Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Maurey

Théorèmes de Nikishin : théorèmes de factorisation pour les applications linéaires à valeurs dans un espace $L^o(\Omega, \mu)$ (suite et fin)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 12, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A11_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

THEOREMES DE NIKISHIN : THEOREMES DE FACTORISATION POUR LES APPLICATIONS LINEAIRES A VALEURS DANS UN ESPACE $L^0(\Omega,\mu)$

(suite et fin)

par B. MAUREY

Exposé N^{o}XII

31 Janvier 1973

Nous allons terminer le paragraphe 3, commencé dans l'exposé précédent. Tout d'abord nous exploiterons les résultats du paragraphe 2 en termes de parties de type (p,V).

Posons pour alléger l'écriture, si $\alpha \in]0,1[$ et si p et s sont deux réels tels que $0 < p < s \leq 2$:

$$C(\alpha,p,s) = \inf_{0<r<p} \alpha^{-1/r} A_{p,s}^{-1} A_{r,s} A_{r,p}^{-1}$$

<u>Proposition 5</u> : Soient (Ω,μ) un espace de probabilité, et A une partie s-convexe équilibrée de $L^0(\Omega,\mu)$, $0 < s \leq 1$ ♦. Supposons $J_\beta(A)$ fini pour un $\beta \in]0,1[$. Pour tout $p < s$, A est de type (p,V_β), et l'on a pour tout $\alpha \in]0,1[$,

$$K_{\alpha,p}(V_\beta,A) \leq C(\alpha,p,s).\ J_\beta(A)$$

<u>Démonstration</u> : Soient $(x_1,\dots,x_n)$ une suite d'éléments de A, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ une suite de réels et $(f_1,\dots,f_n)$ une suite stable d'ordre p $(p < s)$ sur un espace de probabilité (X,P).

Considérons l'opérateur linéaire u de l^s dans $L^0(\Omega,\mu)$ défini par :

$$(c_i) \in l^s \longrightarrow \sum_{i=1}^n c_i\ x_i$$

Puisque A est s-convexe équilibrée on a :

$$\|(c_i)\|_{l^s} \leq 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n c_i x_i \in A \Rightarrow J_\beta(\sum_{i=1}^n c_i x_i) \leq J_\beta(A),$$

d'où par homogénéité : $\forall\ x \in l^s$, $j_{V_\beta}(u(x)) \leq J_\beta(A)\ \|x\|_{l^s}$.

Désignons par (e_i) la base canonique de l^s. Nous aurons :

♦ c'est-à-dire : $x,y \in A$, $|\lambda|^s + |\mu|^s \leq 1 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in A$

$$J_\alpha(j_{V_\beta}(\Sigma\lambda_i x_i f_i(t)),\ dP(t)) = J_\alpha(j_{V_\beta}(u(\Sigma\lambda_i e_i f_i(t))),\ dP(t))$$

$$\leq J_\beta(A) J_\alpha(\|\Sigma\lambda_i e_i f_i(t)\|, dP(t)) \leq J_\beta(A) K_{\alpha,p}(l^s)(\Sigma|\lambda_i|^p)^{1/p}$$

$$\leq \alpha^{-1/r} A_{p,s}^{-1} A_{r,s} A_{r,p}^{-1} J_\beta(A) \text{ d'après le corollaire 2,}$$

et le résultat est démontré (en prenant l'inf sur r, ce qui fait apparaître $C(\alpha,p,s)$.)

Le premier théorème de Nikishin résulte immédiatement de la conjonction des propositions 4 et 5 :

<u>Théorème 2</u> : Soient (Ω,μ) un espace de probabilité, A une partie s-convexe♦ de $L^0(\Omega,\mu)$, et p un nombre réel tel que $0 < p < s$. On suppose que $J_\alpha(A)$ est fini pour un $\alpha \in]0,1/8[$. Il existe une partie mesurable Ω_α de Ω, telle que $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq 8\alpha$, et que :

$$\forall f \in A, \quad \left(\int_{\Omega_\alpha} |f|^p d\mu\right)^{1/p} \leq 2^{1/p} A_p^{1/2} C(\alpha,p,s) J_\alpha(A)$$

Si E est un espace quasi-normé et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^0(\Omega,\mu)$, nous poserons pour tout $\alpha \in]0,1[$:

$$J_\alpha(u) = J_\alpha(u(B)),$$

B étant la quasi-boule unité de E. On a alors :

$$\forall x \in E, \quad J_\alpha(u(x)) \leq J_\alpha(u).\|x\|$$

<u>Proposition 6</u> : Soient (Ω,μ) un espace de probabilité, p un nombre réel tel que $0 < p \leq 2$, E un espace quasi-normé de type p et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^0(\Omega,\mu)$.

