Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

Pierre Saphar

Les normes tensorielles g_k et d_k

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. nº 9, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A9_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   L. S C H W A R T Z   1 9 6 9 - 1 9 7 0

LES NORMES TENSORIELLES g_k ET d_k

par Pierre SAPHAR

Exposé N° 9

2 Janvier 1970

§ 1. RAPPELS SUR LE PRODUIT TENSORIEL

Rappelons brièvement quelques propriétés fondamentales du produit tensoriel.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K. Alors, il existe un espace vectoriel, noté $E \otimes F$, et une application bilinéaire, notée i, de $E \times F$ sur $E \otimes F$, tels qu'à toute application bilinéaire A de $E \times F$ dans un espace vectoriel G, on puisse faire correspondre une application linéaire $\widetilde{A}$ unique de $E \otimes F$ dans G avec : $A = \widetilde{A} o i$. On pose $i(x,y) = x \otimes y$ et on démontre que $E \otimes F$ est engendré par les éléments de la forme $x \otimes y$. Si $u \in E \otimes F$, on peut donc écrire : $u = \Sigma_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$, $x_i \in E$, $y_i \in F$; cette représentation de u n'est d'ailleurs pas unique. On démontre enfin que $E \otimes F$, ainsi défini, est unique à un isomorphisme d'espace vectoriel près.

Nous utiliserons les deux propriétés suivantes :

- Soient E, F, E_1, F_1, quatre espaces vectoriels, A une application linéaire de E dans E_1, B une application linéaire de F dans F_1. Alors, il existe une application linéaire de $E \otimes F$ dans $E_1 \otimes F_1$, notée $A \otimes B$, définie par $[A \otimes B](x \otimes y) = Ax \otimes By$.

- Soit E^* le dual algébrique de E, $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F. Alors, il existe une application linéaire injective de $E^* \otimes F$ dans $\mathcal{L}(E,F)$, $u \to \widetilde{u}$, telle que si $u = \Sigma_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i$, on ait, pour tout x de E, $\widetilde{u}(x) = \Sigma_{i=1}^{n} < x, x_i^* > y_i$.

L'image de $E^* \otimes F$ par cette application est formée des applications de rang fini de E dans F.

§ 2. LES NORMES TENSORIELLES g_k et d_k

Dans toute la suite, E et F désignent deux espaces de Banach sur le même corps K ($\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; k sera un nombre réel tel que $1 \leq k \leq +\infty$, k' sera le nombre conjugué : $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$. On note E' (resp. F') le dual topologique de E (resp. F). Enfin, $\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de E, on désigne par $N_k((x_i)_{i\in I})$, ou par $N_k(x_i)$, s'il n'y a pas ambiguité, le nombre réel, fini ou non :

$$N_k(x_i) = \left(\sum_i \|x_i\|^k\right)^{1/k} \quad \text{si k est fini,}$$

$$N_\infty(x_i) = \sup_i \|x_i\|$$

Par ailleurs, on dit que la famille (x_i) est :

- de puissance $k^{\underline{\text{ième}}}$ sommable, si $N_k(x_i)$ est fini,
- scalairement de puissance $k^{\underline{\text{ième}}}$ sommable si $\sup\limits_{\substack{x' \in E' \\ \|x'\| \leq 1}} N_k(\langle x_i, x'\rangle)$ est fini.

  On pose $M_k(x_i) = \sup\limits_{\|x'\| \leq 1} N_k(\langle x_i, x'\rangle)$.

On démontre, sans difficulté, que l'ensemble des familles $(x_i)_{i\in I}$ telles que $N_k(x_i)$ est fini est un espace vectoriel, pour lequel $N_k(x_i)$ est une norme qui en fait un espace de Banach. Cet espace sera noté $l^k(E,I)$. On montre alors, comme dans le cas classique où $E = \mathbb{C}$, que si $1 \leq k < +\infty$, $(l^k(E,I))' = l^{k'}(E',I)$.

