B. Maurey

Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans un espace $L^p(\Omega,\mu), 0 < p \leq +\infty$

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 15, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A14_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

THEOREMES DE FACTORISATION POUR LES OPERATEURS LINEAIRES A VALEURS DANS UN ESPACE $L^p(\Omega,\mu)$, $0 < p \leq +\infty$

par B. MAUREY

Exposé N° XV

28 Février 1973

Dans l'exposé XII, nous avons montré que tout opérateur linéaire continu u d'un espace quasi-normé E de type q dans un espace $L^o(\Omega,\mu)$ (μ étant une probabilité, et $0 < q \leq 2$) admet la factorisation :

$$E \xrightarrow{\ v\ } L^q(\Omega,\mu) \xrightarrow{\ T_g\ } L^o(\Omega,\mu)\,,$$

où v est un opérateur linéaire continu de E dans $L^q(\Omega,\mu)$, et où T_g est l'opérateur de multiplication par une fonction mesurable g.

Dans cet exposé, nous allons considérer des opérateurs de E dans $L^p(\Omega,\mu)$, $p > 0$, et nous étendrons le résultat précédent : si E est de type $q^\blacklozenge$, et u linéaire continu de E dans $L^p(\Omega,\mu)$ (μ quelconque, $0 < p \leq 2$), u admet la factorisation :

$$E \xrightarrow{\ v\ } L^q(\Omega,\mu) \xrightarrow{\ T_g\ } L^p(\Omega,\mu)\,,$$

où $g \in L^r(\Omega,\mu)$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

La méthode sera sensiblement identique à celle des exposés X, XI, XII. Nous donnerons tout d'abord une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire continu u de E dans $L^p(\Omega,\mu)$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$ et la multiplication par une fonction $g \in L^r(\Omega,\mu)$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Pour que cette condition semble un peu moins "parachutée", nous ferons quelques préliminaires :

Soient E un espace quasi-normé, (Ω,μ) un espace mesuré quelconque et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^p(\Omega,\mu)$. Si (X,ν) désigne un deuxième espace mesuré et φ une application ν-mesurable de X dans E, l'application mesurable $u \circ \varphi$ de X dans $L^p(\Omega,\mu)$, donc dans $L^o(\Omega,\mu)$, peut-être aussi considérée comme élément de $L^o(X \times \Omega, \nu \otimes \mu)$, ou comme élément de $L^o(\Omega,\mu, L^o(X,\nu))$.

Soit q un nombre réel tel que $p \leq q \leq +\infty$. Nous dirons que u est un opérateur de (p,q)-interversion s'il existe une constante C telle que pour tout espace mesuré (X,ν), et pour toute $\varphi \in L^q(X;\nu,E)$, l'application $u \circ \varphi$, considérée comme fonction de Ω dans $L^o(X,\nu)$, appartient en fait à $L^p(\Omega,\mu)$, $L^q(X,\nu))$ (alors qu'en général elle

---

$\blacklozenge$ $p \leq q$.

appartient seulement à $L^q(X,\nu, L^p(\Omega,\mu))$: il y a donc bien interversion des variables), avec :

$$\|u \circ \varphi\|_{L^p(\Omega,L^q(X))} \leq C \|\varphi\|_{L^q(X)}$$

Nous désignerons par $C_{p,q}(u)$ la plus petite constante C telle que la propriété ci-dessus soit réalisée.

Par exemple, lorsque p = q, on a $L^p(\Omega,L^p(X)) = L^p(X,L^p(\Omega))$ d'après le théorème de Fubini, et simplement $C_{p,p}(u) = \|u\|$.

Considérons un autre exemple. Supposons que l'opérateur linéaire u de E dans $L^p(\Omega,\mu)$ admette la factorisation :

$$E \xrightarrow{v} L^q(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega,\mu),$$

avec $p \leq q \leq \infty$, $\|v\| \leq 1$, $\|g\|_{L^r} \leq 1$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

Soient alors (X,ν) un espace mesuré et $\varphi \in L^q(X,\nu)$. L'application $v \circ \varphi$, comme fonction de Ω dans $L^o(X,\nu)$, vérifie :

$$\|v \circ \varphi\|_{L^q(\Omega,L^q(X))} \leq C_{q,q}(v) \|\varphi\|_{L^q(X)} = \|v\| \|\varphi\|_{L^q(X)} \leq \|\varphi\|_{L^q(X)}$$

Maintenant $u \circ \varphi$, comme application de Ω dans $L^o(X,\nu)$, est simplement le produit de $v \circ \varphi$ par la fonction g. On a donc par l'inégalité de Hölder :

$$\|u \circ \varphi\|_{L^p(\Omega,L^q(X))} = \|g.(v \circ \varphi)\|_{L^p(\Omega,L^q(X))} \leq \|g\|_{L^r(\Omega)} \|v \circ \varphi\|_{L^q(\Omega,L^q(X))} \leq \|\varphi\|_{L^q(X)},$$

d'où finalement $C_{p,q}(u) \leq 1$.

