SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

Théorèmes de Nikishin : théorèmes de factorisation pour les applications linéaires à valeurs dans un espace $L^o(\Omega, \mu)$

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 10 et 11, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A10_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

THEOREMES DE NIKISHIN : THEOREMES DE FACTORISATION POUR LES APPLICATIONS LINEAIRES A VALEURS DANS UN ESPACE $L^0(\Omega,\mu)$

par B . MAUREY

Exposés N° X et XI

24 Janvier 1973

§ 1. UN PREMIER THEOREME DE NIKISHIN

Si (Ω,μ) est un espace de probabilité, et A une partie de $L^0(\Omega,\mu)$, nous poserons :

$$J_\alpha(A) = \sup \{J_\alpha(f,\mu) \mid f \in A\}$$

Théorème 1 : ([1], théorème 4) Soient (Ω,μ)un espace de probabilité, α un nombre réel que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, et A une partie convexe de $L^0(\Omega,\mu)$, formée de fonctions positives. Il existe une partie mesurable Ω_α de Ω, telle que $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq 2\alpha$, et que :

$$\forall\ f \in A \quad \int_{\Omega_\alpha} f d\mu \leq 2 J_\alpha(A)$$

La démonstration utilisera le lemme suivant :

Lemme 1 : Soient K un compact convexe d'un elcs E, et $\mathcal{H}$ un ensemble convexe de fonctions réelles scs sur K, ne prenant pas la valeur $+\infty$. On suppose que chaque fonction f de $\mathcal{H}$ est concave sur K, et admet un maximum ≥ 0 sur K. Il existe un point $x_0 \in K$ tel que :

$$\forall\ f \in \mathcal{H}, \quad f(x_0) \geq 0$$

Démonstration du lemme : D'après le lemme (4.5) de l'exposé II, il existe une probabilité de Radon ν sur K, telle que l'on ait :

$$\forall\ f \in \mathcal{H}, \int f d\nu \geq 0$$

Soit x_0 le barycentre de ν, c'est-à-dire :

$$\forall\ \xi \in E', \langle x_0,\xi\rangle = \int \langle x,\xi\rangle\, d\nu(x)$$

(A priori x_0 est un élément de E". Mais comme K est compact et convexe, on a bien $x_0 \in K$)

Soit $f \in \mathcal{K}$, et soit B l'ensemble des fonctions affines continues sur E plus grandes que f. Puisque f est concave scs et ne prend pas la valeur $+\infty$, on a :

$$f = \inf \{h \mid h \in B\}.$$

Par conséquent :

$$f(x_0) = \inf \{h(x_0) \mid h \in B\} = \inf \{\int h(x)\, d\nu(x) \mid h \in B\}$$

$$\geq \int \inf \{h \mid h \in B\}\, d\nu = \int f d\nu \geq 0,$$

ce qui démontre le lemme.

Démontrons maintenant le théorème. Désignons par K l'ensemble des fonctions mesurables φ sur Ω telles que :

a) $0 \leq \varphi \leq 1$

b) $\int \varphi\, d\mu \geq 1 - \alpha$

Il est clair que K est un convexe compact pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$. Posons $R = J_\alpha(A)$, et définissons pour chaque $f \in A$ une fonction F_f sur K de la façon suivante :

$$F_f(\varphi) = R - \int \varphi(\omega)\, f(\omega)\, d\mu(\omega)$$

(l'intégrale étant finie ~~ou non~~).

Chaque fonction F_f est concave scs sur K, ne prend pas la valeur $+\infty$, et l'ensemble des fonctions F_f est convexe.

De plus chaque fonction F_f a un maximum ≥ 0 sur K. En effet, si φ_f désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $\{f \leq R\}$, on a par définition de $R = J_\alpha(A)$:

$$\int \varphi_f\, d\mu = \mu\{f \leq R\} = 1 - \mu\{f > R\} \geq 1 - \alpha, \text{ donc } \varphi_f \in K, \text{ et :}$$

$$F_f(\varphi_f) = R - \int \varphi_f\, f\, d\mu \geq 0.$$

D'après le lemme 1, il existe une fonction $\varphi_o \in K$, telle que

$$\forall f \in A \quad \int \varphi_o(\omega)\, f(\omega)\, d\mu(\omega) \leq R$$

Posons $\Omega_\alpha = \{\varphi_o \geq \frac{1}{2}\}$. On aura :

$$1 - \alpha \leq \int_{\Omega_\alpha} \varphi_o\, d\mu + \int_{\Omega - \Omega_\alpha} \varphi_o\, d\mu \leq \mu(\Omega_\alpha) + \frac{1}{2}(1 - \mu(\Omega_\alpha)), \text{ donc :}$$

$$\mu(\Omega_\alpha) \geq 1 - 2\alpha, \text{ soit } \mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq 2\alpha, \text{ et :}$$

$\forall f \in A$, $\int_{\Omega_\alpha} f\, d\mu \leq 2 \int \varphi_o\, f\, d\mu \leq 2R$, ce qui achève la démonstration .