De même, on montre que l'ensemble des familles $(x_i)_{i\in I}$ telles que $M_k(x_i)$ est fini est un espace vectoriel, noté $m_k(E,I)$. On vérifie immédiatement que $M_k(x_i)$ est une norme sur $m_k(E,I)$. On peut donner de $m_k(E,I)$ l'interprétation suivante :

<u>Proposition 1</u> : Si $1 < k \leq +\infty$, $m_k(E,I)$ peut être identifié en tant qu'espace normé à $\mathcal{L}(l^{k'}(I),E)$. De plus $m_1(E,I)$ peut être identifié à $\mathcal{L}(c_o(I),E)$.

L'espace $l^{k'}(I)$ est défini par $l^{k'}(I) = l^{k'}(\mathbb{K},I)$. L'espace $c_o(I)$ est le sous-espace vectoriel de $l^{\infty}(I)$ formé des suites qui tendent vers 0 à l'infini.

Démonstration : supposons $1 < k \leq +\infty$. Soit $B \in \mathcal{L}(l^{k'}(I),E)$ et $(e_i)_{i\in I}$ la base canonique de $l^{k'}(I)$; B est bien définie par la donnée des $B(e_i) = x_i$. Par ailleurs, l'application ${}^tB$ de E' dans $l^k(I)$ est définie par ${}^tB(x') = (<x_i,x'>)_i$. On a donc :

$$\|B\| = \|{}^tB\| = \sup_{\|(a_i)\|_{k'}\leq 1} \|\sum_i a_i x_i\| = M_k(x_i).$$

On définit ainsi une application linéaire, isométrique, que $\mathcal{L}(l^{k'}(I),E)$ dans $m_k(E,I)$. Montrons que cette application est surjective :

Soient $(x_i)_i \in m_k(E,I)$ et M le sous espace vectoriel de $l^{k'}(I)$ formé des éléments $a = (a_i)_i$ avec $a_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. On sait que M est dense dans $l^{k'}(I)$. Définissons l'application B de M dans E : $B(a) = \sum_i a_i x_i$.

$$\|B(a)\| = \sup_{\|x'\|\leq 1} |\sum_i a_i <x_i,x'>| \leq N_k(a_i)\; M_k(x_i).$$

Donc, B est continue de M dans E et peut être étendue à $l^{k'}(I)$.
Le résultat est obtenu.
La démonstration pour $k = 1$ est analogue.

Corollaire : $m_k(E,I)$ est un espace de Banach.
Définissons alors les normes g_k et d_k :
on désigne par u un élément de $E \otimes F$; $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$. On pose

$$|u|_{g_k} = g_k(u) = \inf N_k(x_i)\; M_{k'}(y_i)$$

$$|u|_{d_k} = d_k(u) = \inf M_{k'}(y_i)\; N_k(x_i),$$

les bornes inférieures étant prises sur l'ensemble des représentations de u de la forme $\sum_i x_i \otimes y_i$. On a alors le résultat suivant :

<u>Théorème 1</u> : Pour tout k, g_k et d_k sont des normes sur $E \otimes F$.

<u>Démonstration</u> : Montrons le résultat pour g_k :

Soient u_1 et u_2 deux éléments de $E \otimes F$. On peut écrire :

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \otimes y_{i,j} \qquad j = 1,2$$

Soit $\eta > 0$. On peut choisir les représentations de u_1 et u_2 telles que :

$$N_k((x_{i,j})_i) \leq (g_k(u_j) + \eta)^{1/k} \qquad j = 1,2$$

$$M_{k'}((y_{i,j})_i) \leq (g_k(u_j) + \eta)^{1/k'} \qquad j = 1,2$$

On en tire immédiatement :

$$N_k((x_{i,j})_{i,j}) \leq (g_k(u_1) + g_k(u_2) + 2\eta)^{1/k} ,$$

$$M_{k'}((y_{i,j})_{i,j}) \leq (g_k(u_1) + g_k(u_2) + 2\eta)^{1/k'} ,$$

$$N_k((x_{i,j})_{i,j})M_{k'}((y_{i,j})_{i,j}) \leq g_k(u_1) + g_k(u_2) + 2\eta .$$