Pour tout $\alpha \in]0,1/8[$, il existe une partie mesurable Ω_α de Ω telle que $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq 8\alpha$, et que :

$$\forall x \in E \qquad \left(\int_{\Omega_\alpha} |u(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \leq 2^{1/p} A_p^{1/2} K_{\alpha,p}(E) J_\alpha(u)\ \|x\|$$

♦ équilibrée

Démonstration : D'après la proposition 4, il suffit de montrer que $K_{\alpha,p}(V_\alpha, u(B)) \leq J_\alpha(u) K_{\alpha,p}(E)$.

(B désignant la quasi-boule unité de E). Soient alors $(x_1,\dots,x_n)$ une suite d'éléments de B, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ une suite de réels et $(f_1,\dots,f_n)$ une suite stable d'ordre p sur un espace de probabilité (X,P). Nous aurons :

$$J_\alpha(j_{V_\alpha}(\Sigma\lambda_i u(x_i) f_i(t)), dP(t)) \leq J_\alpha(u) J_\alpha(\|\Sigma \lambda_i x_i f_i(t)\|, dP(t))$$

$$\leq J_\alpha(u) K_{\alpha,p}(E) (\Sigma |\lambda_i|^p)^{1/p}$$, d'où le résultat.

Soit (X,ν) un espace mesuré quelconque. Nous avons vu que l'espace $L^q(X,\nu)$ est de type p lorsque $0 < p < q \leq 2$ (corollaire 1 de la proposition 2) et de type 2 lorsque $2 \leq q < \infty$ (proposition 3). On obtient donc comme corollaire de la proposition 6 le second théorème de Nikishin :

Théorème 3 : Soient (X,ν) un espace mesuré quelconque, (Ω,μ) un espace de probabilité, et u un opérateur linéaire continu de $L^q(X,\nu)$ dans $L^0(\Omega,\mu)$.
a) Supposons $0 < q \leqslant 2$. Pour tout $p < q$ et tout $\alpha \in]0,1/8[$, il existe une partie mesurable Ω_α de Ω, telle que $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq 8\alpha$, et que :

$$\forall\, x \in L^q(X,\nu), \qquad \left(\int_{\Omega_\alpha} |u(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \leq 2^{1/p} A_p^{1/2} C(\alpha,p,q) J_\alpha(u) \|x\|$$

b) Supposons $2 \leq q < \infty$. Pour tout $x \in]0,1/8[$, il existe une partie mesurable Ω_α de Ω, telle que $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq 8\alpha$, et que :

$$\forall\, x \in L^q(X,\nu) \qquad \left(\int_{\Omega_\alpha} |u(x)|^2 d\mu\right)^{1/2} \leq \sqrt{2}\, A_2^{1/2} \alpha^{-1/q} A_{q,2}^{-1} J_\alpha(u) \|x\|$$

Remarque : Le point b) est une légère amélioration de Nikishin, qui donnait $\int_{\Omega_\alpha} |u(x)|^{2-\varepsilon} d\mu$ au lieu de $\int_{\Omega_\alpha} |u(x)|^2 d\mu$.

Le point b) reste vrai lorsque $q = +\infty$, mais la démonstration est plus difficile et sera vue plus tard. La méthode de ce chapitre ne donne pas le résultat, car l'espace $L^\infty(X,\nu)$ n'est pas de type 2.

§ 4. CONSEQUENCES DES THEOREMES DE NIKISHIN

Les conséquences des théorèmes de Nikishin dans la théorie des opérateurs radonifiants ont été développées par S. Chevet [1]. Nous allons les présenter sous une forme très légèrement différente.

Nous sortirons un tout petit peu du cadre des probabilités cylindriques : nous appellerons mesure cylindrique positive bornée λ un système projectif de mesures positives bornées sur les quotients E/N. Nous appellerons masse de λ, notée $\|\lambda\|$, la masse (qui est la même pour toutes) des mesures qui forment le système projectif. Par la suite, nous dirons simplement mesure cylindrique en omettant "positive bornée".

Une mesure cylindrique λ sur un elcs E peut être représentée par une fonction aléatoire linéaire de E' dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$, où μ est une mesure de masse $\|\lambda\|$.