§ 2. ESPACES DE TYPE p, $0 < p \leq 2$.

Nous rappellerons maintenant une définition déjà utilisée dans l'exposé VII : nous appellerons suite stable d'ordre $p (0 < p \leq 2)$ toute suite $(f_1,\dots,f_n)$ de variables aléatoires indépendantes sur un espace de probabilité (X,P), suivant la loi γ_p (définie par $\mathfrak{F}\gamma_p(t) = \exp(-|t|^p)$, cf exposé V).

Nous rappellerons dans un lemme une propriété bien connue des suites stables d'ordre p :

<u>Lemme 2</u> : Soient r et p deux nombres réels tels que $0 < p \leq 2$, $0 < r < p^*$ [$p^* = p$ si $p < 2$, $2^* = +\infty$], et $(f_1,\dots,f_n)$ une suite stable d'ordre p sur un espace de probabilité (X,P). On a pour toute suite $(c_1,\dots,c_n)$ de nombres réels :

$$(\Sigma |c_i|^p)^{1/p} = \|\gamma_p\|_r^{-1} \left(\int |\Sigma\, c_i\, f_i(t)|^r\, dP(t)\right)^{1/r}$$

et pour tout réel $\beta \in]0,1[$:

$$(\Sigma |c_i|^p)^{1/p} = (J_\beta(\gamma_p))^{-1} \qquad J_\beta(\Sigma\, c_i\, f_i(t),\, dP(t)).$$

Démonstration : Dans les deux égalités à démontrer, les deux membres sont des fonctions positivement homogènes de la suite $(c_1,\ldots,c_n)$. Il suffit donc de démontrer le résultat lorsque $\Sigma\ |c_i|^p = 1$. D'autre part, les variables (f_i) étant indépendantes, la loi de $\Sigma\ c_i f_i$ admet pour transformée de Fourier :

$$\prod \exp(-\ |c_i t|^p) = \exp(-\ \Sigma |c_i t|^p) = \exp(-\ |t|^p),$$

c'est-à-dire que la loi de $\Sigma\, c_i\ f_i$ est exactement γ_p. Les égalités à démontrer sont alors évidentes.

Pour abréger, nous poserons dans la suite :

$$\|\gamma_p\|_r^{-1} = A_{r,p}\ ,\quad (J_\beta(\gamma_p))^{-1} = A_p^\beta .$$

Nous dirons qu'un espace quasi-normé E est de type p, $0 < p \leq 2$, si pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe une constante K_α telle que l'on ait pour toute suite $(x_1,\ldots,x_n)$ de vecteurs de E et pour toute suite $(f_1,\ldots,f_n)$ stable d'ordre p sur un espace de probabilité (X,P) :

$$J_\alpha(\|\Sigma x_i f_i(t)\|, dP(t)) \leq K_\alpha (\Sigma \|x_i\|^p)^{1/p}$$

Pour chaque $\alpha \in]0,1[$, nous désignerons par $K_{\alpha,p}(E)$ la plus petite constante K_α telle que la propriété ci-dessus soit réalisée.

Démontrons tout d'abord une propriété générale des espaces de type p :

Proposition 1 : a) Si E est un espace de type p, tout sous-espace F de E est de type p, et l'on a pour tout $\alpha \in]0,1[$:

$$K_{\alpha,p}(F) \leq K_{\alpha,p}(E)$$

b) Si E est un espace de type p, tout quotient F de E est de type p, et l'on a pour tout $\alpha \in]0,1[$:

$$K_{\alpha,p}(F) \leq K_{\alpha,p}(E)$$

Démonstration : Le premier point est évident. Démontrons le second. Soient E un espace de type p, F un quotient de E, $(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ une suite d'éléments de F, π la surjection canonique de E sur F et ε un nombre réel > 0. On peut trouver une suite $(x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments de E telle que :

$$\pi(x_i) = \bar{x}_i \quad , \quad \|x_i\| \leq (1+\varepsilon)\|\bar{x}_i\|$$

Si maintenant $(f_1,\ldots,f_n)$ est une suite stable d'ordre p, nous aurons :

$$J_\alpha(\|\Sigma\bar{x}_i f_i(t)\|,\ dP(t)) = J_\alpha(\|\pi(\Sigma x_i f_i(t))\|, dP(t))$$

$$\leq J_\alpha(\|\Sigma x_i f_i(t)\|, dP(t)) \leq K_{\alpha,p}(E)(\Sigma\|x_i\|^p)^{1/p} \leq (1+\varepsilon)K_{\alpha,p}(E)(\Sigma\|\bar{x}_i\|^p)^{1/p},$$

d'où le résultat puisque ε est arbitraire.