Donc :

$$g_k(u_1 + u_2) \leq g_k(u_1) + g_k(u_2)$$

Il est aisé de montrer que $g_k(\lambda u) = |\lambda|\, g_k(u)$ pour tout scalaire λ.
Par ailleurs, on sait que $E \otimes F$ et $E' \otimes F'$ sont en dualité. Si $u \in E \otimes F$, et $u' \in E' \otimes F'$, on vérifie que :

$$|\langle u,u'\rangle| \leq g_k(u)\ d_{k'}(u') .$$

Donc : $g_k(u) = 0$ entraîne $u = 0$.

Ainsi, g_k est une norme sur $E \otimes F$ et il en est de même de d_k. On note $E \otimes_{g_k} F$, le produit tensoriel $E \otimes F$ muni de g_k. On définit de même $E \otimes_{d_k} F$.

<u>Proposition 2</u> : Soient $x \in E$ et $y \in F$. Alors $g_k(x \otimes y) = \|x\|.\|y\|$.

<u>Démonstration</u> : Il est clair que $g_k(x \otimes y) \leq \|x\|.\|y\|$.

Si $u \in E \otimes F$ et $u' \in E' \otimes F'$ on a : $|\langle u,u'\rangle| \leq |u|_{g_k} |u'|_{d_{k'}}$. Donc $E' \otimes F'$ se plonge dans $(E \otimes_{g_k} F)'$. Notons $\|u'\|_k$ la norme sur $E' \otimes F'$ induite par $(E \otimes_{g_k} F)'$.

Soient $x' \in E'$ et $y' \in F'$:

$$\langle x \otimes y,\ x' \otimes y'\rangle = \langle x,x'\rangle \langle y,y'\rangle$$

Donc

$$|\langle x \otimes y,\ x' \otimes y'\rangle| \leq \|x' \otimes y'\|_k\ g_k(x \otimes y) \leq \|x' \otimes y'\|_k\ \|x\|\|y\|.$$

Il existe x'_o et y'_o de norme 1 avec :

$$|\langle x \otimes y,\ x'_o \otimes y'_o\rangle| = \|x\|.\|y\|.$$

Puisque $\|x'_o \otimes y'_o\|_k \leq \|x'_o \otimes y'_o\|_{d_{k'}}$, on déduit que $\|x'_o \otimes y'_o\|_{d_{k'}} \leq 1$.

$$\|x\|\|y\| \leq g_k(x \otimes y) .$$

Le résultat est obtenu.

<u>Corollaire</u> : $d_k(x \otimes y) = \|x\|\|y\|$.

<u>Proposition 3</u> : Soient E, E_1, F, F_1 quatre espaces de Banach, A une application linéaire continue de E dans E_1, B une application linéaire continue de F dans F_1.

Alors $A \otimes B$ est une application linéaire continue de $E \otimes_{g_k} F$ dans $E_1 \otimes_{g_k} F_1$ de norme inférieure ou égale à $\|A\|\|B\|$.

<u>Démonstration</u> : Soit $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ un élément de $E \otimes F$. Alors,

$$[A \otimes B](u) = \sum_{i=1}^{n} Ax_i \otimes By_i$$

Donc

$$N_k(Ax_i)M_{k'}(By_i) \leq \|A\|\|B\|\quad N_k(x_i)M_{k'}(y_i)$$

$$|[A \otimes B](u)|_{g_k} \leq \|A\|\|B\|\ |u|_{g_k} .$$

Le résultat est obtenu.

Etudions le complété de $E \otimes_{g_k} F$, qui sera noté $E \hat{\otimes}_{g_k} F$.

<u>Lemme 1</u> : Soient $(x_i)_{i\in N}$ une suite de E et $(y_i)_{i\in N}$ une suite de F telles que :

$N_k(x_i) < +\infty$ et de plus $\|x_i\| \to 0$ si $i \to +\infty$ dans le cas où $k = +\infty$,

$M_{k'}(y_i) = a < +\infty$.