Ce que nous allons montrer dans la suite, c'est que réciproquement, un opérateur de (p,q)- interversion de E dans $L^p(\Omega,\mu)$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$ et la multiplication par une fonction $g \in L^r(\Omega,\mu)$.

Avant de voir cela, nous traduirons la propriété de (p,q)-interversion lorsque $(X,\nu) = (\mathbb{N},\delta)$, avec $\delta = \Sigma\, \delta_n$. Une application φ de $\mathbb{N}$ dans E est alors par définition une suite (x_n) d'éléments de E, et $u\circ\varphi$, comme application de Ω dans $L^0(\mathbb{N},\delta)$ est simplement donnée par :

$$\omega \longrightarrow (u(x_n)(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$$

La propriété de (p,q)-interversion se traduit par :

$$\left(\int(\Sigma|u(x_n)(\omega)|^q)^{p/q}d\mu(\omega)\right)^{1/p} \le C_{p,q}(u).(\Sigma\|x_n\|^q)^{1/q},$$

pour toute suite (x_n) dans E.

Le théorème suivant généralise un résultat de H. P. Rosenthal ([3], Théorème 1).

<u>Théorème 1</u> : Soient p, q, r trois nombres réels tels que $0 < p \le q \le +\infty$ $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, E un espace quasi-normé, (Ω,μ) un espace mesuré quelconque et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^p(\Omega,\mu)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour toute suite (x_n) dans E :

$$\left(\int(\Sigma|u(x_n)|^q)^{p/q}d\mu\right)^{1/p} \le (\Sigma\|x_n\|^q)^{1/q}$$

b) L'opérateur u admet la factorisation :

$$E \xrightarrow{v} L^q(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega,\mu),$$

avec $\|v\| \le 1$, et $\|g\|_{L^r} \le 1$.

<u>Démonstration</u> : L'implication b) $\Rightarrow$ a) a été vue dans les préliminaires. Démontrons a) $\Rightarrow$ b). Le cas $p = q$ est trivial. Considérons ensuite le cas $q = +\infty$. Si (x_n) est une suite d'éléments de E telle que $\sup_n \|x_n\| \le 1$, la condition a) s'écrit :

$$\|\sup_n |u(x_n)|\|_{L^p} \le 1$$

La famille des $\sup_n |u(x_n)|$ constitue quand la suite (x_n) varie (avec $\sup_n \|x_n\| \leq 1$) un ensemble filtrant croissant dans $L^p(\Omega,\mu)$. Il est alors classique qu'un ensemble filtrant et majoré en norme admet une borne supérieure g dans $L^p(\Omega,\mu)$, qui vérifie encore $\|g\| \leq 1$. On peut définir un opérateur v de norme ≤ 1 de E dans $L^\infty(\Omega,\mu)$ par :

$$v(x) = \frac{u(x)}{g} \qquad \text{(convention } \frac{0}{0} = 0\text{)},$$

et l'on a bien $u = T_g \circ v$.

Supposons maintenant $0 < p < q < \infty$, et posons $s = q/p$, d'où $1 < s < \infty$ et $s' = r/p$. Désignons par K l'ensemble des fonctions h mesurables ≥ 0 sur Ω telles que $\int h^{s'} d\mu \leq 1$. L'ensemble K est convexe et compact pour la topologie $\sigma(L^{s'},L^s)$. Pour chaque suite finie $x = (x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments de E posons $\mu_x = (\Sigma|u(x_i)|^q).\mu$, et considérons la fonction F_x définie sur K par :

$$F_x(h) = \Sigma\|x_i\|^q - \int h^{-s} d\mu_x$$

Il est clair que l'ensemble des F_x est un cône convexe de fonctions sur K, qui ne prennent pas la valeur $+\infty$. D'autre part chaque F_x est concave sur K (car $t \to t^{-s}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$) et scs (voir le lemme ci-dessous).