Nous allons maintenant donner quelques exemples d'espaces de type p.

Proposition 2 : Soient p et r deux nombres réels tels que $0 < r < p \leq 2$, (Ω,μ) un espace de probabilité et E un sous-espace de $L^p(\Omega,\mu)$, tel qu'il existe une constante C telle que :

$$\forall x \in E, \qquad \|x\| \leq C \left(\int |x(\omega)|^r d\mu(\omega)\right)^{1/r}$$

(**Autrement dit**, les topologies induites sur E par $L^p(\Omega,\mu)$ et $L^r(\Omega,\mu)$ coïncident).

L'espace E est alors de type p, et l'on a pour tout $\alpha \in]0,1[$:

$$K_{\alpha,p}(E) \leq C\ \alpha^{-1/r} A_{r,p}^{-1}$$

Démonstration : Soient $(x_1,\ldots,x_n)$ une suite de vecteurs de E, et $(f_1,\ldots,f_n)$ une suite stable d'ordre p. Nous aurons pour tout $\alpha \in]0,1[$:

$$J_\alpha(\|\Sigma x_i f_i(t)\|, dP(t)) \leq \alpha^{-1/r} \left(\int \|\Sigma x_i f_i(t)\|^r dP(t)\right)^{1/r}$$

$$\leq C\ \alpha^{-1/r}\left(\int \|\Sigma x_i f_i(t)\|_{L^r}^r\ dP(t)\right)^{1/r} = C\ \alpha^{-1/r}\left(\int |\Sigma x_i(\omega) f_i(t)|^r d\mu(\omega) dP(t)\right)^{1/r}$$

$$= C\,\alpha^{-1/r}\left(\int d\mu(\omega)\left(\int\left|\Sigma\, x_i(\omega) f_i(t)\right|^r dP(t)\right)\right)^{1/r}$$

D'après le lemme 2, cette quantité est encore égale à :

$$C\ \alpha^{-1/r} A_{r,p}^{-1}\left(\int(\Sigma|x_i(\omega)|^p)^{r/p} d\mu(\omega)\right)^{1/r} \leq C\ \alpha^{-1/r} A_{r,p}^{-1}\left(\int\ \Sigma|x_i(\omega)|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p}$$

$$= C\,\alpha^{-1/r} A_{r,p}^{-1}(\Sigma\|x_i\|^p)^{1/p},$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 1 : Nous démontrerons plus tard la réciproque de la proposition 2 : si E est un sous-espace de $L^p(\Omega,\mu)$ qui est de type p, sa topologie coïncide avec la topologie induite par $L^r(\Omega,\mu)$, pour tout $r < p$.

Corollaire 1 : Soient p et q deux nombres réels tels que $0 < p < q \leq 2$, et (Y,ν) un espace mesuré quelconque. L'espace $L^q(Y,\nu)$ est de type p, et l'on a pour tout $\alpha \in]0,1[$, et tout réel r tel que $0 < r < p$:

$$K_{\alpha,p}(L^q(Y,\nu)) \leq \alpha^{-1/r} A_{p,q}^{-1}\ A_{r,q}\ A_{r,p}^{-1}$$

Démonstration : D'après l'exposé V, la fonction $x \to \|x\|^q$ est de type négatif sur $L^q(Y,\nu)$. On en déduit (exposé V, remarque 2) l'existence d'un espace de probabilité (Ω,μ) et d'un opérateur linéaire u de $L^q(Y,\nu)$ dans $L^0(\Omega,\mu)$ tel que :

$$\forall r \in]0,q^*[,\ \forall x \in L^q(Y,\nu) \qquad \|x\| = A_{r,q}\ \left(\int|u(x)|^r d\mu\right)^{1/r}$$

(On remarquera qu'il s'agit de la généralisation du lemme 2)

Considérons l'opérateur $v = A_{p,q}^{-1}\ u$. C'est une isométrie de $L^q(Y,\nu)$ dans $L^p(\Omega,\mu)$. Désignons par E l'image de $L^q(Y,\nu)$ par v, et soit r un nombre réel tel que $0 < r < p$.