Alors la famille $x_i \otimes y_i$ est sommable dans $E \hat{\otimes}_{g_k} F$.

<u>Démonstration</u> : A $\eta > 0$, on peut faire correspondre une partie B finie de l'ensemble N des entiers positifs ou nuls tels que pour toute partie finie J de N avec $J \cap B = \emptyset$ on ait :

$$N_k((x_i)_{i\in J}) \leq \eta$$

Alors

$$N_k((x_i)_{i\in J}) M_{k'}((y_i)_{i\in J}) \leq a\, \eta .$$

Le résultat est obtenu.

<u>Proposition 4</u> : Soient E et F deux espaces de Banach, u un élément de $E \hat{\otimes}_{g_k} F$.

Alors, il existe une suite $(x_i)_{i\in N}$ de E, une suite $(y_i)_{i\in N}$ de F telles que :

- $N_k(x_i) < +\infty$ et de plus $\|x_i\| \to 0$ si $i \to +\infty$, dans le cas où $k = +\infty$,
- $M_{k'}(y_i) < +\infty$,
- $u = \Sigma_{i=o}^{\infty} x_i \otimes y_i$, la série convergeant dans $E \hat{\otimes}_{g_k} F$.

De plus, $|u|_{g_k} = \inf N_k(x_i)\, M_{k'}(y_i)$, la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des séries de la forme $u = \sum_{i=o}^{\infty} x_i \otimes y_i$, (x_i) et (y_i) ayant les propriétés indiquées ci-dessus.

<u>Démonstration</u> : Soit $u \in E \hat{\otimes}_{g_k} F$. Alors, il existe une suite (u_n) d'éléments de $E \otimes F$ telle que $|u_n - u|_{g_k}^{k} \to 0$. On peut écrire :

$u = u_o + (u_1 - u_o) + (u_2 - u_1) + \ldots .$

Quitte à remplacer la suite (u_n) par une suite extraite, on peut supposer que $|u_n - u_{n-1}|_{g_k} \leq \frac{1}{2n^2}$ si n est assez grand. On peut alors écrire :

$$u_n - u_{n-1} = \sum_{i=1}^{p(n)} x_{i,n} \otimes y_{i,n}$$

avec

$$N_k((x_{i,n})_i) \leq \frac{1}{n} \text{ , si n est assez grand}$$

$$M_{k'}((y_{i,n})_i) \leq \frac{1}{n} \text{ , si n est assez grand.}$$

Donc, $N_k((x_{i,n})_{i,n}) < +\infty$, $M_{k'}((y_{i,n})_{i,n}) < +\infty$.

On peut alors écrire, d'après le lemme 1 :

$u = \sum_{i=o}^{\infty} x_i \otimes y_i$, les suites (x_i) et (y_i) ayant les propriétés voulues.

Remarquons que l'on a même un peu plus :

A tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre n_o tel que si $n \geq n_o$ on ait :

$$N_k((x_i)_{i>n}) \leq \varepsilon$$

$$M_{k'}((y_i)_{i>n}) \leq \varepsilon.$$

Posons : $u_n = \sum_{i=o}^{n} x_i \otimes y_i$.

On a

$$|u_n|_{g_k} \leq N_k((x_i)_{i\leq n}) \; M_{k'}((y_i)_{i\leq n})$$

Donc, par passage à la limite :

$$|u|_{g_k} \leq N_k(x_i) \; M_{k'}(y_i).$$

Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver un entier n tel que :

$$|u_n - u|_{g_k} \leq \varepsilon$$

$$N_k((x_i)_{i>n}) \leq \varepsilon$$

$$M_{k'}((y_i)_{i>n}) \leq \varepsilon$$

On peut choisir les (x_i) et les (y_i) pour $i \leq n$ tels que :

$$N_k((x_i)_{i\leq n}) \; M_{k'}((y_i)_{i\leq n}) - \varepsilon \leq |v_n|_{g_k}$$

$$N_k((x_i)_{i\leq n}) \; M_{k'}((y_i)_{i\leq n}) \leq |u|_{g_k} + 2\varepsilon$$