Posons de plus :

$$h_x = C(\Sigma|u(x_i)|^q)^{1/ss'}, \quad \text{avec } C = \left(\int(\Sigma|u(x_i)|^q)^{p/q} d\mu\right)^{-1/s'}$$

On vérifie que $\int h_x^{s'} d\mu = 1$, c'est à dire $h_x \in K$, et :

$$F_x(h_x) = \Sigma \|x_i\|^q - C^{-s} \int(\Sigma|u(x_i)|^q)^{-1/s'} d\mu_x$$

$$= \Sigma \|x_i\|^q - C^{-s} \int(\Sigma|u(x_i)|^q)^{1/s} d\mu$$

$$= \Sigma \|x_i\|^q - \left(\int(\Sigma|u(x_i)|^q)^{p/q} d\mu\right)^{q/p} \geq 0 \text{ d'après a).}$$

D'après le lemme 1, exposés X, XI, il existe $h_o \in K$ telle que $F_x(h_o) \geq 0$ pour toute suite finie x, et en particulier en posant $g = h_o^{1/p}$:

$$\forall x \in E \quad \left(\int h_o^{-s}\, d\mu_x\right)^{1/q} = \left(\int g^{-q}\, d\mu_x\right)^{1/q} \leq \|x\|$$

Si l'on fait la convention $\frac{0}{0} = 0$, on peut encore écrire :

$$\forall x \in E \quad \left(\int \left|\frac{u(x)}{g}\right|^q d\mu\right)^{1/q} \leq \|x\|$$

Il suffit maintenant de définir l'opérateur v par $v(x) = \frac{u(x)}{g}$, et on a bien $u = T_g \circ v$, $\|v\| \leq 1$, $\|g\|_{L^r} \leq 1$.

Dans la démonstration nous avons utilisé le :

<u>Lemme</u> : $h \to \int h^{-s} d\mu_x$ est s c i sur K.

<u>Démonstration</u> : La fonction considérée étant convexe, il revient au même qu'elle soit sci pour la topologie de la norme ou pour la topologie $\sigma(L^{s'}, L^s)$. Raisonnons donc pour la topologie de la norme. On peut trouver une suite (h_n) qui tend vers h dans $L^{s'}$, et telle que :

$$\liminf_{h' \to h} \int h'^{-s} d\mu_x = \lim_n \int h_n^{-s} d\mu_x$$

Il existe une sous-suite h_{n_i} qui converge μ-presque partout vers h, donc aussi μ_x-presque partout donc $h_{n_i}^{-s}$ converge μ_x-presque partout vers h^{-s}. D'après le lemme de Fatou :

$$\int h^{-s} d\mu_x \leq \lim_n \int h_n^{-s} d\mu_x = \liminf_{h' \to h} \int h'^{-s} d\mu_x,$$

ce qui démontre le lemme.

<u>Remarque 1</u> : D'après le théorème 1, il suffit pour obtenir $C_{p,q}(u)$ (u étant un opérateur linéaire continu de E dans $L^p(\Omega, \mu)$) de considérer les applications φ de $(\mathbb{N}, \delta)$ dans E. Autrement dit $C_{p,q}(u)$ est la plus petite constante C telle que l'on ait pour toute suite (x_n) de E :

$$\left(\int (\Sigma |u(x_n)|^q)^{p/q} d\mu\right)^{1/p} \leq C (\Sigma \|x_n\|^q)^{1/q}$$

Nous allons donner un premier exemple d'application du théorème 1. Le résultat suivant précise un théorème de Nikishin ([2], théorème 4).

<u>Corollaire</u> : Soient (X,ν) et (Ω,μ) deux espaces mesurés, et u un opérateur linéaire continu <u>positif</u> de $L^q(X,\nu)$ dans $L^p(\Omega,\mu)$, $0 < p \le q \le \infty$, $q \ge 1$. L'opérateur u admet la factorisation :

$$L^q(X,\nu) \xrightarrow{\ v\ } L^q(\Omega,\mu) \xrightarrow{\ T_g\ } L^p(\Omega,\mu) \ ,$$

avec $\|v\| \le \|u\|$, et $\|g\|_{L^r} \le 1 \quad (\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r})$.

<u>Démonstration</u> : D'après le théorème 1, il suffit de montrer que $C_{p,q}(u) \le \|u\|$. Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une suite finie d'éléments de $L^q(X,\nu)$. On a dans les espaces réticulés $L^p(\Omega,\mu)$ et $L^q(X,\nu)$:

$$(\Sigma|u(x_i)|^q)^{1/q} = \sup\{\Sigma\ \alpha_i\ u(x_i) \mid \Sigma|\alpha_i|^{q'} \le 1\}$$

$$\le u(\sup\{\Sigma\ \alpha_i x_i \mid \Sigma\ |\alpha_i|^{q'} \le 1\}) = u((\Sigma|x_i|^q)^{1/q})$$

(L'inégalité ci-dessus résulte de la positivité de u). On a donc :

$$(\int(\Sigma|u(x_i)|^q)^{p/q}d\mu)^{1/p} \le \|u\|\ \|(\Sigma|x_i|^q)^{1/q}\|_{L^q(X,\nu)} = \|u\|\ (\Sigma\|x_i\|^q)^{1/q},$$

d'où le résultat.

