Soit pour chaque $i \in I$ M_i un opérateur <u>positif</u> de $L^r(\Omega_i,\mu_i)$ dans $L^{s'}(\Omega_i,\mu_i)$, tel que $\|M_i\| \leq 1$. On a alors :

$$\gamma_{r,s}(\prod M_i/\mathfrak{U}) \leq 1.$$

△ Les espaces $\prod L^r/\mathfrak{U}$ et $\prod L^{s'}/\mathfrak{U}$ sont des espaces réticulés pour l'ordre défini par $f \leq g$ si et seulement si il existe des représentants (f_i) et (g_i) de f et g tels que $f_i \leq g_i$ pour chaque $i \in I$.

Il en résulte aussitôt que $M = \prod M_i/\mathfrak{U}$ est un opérateur positif. De plus, l'identification de $\prod L^r/\mathfrak{U}$ et $\prod L^{s'}/\mathfrak{U}$ à des espaces $L^r(\Omega_1,\mu_1)$ et $L^{s'}(\Omega_2,\mu_2)$ respecte l'ordre que nous avons défini (cf [1]). Par conséquent M est un opérateur positif de norme ≤ 1, de $L^r(\Omega_1,\mu_1)$ dans $L^{s'}(\Omega_2,\mu_2)$. D'après l'exposé XV, corollaire du théorème 1, l'opérateur M admet la factorisation

$$L^r(\Omega_1,\mu_1) \xrightarrow{v} L^r(\Omega_2,\mu_2) \xrightarrow[\varphi]{M} L^{s'}(\Omega_2,\mu_2),$$

avec $\|v\| \leq \|M\| \leq 1$; $\|\varphi\|_{L^p} \leq 1$, donc $\gamma_{r,s}(M) \leq 1$. ▼

1.4 <u>Théorème</u> : L'idéal $(\Gamma_{r,s},\gamma_{r,s})$ est maximal.

Soient E et F deux espaces de Banach. Désignons par I l'ensemble des couples (M,N) ou M(resp.N) est un sous-espace de dimension finie (resp. codimension finie) de E (resp F), ordonné par

$$(M,N) < (M_1,N_1)$$

si et seulement si M est un sous-espace de M_1 et N_1 un sous-espace de N .

Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre tendant vers l'infini sur I. Si $i = (M,N)$ convenons de poser $M = M_i$, $N = N_i$.

Soit u un opérateur linéaire de E dans F, tel que pour tous couples X,Y d'espaces de dimension finie et A, B d'opérateurs avec $A \in L(X,E)$, $B \in L(F,Y)$, on ait :

$$\gamma_{r,s}(B\,u\,A) \leq 1.$$

Nous devons montrer que $\gamma_{r,s}(u) \leq 1$ [XIII, 2.2 ②]. Par hypothèse on a pour chaque $i \in I$ un opérateur u_i de M_i dans F/N_i avec $\gamma_{r,s}(u_i) \leq 1$ on en déduit pour l'opérateur

$$\tilde{u} = \prod u_i/\mathfrak{U} \quad \text{de } (\prod M_i)/\mathfrak{U} \text{ dans } (\prod F/N_i)/\mathfrak{U}$$

l'inégalité $\gamma_{r,s}(\tilde{u}) \leq 1$.

D'autre part, on peut définir une injection linéaire isométrique i de E dans $\prod M_i/\mathfrak{U}$ de la façon suivante : à chaque $x \in E$, on associe la classe de $(x_i)_{i\in I}$, où $x_i = 0$ si $x \notin M_i$, et $x_i = x$ sinon. De façon similaire, on construit une projection π de norme 1 de $\prod(F/N_i)/\mathfrak{U}$ sur F" [il suffit de transposer l'injection de F' dans $\prod N_i^o/\mathfrak{U}$].

Finalement, on a $\pi \circ \tilde{u} \circ i = B_F \circ u$, ce qui achève la démonstration . ▼

1.5 Corollaire : $(\prod^*_{p,r,s}, \pi^*_{p,r,s}) = (\Gamma_{s,r}, \gamma_{s,r})$, lorsque $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \leq 1$.