Donc, il existe une constante B, ne dépendant que de u, telle que les

(x_i) et les (y_i) pour $i \geq n$ puissent être choisis avec :

$$N_k((x_i)_{i \leq n}) \leq B$$

$$M_{k'}((y_i)_{i \leq n}) \leq B$$

Alors :

$$N_k(x_i)M_{k'}(y_i) \leq [N_k((x_i)_{i\leq n}) + N_k((x_i)_{i>n})].[M_{k'}((y_i)_{i\leq n}) + M_{k'}((y_i)_{i>n})$$

$$\leq |v_n|_{g_k} + \varepsilon + B\varepsilon + B\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$N_k(x_i)M_{k'}(y_i) \leq |u|_{g_k} + 2\varepsilon + 2B\varepsilon + \varepsilon^2$$

Le résultat est obtenu.

§ 3. LES APPLICATIONS k-NUCLEAIRES A GAUCHE ET A DROITE

Proposition 5 : L'injection naturelle de $E' \otimes_{g_k} F$ dans $\mathcal{L}(E,F)$ est continue et se prolonge en une application linéaire continue de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ dans $\mathcal{L}(E,F)$, de norme inférieure ou égale à 1.

Démonstration : Soit $u = \sum_{i=1}^{n} x_i' \otimes y_i$ un élément de $E' \otimes_{g_k} F$

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i' \rangle\, y_i , \qquad x \in E$$

$$|\tilde{u}(x)| \leq N_k((\langle x,x_i'\rangle)_i)\; M_{k'}(y_i)$$

$$\leq |x|\; g_k(u) .$$

$$|\tilde{u}| \leq |u|_{g_k}$$

On note $\mathcal{L}_g^k(E,F)$ l'espace vectoriel image de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$. Les éléments de $\mathcal{L}_g^k(E,F$ sont appelés applications k-nucléaires à gauche.

Si $T \in \mathcal{L}_g^k(E,F)$ et $x \in E$ on peut écrire :

$$T_x = \sum_{i=o}^{\infty} \langle x, x_i' \rangle\, y_i$$

avec $\quad N_k(x'_i) < +\infty$ et $|x'_i| \underset{i\to+\infty}{\to} 0$ si $k = +\infty$

$M_k(y_i) < +\infty$.

On ne sait si l'application de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ dans $\mathcal{L}(E,F)$ est toujours injective. Si $T \in \mathcal{L}^k_g(E,F)$, on note $g_k(T)$ la norme quotient associée à cette application. Toutefois, on peut montrer que si E' ou F vérifient l'hypothèse d'approximation (cf. exposé N° 5, p. 4) l'application de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ dans $\mathcal{L}(E,F)$ est injective.

<u>Proposition 6</u> : Soit $T \in \mathcal{L}^k_g(E,F)$. Alors T est compacte.

<u>Démonstration</u> : Soit $T \in \mathcal{L}^k_g(E,F)$. Alors

$T_x = \sum_{i=o}^{\infty} \langle x,x'_i\rangle\, y_i$, x'_i et y_i ayant les propriétés indiquées.

Posons :

$$T_n x = \sum_{i=o}^{n} \langle x,x'_i\rangle\, y_i, \quad T_n \text{ est de rang fini.}$$

On vérifie immédiatement que

$$\|T_n - T\| \to 0 \quad \text{si } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Le résultat est obtenu.

On introduit de même l'espace $\mathcal{L}^k_d(E,F)$ des applications k-nucléaires à droite.

§ 4. <u>LE CAS OU k = 1</u>

Soit $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ un élément de $E \otimes F$.

Grothendieck a introduit la norme :

$$|u|_\pi = \inf \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|y_i| ,$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des représentations de u.