Soit y un élément de E. Il est de la forme $y = v(x)$, et on a :

$$\begin{aligned}\|y\| = \|x\| &= A_{p,q}^{-1}\ A_{r,q}\ \left(\int|u(x)|^r d\mu\right)^{1/r}\\ &= A_{p,q}^{-1}\ A_{r,q}\ \left(\int|y(\omega)|^r d\mu(\omega)\right)^{1/r}\end{aligned}$$

Autrement dit, l'espace E vérifie l'hypothèse de la proposition, avec $C = A_{p,q}^{-1} A_{r,q}$. D'autre part, E et $L^q(Y,\nu)$ étant <u>isométriques</u>, on aura pour tout $\alpha \in]0,1[$:

$$K_{\alpha,p}(E) = K_{\alpha,p}(L^q(Y,\nu)),$$

et on achève donc la démonstration en appliquant la proposition 2.

<u>Remarque 2</u> : Nous verrons ultérieurement que l'espace l^q n'est pas de type q. La restriction $p < q$ est donc nécessaire dans le corollaire 1.

<u>Corollaire 2</u> : a) Tout espace normé E est de type p pour tout $p \in]0,1[$, et l'on a pour $\alpha \in]0,1[$, $r \in]0,p[$:

$$K_{\alpha,p}(E) \le \alpha^{-1/r} A_{p,1}^{-1} A_{r,1} A_{r,p}^{-1}$$

b) Plus généralement tout espace s-normé E $(0 < s \le 1)$ est de type p pour tout $p \in]0,s[$, et l'on a pour $\alpha \in]0,s[$, $r \in]0,p[$:

$$K_{\alpha,p}(E) \le \alpha^{-1/r} A_{p,s}^{-1} A_{r,s} A_{r,p}^{-1}$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de démontrer le résultat lorsque E est complet (dans le cas général, E sera un sous-espace de son complété, et on utilisera la proposition 1 a).) On sait alors que tout espace s-normé complet E est un quotient d'un espace $l^s(I)$ pour un ensemble I convenable. On conclut donc d'après la proposition 1 b) et le corollaire 1.

Nous allons trouver plus facilement une classe d'espaces de type 2 :

<u>Proposition 3</u> : Soient (Y,ν) un espace mesuré quelconque, et q un nombre réel tel que $2 \le q < \infty$. L'espace $L^q(Y,\nu)$ est de type 2, et l'on a pour tout $\alpha \in]0,1[$:

$$K_{\alpha,2}(L^q(Y,\nu)) \le \alpha^{-1/q} A_{q,2}^{-1}$$

<u>Démonstration</u> : Soient $(x_1,\dots,x_n)$ une suite d'éléments de $L^q(Y,\nu)$, et $(f_1,\dots,f_n)$ une suite stable d'ordre 2.

$$J_\alpha(\|\Sigma x_i f_i(t)\|, dP(t)) \le \alpha^{-1/q} \left(\int \|\Sigma x_i f_i(t)\|^q dP(t)\right)^{1/q}$$

$$= \alpha^{-1/q}\left(\int |\Sigma x_i(u) f_i(t)|^q dP(t) d\nu(u)\right)^{1/q} = \alpha^{-1/q} A_{q,2}^{-1}\left(\int (\Sigma |x_i(u)|^2)^{q/2} d\nu(u)\right)^{1/q}$$

$$\le \alpha^{-1/q} A_{q,2}^{-1}\left(\Sigma\left(\int |x_i(u)|^q d\nu(u)\right)^{2/q}\right)^{1/2} = \alpha^{-1/q} A_{q,2}^{-1}(\Sigma \|x_i\|^2)^{1/2}$$

§ 3. THEOREMES DE NIKISHIN

Nous allons passer maintenant à la démonstration des théorèmes de Nikishin proprement dits. Nous ne ferons que commencer cette démonstration, qui sera poursuivie dans l'exposé suivant.

Nous introduisons une nouvelle définition :

Soient maintenant E un espace vectoriel, V une partie équilibrée de E et p un nombre réel tel que $0 < p \le 2$. Nous dirons qu'une partie A de E est de type (p,V) si pour tout $\alpha \in]0,1[$ il existe une constante K_α telle que l'on ait pour toute suite $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de A, toute suite $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ de réels et toute suite stable d'ordre p $(f_1,\dots,f_n)$ sur un espace de probabilité (X,P) :

$$J_\alpha(j_V(\Sigma\, \lambda_i x_i f_i(t)),\ dP(t)) \le K_\alpha(\Sigma|\lambda_i|^p)^{1/p} \quad \blacklozenge$$

Nous noterons $K_{\alpha,p}(V,A)$ la plus petite constante K_α telle que la propriété ci-dessus soit réalisée.