<u>Remarque 2</u> : La restriction $q \ge 1$ est nécessaire dans le corollaire. En effet si p et q sont tels que $0 < p < q < 1$, on peut construire (à partir de Feller [1] p.424) un opérateur <u>positif</u> de l^q dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, qui ne se factorise pas par $L^q(\Omega,\mu)$.

Nous allons maintenant étudier les opérateurs linéaires de E dans $L^p(\Omega,\mu)$, lorsque E est un espace de type q (exposés X, XI § 2), $0 < p \le q \le 2$.

<u>Théorème 2</u> : Soient p et q deux nombres réels tels que $0 < p \le q \le 2$, et E un espace quasi-normé de type q. Tout opérateur linéaire continu de

E dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$, et la multiplication par une fonction de $L^r(\Omega,\mu)$ $(\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r})$.

<u>Démonstration</u> : Le cas $p = q$ est trivial. Supposons $0 < p < q$. Soit $(f_1,\dots,f_n)$ une suite stable d'ordre q, et $(x_1,\dots,x_n)$ une suite d'éléments de E. D'après l'exposé VI, corollaire du théorème 3, il existe des constantes $\alpha \in \,]0,1[$ et B, dépendant uniquement de p, q et E, telles que :

$$\left(\int \|\Sigma\, x_i\, f_i(t)\|^p dP(t)\right)^{1/p} \leq B\, J_\alpha(\|\Sigma\, x_i f_i(t)\|, dP(t))$$

Soit u un opérateur linéaire continu de E dans $L^p(\Omega,\mu)$. Nous aurons d'après le lemme 2 de X, XI :

$$\left(\int (\Sigma |u(x_i)(\omega)|^q)^{p/q} d\mu(\omega)\right)^{1/p} = A_{p,q}^{-1}\left(\int |\Sigma\, u(x_i)(\omega)\, f_i(t)|^p d\mu(\omega)\, dP(t)\right)^{1/p}$$

$$= A_{p,q}^{-1}\left(\int \|\Sigma\, u(x_i) f_i(t)\|^p dP(t)\right)^{1/p} \leq A_{p,q}^{-1}\|u\| \left(\int \|\Sigma\, x_i f_i(t)\|^p dP(t)\right)^{1/p}$$

$$\leq BA_{p,q}^{-1}\, \|u\| J_\alpha(\|\Sigma x_i f_i(t)\|, dP(t)) \leq B\, A_{p,q}^{-1}\, \|u\| K_{\alpha,q}(E)\, (\Sigma \|x_i\|^q)^{1/q} ,$$

ce qui prouve que $C_{p,q}(u) \leq B\, A_{p,q}^{-1}\, K_{\alpha,q}(E)\, \|u\|$, d'où le résultat par le théorème 1.

Nous avons donné dans les exposés X, XI des exemples d'espaces de type q (corollaires 1 et 2 de la proposition 2, proposition 3). On en déduit immédiatement.

<u>Corollaire</u> : Soient p, q, r, s quatre nombres réels tels que $0 < p \leq q \leq s$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, et (X,ν), (Ω,μ) deux espaces mesurés quelconques.

a) Tout opérateur linéaire continu u de $L^s(X,\nu)$♦ dans $L^p(\Omega,\mu)$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$ et la multiplication par une fonction de $L^r(\Omega,\mu)$ dans

---

♦ Ou plus généralement d'un sous-espace d'un quotient de $L^s(X,\nu)$, puisque la propriété de type q passe aux sous-espaces et aux quotients.

les cas suivants :

$$0 < p \leq q < s \leq 2 \; ; \quad 0 < p \leq q \leq 2 \leq s < \infty .$$

b) Supposons $0 < p \leq q < s \leq 1$. Tout opérateur linéaire continu u d'un espace s-normé E dans $L^p(\Omega,\mu)$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$ et la multiplication par une fonction de $L^r(\Omega,\mu)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Feller : An introduction to Probability Theory and its Applications, vol. II.

[2] E. M. Nikishin : Resonance theorems and super linear operators Transl. of cont. of Uspekhi Mat. Nauk., Vol. XXV, n°6, Nov-Déc. 1970.

[3] H. P. Rosenthal : On subspaces of L^p (à paraître).