Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

Paul Krée

(Conférence n°4) Accouplement de processus linéaires. Images de probabilités cylindriques par certaines applications non linéaires

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. nº 31, p. 1-39
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A42_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

D E U X   J O U R N E E S   p · R A D O N I F I A N T E S

ACCOUPLEMENT DE PROCESSUS LINEAIRES

IMAGES DE PROBABILITES CYLINDRIQUES PAR CERTAINES APPLICATIONS NON LINEAIRES

par Paul KRÉE

Conférence N° 4 — 26 Janvier 1972

ACCOUPLEMENT DE PROCESSUS LINEAIRES
IMAGES DE PROBABILITES CYLINDRIQUES PAR CERTAINES APPLICATIONS NON LINEAIRES

par Paul KRÉE

Résumé.
a) Processus linéaires vectoriels et probabilités $Y \otimes$ cylindriques : extension à ces processus et à ces probabilités, de la théorie des processus linéaires et des probabilités cylindriques. b) Image de probabilités cylindriques par certaines applications bilinéaires. Examen de cas particuliers : intégrale de Ito, prolongement continu... c) Remarque sur l'image d'une probabilité X.cylindrique par une application partiellement linéaire. Ces résultats sont annoncés dans Krée [4] et [6].

SOMMAIRE

(1)- De même que la théorie des distributions généralise la théorie des fonctions, la théorie des processus linéaires, introduite par Yaglom (v. Gelfand-Vilenkin [1]) généralise la théorie des processus et des champs aléatoires. La théorie des processus linéaires commence à trouver des applications (en physique théorique, en traitement du signal, dans la théorie des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles). Dans de nombreux cas, il est donné simultanément deux processus linéaires, et l'on cherche à définir à l'aide de ces données un nouveau processus linéaire. Indiquons quelques exemples :

a) Intégrales stochastiques, (voir Mac Kean [1],Gikhman-Skorokhod [1] .

Soit B_t une version du mouvement brownien sur $I = [0,1]$, soit $(\dot{B}_t)$ sa dérivée et soit X_t un processus stochastique (au sens usuel) sur I . Les théories usuelles des intégrales stochastiques ont pour but de construire à partir de la donnée simultanée des processus X_t et $Y_t = \dot{B}_t$, un nouveau processus $Z_t : t \to \int_0^t X_\theta \dot{B}_\theta \, d\theta$. Les théories des intégrales stochastiques permettent donc de construire (moyennant certaines hypothèses sur les processus X_t et Y_t), un processus Z_t , fonction bilinéaire de X_t et de Y_t .

b) Equations à coefficients aléatoires.

Nous avons montré (voir Krée [1] et [2]), comment le problème de l'étude des équations aux dérivées partielles à coefficients aléatoires, est équivalent au problème de la définition de l'image d'une probabilité cylindrique sur un produit $X \times Y$ d'e.v. par une application partiellement linéaire en y:

(2) $$\begin{array}{rcl} X \times Y & \longrightarrow & Z \\ x\ ,\ y & \longmapsto & \beta_x(y) \end{array} \qquad \text{avec} \quad \beta_x \in \mathcal{L}(Y,Z)$$

l'application β pouvant être en particulier bilinéaire. Nous avons aussi résolu le problème, dans le cas particulier où μ admet une désintégration p.continue et où la première projection canonique μ_1 de μ est une vraie mesure. Notons $L^o_{\mu_1}(X,Y')$ l'espace des fonctions $X \to Y'$, qui sont μ_1-mesurables au sens de Lusin. L. Schwartz, (communication personnelle, Août 1971), a introduit la notion de probabilité X.cylindrique sur $X \times Y$, où X est maintenant un espace topologique (généralisant la situation ci-dessus) et a remplacé l'hypothèse de "bonne" désintégration par une hypothèse de prolongement à $L^o_{\mu_1}(X,Y')$ d'une certaine application linéaire, à valeurs dans un espace de v.a.

C) Mécanique quantique.

Voir les travaux de I.M. Ségal, Glimm, Jaffe.