Soient E un elcs et (λ_n) une suite de mesures cylindriques sur E telle que $\Sigma\|\lambda_n\|$ soit fini. Pour chaque sous-espace fermé de codimension finie N de E, on peut considérer sur E/N la mesure de Radon $\mu_N = \sum\limits_n \pi_N(\lambda_n)$. Il est aisé de vérifier que les (μ_N) forment un système projectif. On définit ainsi une mesure cylindrique μ que nous noterons $\Sigma\lambda_n$.

Soit E un elcs. Munissons E' de la topologie forte de dual de E. Nous dirons qu'une mesure cylindrique λ sur E est de type p $(0 \leq p \leq +\infty)$ si elle peut être représentée par une fonction aléatoire linéaire continue de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$.

Nous obtenons comme conséquence du théorème 2 le résultat suivant :

Théorème 4 : Soient E un elcs, λ une probabilité cylindrique de type zéro sur E, et p un nombre réel tel que $0 < p < 1$. On peut trouver une suite (λ_n) de mesures cylindriques sur E, telle que $\lambda = \Sigma\lambda_n$, et que chaque λ_n soit de type p.

Démonstration : Puisque λ est de type zéro, on peut la représenter par une fonction aléatoire continue u de E' dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$ (μ étant une probabilité). Puisque u est continue, on peut trouver pour tout entier n un voisinage W_n de zéro dans E', que l'on peut supposer convexe et équilibré, tel que :

$$u(W_n) \subset V_{1/n} = \{f \in L^0 \mid J_{1/n}(f,\mu) \leq 1\}$$

D'après le théorème 2, il existe pour chaque n une partie mesurable Ω_n de Ω, telle que $\mu(\Omega - \Omega_n) \leq 8/n$ et telle que :

(1) $$\forall\, x \in W_n \qquad \left(\int_{\Omega_n} |u(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \leq 2^{1/p} A_p^{1/2}\, C(1/n,p,1)$$

Posons $A_n = \Omega_n - (\bigcup_{j<n} \Omega_j)$. Les ensembles (A_n) sont deux à deux disjoints, et $\bigcup_{j\leq n} A_j = \bigcup_{j\leq n} \Omega_j$. Par conséquent $\mu(\Omega - \bigcup_n A_n) = 0$.

Désignons par μ_n la restriction de μ à l'ensemble A_n. Nous aurons $\mu = \Sigma\mu_n$. Désignons par u_n l'opérateur linéaire u considéré comme opérateur de E' dans $L^0(\Omega,\mu_n)$. D'après la relation (1) ci-dessus (vraie a fortiori pour A_n), l'opérateur u_n est continu de E' dans $L^p(\Omega,\mu_n)$. Il définit donc une mesure cylindrique λ_n de type p sur E, de masse $\|\lambda_n\| = \|\mu_n\| = \mu(A_n)$.

Il nous reste à montrer que $\lambda = \Sigma\lambda_n$. Pour cela il suffit de prouver que si $\xi \in E'$, on a :

$$\xi(\lambda) = \Sigma\, \xi(\lambda_n).$$

La mesure $\xi(\lambda)$ est l'image de μ par u(x). Mais puisque $\mu = \Sigma\mu_n$, on a :

$$\xi(\lambda) = u(\xi)(\mu) = \Sigma\, u(\xi)(\mu_n) = \Sigma\, \xi(\lambda_n),$$

ce qui achève la démonstration.

Soient E et F deux elcs, u un opérateur linéaire continu de E dans F, p un nombre réel ≥ 0. Nous dirons que u est (p,0)-radonifiant de E dans F si toute probabilité cylindrique λ de type p sur E a une image

$u(\lambda)$ de Radon sur F. (Bien évidemment, le même résultat sera vrai pour une <u>mesure</u> cylindrique). Nous allons démontrer la "conjecture de Pietsch dans les elcs".

<u>Corollaire 1</u> : Soient E et F deux elcs, u un opérateur linéaire continu et p un nombre réel tel que $0 < p < 1$. Si u est $(p,0)$-radonifiant, il est aussi 0-radonifiant de E dans F.

<u>Démonstration</u> : Soit λ une probabilité cylindrique de type zéro sur E. D'après le théorème 4, on peut écrire $\lambda = \Sigma \lambda_n$, où chaque λ_n est de type p. Par hypothèse $u(\lambda_n)$ est de Radon sur F pour chaque n, donc aussi $u(\lambda) = \Sigma u(\lambda_n)$.

<u>Corollaire 2</u> . (<u>Théorème de Minlos</u>) : Soit E un elcs conucléaire et quasi-complet. Toute probabilité cylindrique de type zéro sur E est de Radon sur E. (Autrement dit, l'identité de E est 0-radonifiante).