Avec cette nouvelle terminologie, dire qu'un espace quasi-normé E est de type p équivaut à dire que sa quasi-boule unité B est de type (p,B), et :

$$K_{\alpha,p}(E) = K_{\alpha,p}(B,B)$$

Soient (Ω,μ) un espace de probabilité, et $\alpha \in]0,1[$. Nous désignerons par V_α le voisinage de zéro équilibré dans $L^0(\Omega,\mu)$ défini par :

$$V_\alpha = \{f | J_\alpha(f,\mu) \le 1\}$$

$\blacklozenge$ (j_V étant la jauge de V).

($J_\alpha(f,\mu)$ est donc la jauge de V_α).

Proposition 4 : Soient (Ω,μ) un espace de probabilité, $\alpha \in]0,1[$, $p \in]0,2]$ et A une partie de $L^0(\Omega,\mu)$ de type (p,V_α).

Il existe une partie mesurable Ω_α de Ω, telle que $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq 8\alpha$, et :

$$\forall f \in A \quad (\int_{\Omega_\alpha} |f|^p d\mu)^{1/p} \leq 2^{1/p} A_p^{1/2} K_{\alpha,p}(V_\alpha,A)$$

Démonstration : Nous utiliserons l'inégalité de Fubini

$$J_\gamma[J_\delta(h(t,\omega),d\mu(\omega)),dP(t)] \leq J_\alpha(J_\beta(h(t,\omega)dP(t)),d\mu(\omega)),$$

lorsque $\alpha + \beta \leq \gamma\delta$. ([2], Proposition (XXIV,2,4))

Soient $(g_1,\dots,g_n)$ une suite d'éléments de A, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ une suite de nombres réels et $(f_1,\dots,f_n)$ une suite stable d'ordre p. Nous aurons, d'après le lemme 2, l'inégalité de Fubini et la définition du type (p,V_α) :

$$J_{4\alpha}((\Sigma|\lambda_i g_i(\omega)|^p)^{1/p},d\mu(\omega)) = A_p^{1/2}\ J_{4\alpha}(J_{1/2}(|\Sigma\lambda_i g_i(\omega)f_i(t)|,dP(t)),d\mu(\omega))$$

$$\leq A_p^{1/2}\ J_\alpha(J_\alpha(|\Sigma\lambda_i g_i\ (\omega)f_i(t)|,d\mu(\omega)),dP(t))$$

$$= A_p^{1/2}\ J_\alpha(j_{V_\alpha}\ (\Sigma\lambda_i g_i f_i(t)),dP(t))$$

$$\leq A_p^{1/2}\ K_{\alpha,p}\ (V_\alpha,A)(\Sigma|\lambda_i|^p)^{1/p}$$

Considérons l'ensemble B des fonctions de la forme $\Sigma|\lambda_i g_i(\omega)|^p$, où $(g_1,\dots,g_n)$ est une suite d'éléments de A, et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ une suite de réels telle que $\Sigma|\lambda_i|^p \leq 1$. Cet ensemble B est convexe, et formé de fonctions positives. D'autre part, l'inégalité précédente se traduit, lorsque $\Sigma|\lambda_i|^p \leq 1$, par :

$$\mu\{\omega|\ \Sigma|\lambda_i g_i(\omega)|^p > (A_p^{1/2}K_{\alpha,p}(V_\alpha,A))^p\} \leq 4\alpha\ ,$$

c'est-à-dire encore $J_{4\alpha}(B) \leq (A_p^{1/2} K_{\alpha,p}(V_\alpha, A))^p$

D'après le théorème 1, il existe une partie mesurable Ω_α de Ω telle que $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq 8\alpha$, et :

$$\forall f \in B \qquad \int_{\Omega_\alpha} f d\mu \leq 2J_{4\alpha}(B),$$

et en particulier :

$$\forall g \in A \qquad \left(\int_{\Omega_\alpha} |g|^p d\mu\right)^{1/p} \leq 2^{1/p} A_p^{1/2} K_{\alpha,p}(V_\alpha, A)$$

ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. M. Nikishin : Resonance theorems and superlinear operators, Transl. of contents of Uspekhi Mat. Nauk, Vol.XXV, N°6, Nov.Déc. 1970.

[2] Séminaire L. Schwartz 1969-1970.