Grothendieck a de plus démontré la propriété :

$$(E \otimes_\pi F)' = B(E,F)$$

$B(E,F)$ étant l'ensemble des applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans K.

Ce résultat sera retrouvé comme cas particulier dans le théorème 2. Nous pouvons montrer la :

<u>Proposition 7</u> : On a $g_1 = d_1 = \pi$.

<u>Démonstration</u> : Montrons que $g_1 = \pi$.

Soit $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$

$$|u|_{g_1} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i \otimes y_i|_{g_1} \leq \sum_i \|x_i\| \|y_i\|$$

$$\leq |u|_\pi \quad .$$

Réciproquement, supposons que $\|y_i\| = 1$, pour tout i. Alors :

$$|u|_\pi \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \leq N_1(x_i)\ M_\infty(y_i)$$

$$|u|_\pi \leq |u|_{g_1}$$

Le résultat est obtenu. On montre de même que $d_1 = \pi$.

§ 5. <u>LE CAS OU k = 2</u>

Dans cette partie, on désigne par H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Soient x_i, y_i deux éléments de H_i, $i = 1,2$. Alors $H_1 \otimes H_2$ est muni de la forme sesquilinéaire, séparante, définie par :

$$(x_1 \otimes x_2,\ y_1 \otimes y_2) = (x_1, x_2)(y_1, y_2).$$

$H_1 \otimes H_2$ muni de cette forme sesquilinéaire est donc un espace préhilbertien séparé, noté $H_2 \otimes_2 H_2$.

On note $H_1 \hat{\otimes}_2 H_2$ le complété de $H_1 \otimes_2 H_2$. Si $u \in H_1 \hat{\otimes}_2 H_2$, $|u|_2$ sera la norme de u dans $H_1 \hat{\otimes}_2 H_2$.

<u>Proposition 8</u> : Soient $(e_i)_{i\in I}$, $(f_j)_{j\in J}$ des bases orthonormées de H_1 et H_2. Alors $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ est une base orthonormée de $H_1 \hat{\otimes} H_2$.

<u>Démonstration</u> : En effet, $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ est un système orthonormal et l'on vérifie immédiatement que le sous-espace vectoriel engendré par $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ est dense dans $H_1 \hat{\otimes}_2 H_2$.

<u>Proposition 9</u> : Il existe une application linéaire, continue, canonique, injective de $H_1' \hat{\otimes}_2 H_2$ dans $\mathcal{L}(H_1, H_2)$. L'image de cette application est formée des applications de Hilbert-Schmidt de H_1 dans H_2.

<u>Démonstration</u> : Soit φ l'application antilinéaire canonique de H_1 sur H_1'. On peut écrire :

$$u = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \, \varphi(e_i) \otimes f_j \quad \text{avec} \quad |u|_2 = \Big(\sum_{i,j} |\lambda_{ij}|^2 \Big)^{1/2}$$

On pose, si $x \in H_1$:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} \, (x, e_i) f_j$$

Alors

$$|\tilde{u}(x)| \leq \Big(\sum_{i,j} |\lambda_{i,j}|^2 |(x,e_i)|^2 \Big)^{1/2}$$

$$\leq |u|_2$$

L'application $u \to \tilde{u}$ est donc bien linéaire continue. Supposons que $\tilde{u} = 0$. Alors $\lambda_{i,j} = 0$ pour tout i et j et l'on déduit que $u = 0$. L'application est donc injective. Enfin, il est clair que l'on peut écrire :

$$\tilde{u}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \, (x, f_n) g_n$$

avec

$$\sum_n |\lambda_n|^2 < +\infty ,$$

f_n et g_n étant deux systèmes orthonormés.

On déduit de l'exposé précédent (N° 8) que $\tilde{u}$ est de Hilbert-Schmidt. Nous allons comparer la norme $|u|_2$ avec les normes $|u|_{g_2}$ et $|u|_{d_2}$.