▲ Nous savons déjà que

$$(\prod_{p,r,s}, \pi_{p,r,s}) = (\Gamma^*_{s,r}, \gamma^*_{s,r}) \qquad \text{(XIII, 3.9 ②)}$$

Il suffit donc de montrer que $(\Gamma_{s,r}, \gamma_{s,r}) = (\Gamma^{**}_{s,r}, \gamma^{**}_{s,r})$, c'est-à-dire que $\Gamma_{s,r}$ est parfait (XIII,2.2 ①). Or $(\Gamma_{s,r}, \gamma_{s,r})$ est maximal, donc parfait d'après XIII, 2.3. ▼

1.6 Remarque : Dans le cas particulier $s = +\infty$, on retrouve les résultats de Pietsch :

$$(\prod_r, \pi_r) = (\mathfrak{I}^*_{r'}, i^*_{r'}) \; ; \; (\prod^*_r, \pi^*_r) = (\mathfrak{I}_{r'}, i_{r'})$$

§ 2 COMPLEMENTS SUR LES OPERATEURS p.r.s. SOMMANTS : $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$.

Nous allons voir que les éléments de $\prod_{p,r,s}$ s'expriment simplement en fonction de ceux de $\prod_r$ et $\prod_s$; plus précisément nous avons le théorème (Kwapien [2])

2.1 <u>Théorème</u> : Il est équivalent de dire

① $T \in \prod_{p,r,s}(E,F)$

② Il existe deux probabilités de Radon μ et ν portées respectivement par les boules unités $U_{E'}$ et $U_{F''}$ de E' et F'' telles que pour tout x de E, η de F' on ait

(1) $$\langle Tx, \eta\rangle \le \pi_{p,r,s}(T)\left(\int_{U_{E'}} |\langle x,\alpha\rangle|^r d\mu(\alpha)\right)^{1/r} \left(\int_{U_{F''}} |\langle \eta,\beta\rangle|^s d\nu(\beta)\right)^{1/s}$$

③ T admet la factorisation suivante

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "w"] \arrow[drrr, "T"'] & G_r \arrow[r, "v"] & H'_s \arrow[r, "{}^t u"] & F'' \\ & & & F \arrow[u, hook, "B_F"'] \end{tikzcd}$$

où v est un opérateur continu, w et u des opérateurs respectivement r-sommant et s-sommant ; G_r un sous-espace d'un espace $L^r(\Omega_1,\mu_1)$, H_s un sous-espace d'un espace $L^s(\Omega_2,\mu_2)$ ($\Omega_i \mu_i$ espaces probabilisés).

④ Il existe un Banach G et deux opérateurs A,B : A r-sommant de E dans G, ${}^tB$ s-sommant de F' dans G' avec $T = B \circ A$.

▲ Nous nous cantonnerons au cas où r et s sont différents de $+\infty$ (Dans le cas contraire soit T, soit T' est q-sommant et le problème a déjà été traité dans l'exposé II). On supposera que p vérifie $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$.

① ⇒ ②

Considérons l'espace topologique (faiblement compact) K, $K = U_{E'} \times U_{F''}$ et soit C le sous-ensemble de $\mathcal{C}(K)$ défini par :

$$C = \{g : g \in \mathcal{C}(n) ;\ g(\eta,\xi) = \pi^p_{p,r,s}(T)\Big[\frac{p}{r}\sum_{i=1}^n |\langle x_i,\eta\rangle|^r + \frac{p}{s}\sum_{i=1}^n |\langle y_i,\xi\rangle|^s\Big] - \sum_{i=1}^n |\langle T x_i, y_i\rangle|^p\}$$

où $(x_i)_{i=1,\dots n}$, $(y_i)_{i=1\dots n}$ sont deux familles arbitraires de vecteurs respectivement dans E et F'. C'est évidemment un cône convexe de fonctions réelles, de plus la relation :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i,\eta\rangle|^r\right)^{p/r}\left(\sum_{i=1}^{n} |\langle y_i,\xi\rangle|^s\right)^{p/s} \leq \frac{p}{r}\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i,\eta\rangle|^r + \frac{p}{s}\sum_{i=1}^{n} |\langle y_i,\xi\rangle|^s$$

puisque $\frac{p}{r} + \frac{p}{s} = 1$, et la définition de $\pi_{p,r,s}(T)$ montre que chacun des éléments de C atteint sur K un maximum positif ou nul.