<u>Démonstration</u> : D'après [2], proposition (XIV,2;2), l'identité de E est $(p,0)$-radonifiante pour tout $p > 0$. On applique donc le corollaire 1.

§ 5. LE POINT DE VUE DES THEOREMES DE FACTORISATION

Nous allons voir que les théorèmes de Nikishin peuvent également être exprimés comme théorèmes de factorisation :

<u>Proposition 7</u> : Soient (Ω,μ) un espace de probabilité, E un espace quasi-normé et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^0(\Omega,\mu)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe une partie mesurable $\Omega_\alpha \subset \Omega$, telle que $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq \alpha$, et une constante K_α telles que :

$$\forall\, x \in E \qquad \left(\int_{\Omega_\alpha} |u(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \leq K_\alpha \;\|x\|$$

b) L'opérateur u admet la factorisation :

$$E \xrightarrow{v} L^p(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L^o(\Omega,\mu)$$

où v est linéaire continu de E dans $L^p(\Omega,\mu)$, et où T_g est l'opérateur de multiplication par une fonction mesurable g.

<u>Démonstration</u> : Comme dans la démonstration du théorème 4, on peut trouver une suite de parties (A_n) deux à deux disjointes, et une suite de nombres C_n tels que :

$$\mu(\Omega - \bigcup_n A_n) = 0$$

$$\forall n, \qquad \|x\| \leq 1 \Rightarrow \left(\int_{A_n} |u(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \leq C_n$$

Considérons la fonction mesurable g définie par :

$$g = \Sigma\, 2^n C_n \, \chi_{A_n}.$$

Soit $x \in E$, tel que $\|x\| \leq 1$. Nous aurons :

$$\int_\Omega \left|\frac{u(x)}{g}\right|^p d\mu = \sum_n \frac{1}{2^{np} C_n^p} \int_{A_n} |u(x)|^p d\mu \leq \sum_n 2^{-np}$$

On peut donc poser $v(x) = \frac{u(x)}{g}$. L'opérateur v sera continu de E dans $L^p(\Omega,\mu)$, et on aura bien :

$$u = T_g \circ v$$

Montrons que b) ⇒ a). Soit $\alpha > 0$ donné. On peut trouver un entier n tel qu'en posant $\Omega_n = \{|g| \leq n\}$, on ait : $\mu(\Omega - \Omega_n) \leq \alpha$. On aura alors :

$$\left(\int_{\Omega_n} |u(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega_n} \left|n \frac{u(x)}{g}\right|^p d\mu\right)^{1/p} \leq n\left(\int_\Omega |v(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \leq n \|v\| \, \|x\|,$$

ce qui achève la démonstration.

Nous allons donner une conséquence de la proposition 7 pour les espaces de Banach plongeables dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$. (Nous dirons qu'un espace E est plongeable dans $L^0(\Omega,\mu)$, s'il existe un opérateur linéaire u de E dans $L^0(\Omega,\mu)$ tel que u soit un isomorphisme topologique de E sur $u(E)$. Par exemple, les espaces L^p, $0 < p \leq 2$, sont plongeables dans des espaces $L^0(\Omega,\mu)$ (exposé V).)

<u>Proposition 8</u> : Si un espace de Banach E est plongeable dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$, il est également plongeable pour tout $p < 1$ dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : Soit u un plongement de E dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$. L'image $u(B)$ de la boule unité B de E est une partie convexe équilibrée et <u>bornée</u> dans $L^0(\Omega,\mu)$, donc $J_\alpha(u(B))$ est fini pour tout $\alpha \in]0,1[$. D'après le théorème 2 et la proposition 7, l'opérateur u admet pour tout $p < 1$ la factorisation :

$$E \xrightarrow{v} L^p(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L^0(\Omega,\mu)$$

Il nous suffit de montrer que v est un plongement de E dans $L^p(\Omega,\mu)$. Soit donc (x_n) une suite de vecteurs de E telle que $v(x_n)$ tende vers zéro dans $L^p(\Omega,\mu)$. Alors $gv(x_n) = u(x_n)$ tend vers zéro dans $L^0(\Omega,\mu)$ donc (x_n) tend vers zéro dans E, puisque u est un plongement de E dans $L^0(\Omega,\mu)$.

<u>Remarque</u> : Le résultat précédent est à rapprocher du problème suivant : si un espace de Banach E est plongeable dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$, est-il plongeable dans un espace L^1 ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Chevet : Une propriété caractéristique des processus linéaires continus, Deux journées p-radonifiantes, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971-1972.

[2] Séminaire L. Schwartz 1969-1970.