<u>Lemme 2</u> : Soient H_1, H_2, H_3 trois espaces de Hilbert et B une application linéaire continue de H_2 dans H_3. Alors $1 \otimes B$ est une application linéaire continue de $H_1 \otimes_2 H_2$ dans $H_1 \otimes_2 H_3$ de norme inférieure ou égale à $|B|$.

<u>Démonstration</u> : Soit $(e_i)_i$ une base orthonormée de H_1 et $u \in H_1 \otimes H_2$. On peut écrire $u = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes y_i$ avec $y_i \in H_2$.

On vérifie que :

$$|u|_2 = N_2(y_i)$$

$$[1 \otimes B](u) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes B(y_i)$$

$$|[1 \otimes B](u)|_2 = N_2(By_i)$$

$$\leq |B|\,|u|_2$$

Le résultat est obtenu.

<u>Proposition 10</u> : Soit $u \in H_1 \otimes H_2$. Alors, $|u|_2 = |u|_{g_2} = |u|_{d_2}$.

<u>Démonstration</u> : Soit $u \in H_1 \otimes H_2$. Alors

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i \otimes f_i$$

$$|u|_2 = \Big(\sum_i |\lambda_i|^2\Big)^{1/2}$$

$$N_2(\lambda_i e_i) M_2(f_i) = |u|_2$$

Donc $$|u|_{g_2} \leq |u|_2$$

Montrons l'inégalité : $|u|_2 \leq |u|_{g_2}$.

Soit $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ une représentation quelconque de u.

Désignons par (e_i) la base orthonormale de $l^2 = l^2(N)$ et posons :

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes e_i \qquad v \in H_1 \otimes l^2$$

Désignons par B l'application de l^2 dans H_2, définie par :

$$B(e_i) = y_i \qquad 1 \leq i \leq n$$
$$= 0 \qquad i > n .$$

$$[1 \otimes B](v) = u$$

nous donne $|u|_2 \leq |B| |v|_2$

ou $\leq M_2(y_i) N_2(x_i)$

$$|u|_2 \leq |u|_{g_2}$$

Le résultat est obtenu.

On montre de même que sur $H_1 \otimes H_2$, $|u|_2 = |u|_{d_2}$.

<u>Corollaire</u> : $l^2_g(H_1,H_2) = l^2_d(H_1,H_2) = \pi_2(H_1,H_2)$, ($\pi_2(H_1,H_2)$ désignant l'espace des applications de Hilbert Schmidt de H_1 dans H_2).

§ 6. <u>LE THEOREME DE DUALITE</u>

Donnons tout d'abord le complément suivant sur les applications k-sommantes ($1 \leq k < +\infty$).

<u>Proposition 11</u> : Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E dans F. Supposons que pour toute suite $(x_i)_{i \in N}$ de $m_k(E,N)$, (Tx_i) soit dans $l^k(E,N)$. Alors, T est k sommante.

<u>Démonstration</u> : T définit une application linéaire T_1 de $m_k(E,N)$ dans

$l^k(E,N) : (x_i)_i \to (Tx_i)_i$. Il nous suffit de montrer que T_1 est continue, et pour cela que le graphe de T_1 est fermé, (car $m_k(E,N)$ et $l^k(E,N)$ sont des espaces de Banach).

Supposons que $\quad (x_{i,n})_i \to (x_i)_i \quad$ dans $m_k(E,N)$

et que $\quad (Tx_{i,n})_i \to (y_i) \quad$ dans $l^k(E,N)$.

Alors $x_{i,n} \to x_i$ faiblement dans E, pour chaque i. Donc :

$Tx_{i,n} \to Tx_i$ faiblement dans F, pour chaque i. Mais :

$Tx_{i,n} \to y_i$ dans F pour chaque i.

On conclut que $Tx_i = y_i$ pour chaque i.

Le résultat est obtenu.

<u>Théorème 2</u> : Soit k un nombre réel tel que $1 \leq k \leq +\infty$.
Alors, on peut identifier $(E \otimes_{d_k} F)'$ et $\pi_{k'}(E,F')$ en tant qu'espaces de Banach.