D'après le lemme (4.5) de l'exposé II il existe alors une mesure de probabilité sur K : μ telle que $\mu(g)$ soit positif ou nul pour tout g de C.

Appliquons ce résultat à

$$g_o(\eta,\xi) = \pi^p_{p,r,s}(T)\left[\frac{p}{r}|\langle x,\eta\rangle|^r + \frac{p}{s}|\langle y,\xi\rangle|^s\right] - |\langle Tx,y\rangle|^p$$

on a alors

$$(1)' \quad |\langle Tx,y\rangle|^p \leq \pi^p_{p,r,s}(T)\left[\frac{p}{r}\int_{U_{E'}} |\langle x,\eta\rangle|^r d\mu(\eta) + \frac{p}{s}\int_{U_{F''}} |\langle y,\xi\rangle|^s d\mu(\xi)\right]$$

Soit alors λ un nombre positif non nul. Par homogénéité on voit que dans (1)' on peut remplacer x par λx et y par y/λ sans changer le premier membre ;on conclut alors en utilisant l'inégalité élémentaire

$$a.b = \inf_{\lambda > 0} \left(\frac{1}{\alpha}\lambda^\alpha a^\alpha + \frac{1}{\beta}\lambda^{-\beta} b^\beta\right) \text{ dès que } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

② ⇒ ③

Soit w_o l'application de E dans $L^r(U_{E'},\mu)$ définie par

$$w_o(x)(\eta) = \langle x,\eta\rangle \quad \text{pour} \quad \eta \in U_{E'}$$

et de même u_o de F' dans $L^s(U_{F''},\nu)$

$$u_o(y)(\xi) = \langle\xi,y\rangle \quad \text{pour } \xi \in U_{F''}$$

Posons $G = \overline{w_o(E)}$ (adhérence dans $L^r(U_{E'},\mu)$)

$H = \overline{u_o(F')}$ (adhérence dans $L^s(U_{F''},\nu)$)

et soient w et u les applications w_o et u_o considérées à présent comme à valeur respectivement dans G et H. Par définition w et u sont respectivement r et s-sommante et de plus $\pi_r(w) \le 1$, $\pi_s(u) \le 1$.

L'application bilinéaire de $w_o(E) \times u_o(F')$ dans $\mathbb{C}$

$$v_o : (w(x),u(y)) \mapsto \langle Tx,y\rangle$$

est bien définie et est continue d'après l'inégalité (1), donc elle s'étend en une forme bilinéaire continue de $G \times H$ dans $\mathbb{C}$ avec conservation de la norme, et induit naturellement une application linéaire continue v de G dans H'. On a alors si $x \in E$ et $y \in F$

$$\begin{aligned} \langle {}^t u\, v\, w(x),y\rangle &= \langle v\, w(x)\, ,u(y)\rangle \\ &= v_o(w(x),u(y)) \\ &= \langle Tx,y\rangle \end{aligned}$$

③ $\Rightarrow$ ④ Il suffit de constater que ${}^t u \circ v$ est en fait à image dans F et de poser

$$A = w\ ,\ B = {}^t u \circ v$$

④ $\Rightarrow$ ① est une simple conséquence de l'inégalité de Hölder. ▼

2.2 1) Remarquons qu'une lecture un peu attentive de la démonstration met en lumière le fait que l'on a

$$\pi_{r,s}(T) = \inf(\pi_r(A).\pi_s({}^t B))$$

sur toutes les décompositions décrites en ④.