<u>Démonstration</u> : Soit $B \in (E \otimes_{d_k} F)'$.
Si $x \in E$ et $y \in F$, on a :

$$|B(x \otimes y)| \leq |B| \, \|x\| \|y\|, \quad \text{puisque} \quad |x \otimes y|_{d_k} = \|x\| \|y\|$$

Donc B peut être identifiée à une forme bilinéaire continue sur $E \times F$ ou encore à une application linéaire continue T de E dans F'. On peut écrire : $B(x \otimes y) = \langle Tx, y \rangle$.
Notons $p_k(T)$ la norme de T en tant qu'élément de $(E \otimes_{d_k} F)'$.

$$p_k(T) = \sup_{\substack{N_k(y_i) \leq 1 \\ M_{k'}(x_i) \leq 1}} \left| \sum_{i=1}^{n} \langle Tx_i, y_i \rangle \right| \quad x_i \in E, \ y_i \in F$$

Si $k < +\infty$, $(l^k(E,N))' = l^{k'}(E',N)$.

Supposons tout d'abord $k < +\infty$. Alors

$$p_k(T) = \sup \sup_{N_k(y_i)\leq 1} |\Sigma < Tx_i, y_i>| = \sup_{M_{k'}(x_i)\leq 1} N_{k'}(Tx_i) = \pi_{k'}(T)$$

Si $k = +\infty$, le dual topologique de $l^1(F')$ est $l^\infty(F'')$. Donc :

$$N_1(Tx_i) = \sup_{N_\infty(y_i'')\leq 1} |\Sigma < Tx_i, y_i''>| \qquad y_i'' \in F''$$

Utilisant la densité, pour la topologie affaiblie de F, de la boule unité de F dans la boule unité de F" on a aussi :

$$N_1(Tx_i) = \sup_{N_\infty(y_i)\leq 1} |\Sigma < Tx_i, y_i>| \quad y_i \in F.$$

Donc $$p_\infty(T) = \pi_1(T)$$

Ainsi, T est un élément de $\pi_{k'}(E,F')$.

Il est, par ailleurs, aisé de vérifier que l'application $B \to T$ de $(E \otimes_{d_k} F)'$ dans $\pi_{k'}(E,F')$ est linéaire, bijective, isométrique.

Le résultat est obtenu.

<u>Corollaire 1</u> : $(E \otimes_{d_1} F)' = \mathcal{L}(E,F')$.

C'est le résultat de Grothendieck sur la norme π.

<u>Corollaire 2</u> : Soient k et k_1 deux nombres réels tels que $1 \leq k \leq k_1 \leq +\infty$.

Alors $d_{k_1} \leq d_k$ et $g_{k_1} \leq g_k$.

Ce résultat découle immédiatement de la propriété : si $T \in \pi_{k_1'}(E,F')$, alors $T \in \pi_{k'}(E,F')$ et $\pi_{k'}(T) \leq \pi_{k_1'}(T)$.

<u>Proposition 12</u> : Pour tout k, $\mathcal{L}_g^k(E,F) \subset \pi_k(E,F)$. Si $T \in \mathcal{L}_g^k(E,F)$, alors $\pi_k(T) \leq g_k(T)$.

<u>Démonstration</u> : Supposons $k < +\infty$. Soit $T \in \mathcal{L}_g^k(E,F)$ et $x_1 \ldots x_p \ldots$ une suite de E.

$$Tx_p = \sum_{i=o}^{\infty} <x,x_i'> y_i$$

$$\|Tx_p\|^k = \|\sum_{i=o}^{\infty} <x_p, x_i'> y_i\|^k$$

$$\leq M_{k'}^k(y_i)\ N_k^k(<x_p,x_i'>)$$

$$\sum_p \|Tx_p\|^k \leq M_{k'}^k(y_i)\ M_k^k(x_p)\ N_k^k(x_i')$$

$$N_k(Tx_p) \leq g_k(T)\ M_k(x_p).$$

Le résultat est obtenu dans ce cas.

Il est immédiat si $k = +\infty$.