2) sur l'inégalité (1) il est facile de constater si l'on a $r \le r_1$ et $s \le s_1$ on a également

$$(\Pi_{r,s},\pi_{r,s}) \subset (\Pi_{r_1,s_1},\pi_{r_1,s_1})$$

On peut préciser d'ailleurs cette remarque par le théorème suivant :

2.3 <u>Théorème</u> : Pour tout couple (r,s) avec $r.s < +\infty$ on a l'inclusion $(\prod_{r,s}, \pi_{r,s}) \subset (\prod_{2,2}, \pi_{2,2})$ l'égalité ayant lieu si r et s sont supérieurs ou égaux à 2.

▲ pour ce théorème dû à Pietsch nous renvoyons à [4] . ▼

§ 3 <u>CONSEQUENCES ET APPLICATIONS DE LA THEORIE</u>

La forme des opérateurs (p,r,s)-sommants permet de donner en termes d'opérateurs p-sommants et p-intégraux une caractérisation des opérateurs appartenant à $\Gamma_{r,s}$.

3.1 <u>Théorème</u> : Une condition nécessaire et suffisante pour que $u \in \Gamma_{r,s}(E,F)$ est que pour tout espace de Banach G et tout $v \in \prod_s(F,G)$ on ait ${}^t(vu) \in \mathfrak{J}_{r'}(G' E')$

▲ ① Supposons que $u \in \Gamma_{r,s}(E,F)$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] & F \arrow[r, "v"] & G \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[u, "h"] & & Y \arrow[ll, "w"] \end{tikzcd}$$

avec $u \in \Gamma_{r,s}(E,F)$
$v \in \prod_s(F,G)$
${}^t w \in \prod_r(X',Y')$

X, Y de dimension finie. On a évidemment $w\,g\,v \in \prod_{s,r}(F,X)$ soit par adjonction

$$\begin{aligned} \text{trace}\,(w\,g\,v\,u\,h) &\leq \gamma^*_{r,s}(w\,g\,v)\ \gamma_{r,s}(u)\ \|h\| \\ &\leq \pi_r({}^t w)\ \|g\|\ \pi_s(v)\ \|h\|\ \gamma_{r,s}(u) \\ &\leq \alpha({}^t(vu))\ \|g\|\ \|h\|\ \pi_r({}^t w) \end{aligned}$$

comme $\text{trace}\,(w\,g\,v\,u\,h) = \text{trace}\,({}^t(wgvuh))$ cela montre que ${}^t(vu) \in \prod^*_r(G',E'$
soit ${}^t(vu) \in \mathfrak{J}_{r'}(G',E')$ (cf.1.6) et de plus $i_{r'}({}^t(vu)) \leq \pi_s(v)\gamma_{r,s}(u)$.

② Réciproquement soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ vérifiant le propriété de l'énoncé. Par un argument de graphe fermé il est facile de voir qu'alors l'application $\tilde{u}$

$$\tilde{u} : \Pi_s(F,G) \longrightarrow \mathfrak{I}_{r'}(G'E') \; : \; v \longmapsto {}^t(vu)$$

est continue soit $i_{r'}({}^t(vu)) \leq \pi_s(v)\|\tilde{u}\|$.

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] & & F \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[u, "h"] & G \arrow[l, "\theta"] & Y \arrow[l, "v"] \end{tikzcd}$$

avec $v \in \Pi_s(Y,G)$ et ${}^t\theta \in \Pi_r(X',G')$ on a :

$$|\mathrm{trace}(\theta\, v\, g\, u\, h)| = |\mathrm{trace}({}^th\; {}^t(v\,gu)\, {}^t\theta)|$$

mais ${}^t(v\,g\,u) \in \mathfrak{I}_{r'}(G',E')$ et ${}^t\theta \in \Pi_r(X',G')$ donc

$$\begin{aligned} |\mathrm{trace}(\theta\, v\, g\, u\, h)| &\leq \|h\|\ \pi_r({}^t\theta)\ i_{r'}({}^t(v\,gu)) \\ &\leq \|h\|\ \pi_r({}^t\theta)\ \pi_s(v)\ \|\tilde{u}\|\ \|g\| \end{aligned}$$

QED ▼

On remarque que $\|\tilde{u}\|$ n'est rien d'autre que $\gamma_{r,s}(u)$!

Montrons quelques corollaires. D'abord un théorème démontré primitivement par Persson [5]

3.2 <u>Théorème</u> : Si $v \in \Pi_{s'}(L^s,E)$ alors ${}^tv \in \mathfrak{I}_{s'}(E',L^{s'})$.

▲ on applique 3.1 en prenant $u = id_{L^s}$ élément de $\Gamma_{s,s'}(L^s,L^s)$. ▼

Puis le théorème de Kwapien légèrement amélioré :

3.3 Théorème : Si les réels s, q, p, r vérifient $1 \leq s < p \leq q < r < +\infty$; tout opérateur continu T de L^r dans L^s appartient à $\Gamma_{qp'}$.

▲ D'après le théorème 3.1 il suffit de montrer que ${}^t u {}^t v \in \mathfrak{I}_{q'}(G', L^{r'})$ dès que $v \in \Pi_{p'}(L^s, G)$. Si $v \in \Pi_{p'}(L^s, G)$ puisque $p' < s'$ il appartient à fortiori à $\Pi_{s'}(L^s, G)$ par 3.2 on a donc ${}^t v \in \mathfrak{I}_{s'}(G', L^{s'})$ et donc ${}^t u {}^t v \in \mathfrak{I}_{s'}(G', L^{r'})$.

Mais si $q, s, p < r \leq 2$ on a $\Pi_s(L^{r'}, G') = \Pi_q(L^{r'}, G')$ (exposé V, corollaire 2 du théorème 2) par adjonction on a $\mathfrak{I}_{s'}(G', L^{r'}) = \mathfrak{I}_{q'}(G', L^{r'})$ ce qui démontre dans ce cas la proposition .

- le cas $2 \leq s, q < r$ se démontre en considérant ${}^t T$. Pour le cas restant c'est-à-dire $s < 2 < r$ il suffit de montrer que T se factorise par L^2 en effet de 2.3 on déduit par adjonction $\Gamma_{22} \subset \Gamma_{r,s}$ pour tout couple r,s. ♦

Si $v \in \Pi_2(L^s, G)$ v a fortiori appartient à $\Pi_{s'}(L^s, G)$ et donc ${}^t v \in \mathfrak{I}_{s'}(G' L^{s'})$ mais on a par conséquent ${}^t(uv) \in \mathfrak{I}_{s'}(G', L^{r'})$.

Comme $r' < 2$ et $s < 2$ on $\Pi_2(L^{r'}, G') = \Pi_s(L^{r'}, G')$ ce qui par adjonction implique ${}^t(uv) \in \mathfrak{I}_2(G' L^{r'})$ (cf [5]).

3.4 Corollaire (Kwapien [2]): E est isomorphe à un sous espace complémenté de L^p $(1 < p < +\infty)$ si et seulement si pour tout opérateur u de L^p dans G p'-sommant, ${}^t u$ est p'-intégral.

▲ D'après 3.1 l'identité de E appartient à $\Gamma_{p,p'}$ si et seulement si la condition de l'énoncé est satisfaite. Or dire que $Id_E \in \Gamma_{p,p'}(E,E)$ signifie que l'on a la factorisation :

$$E \xrightarrow{u} L^p \xrightarrow{v} E , \quad v \circ u = Id_E,$$

ce qui se traduit immédiatement par le fait que E est isomorphe à un sous-espace complémenté de L^p. ▼

♦ tel que $rs < \infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Dacunha-Castelle, J. L. Krivine : Application des ultraproduits à l'étude de certaines classes d'espaces de Banach. Studia Math. 41, 305-324 (1971).

[2] S. Kwapien : On operators factorizable through L^p spaces. Bull. Soc. Math. de France (31-32).

[3] A. Persson : On some properties of p-nuclear and p-integral operators, Studia Math 33 (1969).

[4] A. Pietsch : Adjungierte normierten Operatorenideale, Math. Nach. 48 (1971) 189-211.

[5] A. Pietsch : Séminaire Goulaouic-Schwartz 1970-71, exposé 29.