(3) - Dans tous les cas, on est amené à définir l'accouplement de deux processus linéaires, (une application bilinéaire étant donnée), par prolongement d'une certaine application linéaire à valeurs dans un espace de variables aléatoires. Différentes techniques de prolongement peuvent être utilisées: prolongement continu, prolongement utilisant certaines approximations, prolongement utilisant l'existence d'une bonne désintégration. En particulier :

a) Si l'on considère le cadre (1-b), si l'on introduit un espace de fonctions mesurables sur X et le processus linéaire associé, et si l'on applique la méthode ci-dessus, on peut voir que l'on retrouve la méthode (due à L. Schwartz) évoquée ci-dessus.

b) Les raisonnements faits usuellement pour définir l'intégrale de Ito peuvent être interprétés dans ce cadre.

c) On peut donner des exemples de prolongement par continuité, permettant de définir, dans des cas nouveaux, des images de probabilités cylindriques.

(4) Pour effectuer cette étude, nous avons été amené à considérer des processus bilinéaires, basés sur des produits d'espaces vectoriels. Ces processus bilinéaires interviennent naturellement, lorsqu'on considère des processus linéaires basés sur des produits tensoriels ou des produits tensoriels complétés, (cas de processus basés sur des espaces de fonctions ou de distributions à valeurs vectorielles). Ils interviennent aussi quand on étudie les séries de fonctions à coefficients aléatoires. Ces processus sont étudiés au paragraphe 1; des exemples sont donnés au paragraphe 2. Au paragraphe 3, on donne trois méthodes générales permettant de définir l'accouplement de deux processus linéaires par une application bilinéaire : méthode directe, méthode du prolongement continu, méthode par approximation. De nombreux exemples d'accouplements définis par prolongement continu , sont donnés au paragraphe 4. Au paragraphe 5, on indique comment la méthode de prolongement continu permet de définir dans certains cas l'image d'une probabilité X.cylindrique par une application partiellement linéaire. Signalons que le problème de la définition de l'image d'une probabilité cylindrique par une application non linéaire est aussi considéré dans L. Gross [1] et I. Ségal [1],[2].

Je tiens à remercier Laurent Schwartz, dont les suggestions ont contribué au développement de ces recherches.

I - PROCESSUS BILINEAIRES, PROCESSUS LINEAIRES VECTORIELS.

(5) Notations.

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ désigne un espace probabilisé et A désigne un espace de Banach réel. $L^o(\Omega,A)$ désigne l'espace des classes d'équivalence de fonctions f Bochner-mesurables à valeurs dans A . $L^o(\Omega,A)$ est muni de la topologie de la convergence en probabilité. Comme f prend ses valeurs dans un sous espace fermé séparable de A , la loi de f est une probabilité de Radon sur l'espace complètement régulier A , muni de sa topologie faible ou forte. On introduit de même pour $p > 0$ la classe de Lebesgue $L^p(\Omega,A)$. On notera

$\mathcal{L}^p(A)$ l'espace non séparé associé à $L^p(\Omega,A)$, avec $p \in [0,+\infty]$. On appellera "A-variable aléatoire", ou A.v.a. toute classe $f \in L^0(\Omega,A)$; tandis qu'une A.v.a. précisée sera un élément $\tilde{f} \in \mathcal{L}^0(\Omega,A)$. Si $A = \mathbb{R}$, on posera $L^0(\Omega,A) = L^0(\Omega)$.

(6) Processus bilinéaires.

Soient U et V deux e.v. réels. Un processus bilinéaire $R = ((\Omega,\mathcal{B},P), R(u,v))$ basé sur $U \times V$ est la donnée d'une application bilinéaire R de $U \times V$, à valeurs dans $L^0(\Omega,\mathbb{R}) = L^0(\Omega)$.

(7) Exemples généraux.

a) Vue la propriété universelle du produit tensoriel, l'espace $(\Omega,\mathcal{B},P)$ étant fixé, il y a correspondance biunivoque entre les processus bilinéaires basés sur $U \times V$ et les processus linéaires basés sur $U \otimes V$. Et naturellement, tout processus linéaire défini sur un e.v. plus grand que $U \otimes V$ (par exemple un processus défini sur le complété de $U \otimes V$ pour une certaine topologie vectorielle), définit par restriction un processus sur $U \otimes V$, c'est à-dire un processus bilinéaire sur $U \times V$. On obtient ainsi la plupart des exemples usuels de processus bilinéaires.

b) Une autre classe importante de processus bilinéaires s'obtient de la façon suivante, à partir de la donnée d'un processus linéaire T sur le produit $U \times V$ de deux e.v. : on introduit les processus linéaires R et S.

(8)
$$\begin{array}{lll} U \xrightarrow{R} L^0(\Omega) & \qquad & V \xrightarrow{S} L^0(\Omega) \\ u \longmapsto T(u,0) & \qquad & v \longmapsto T(0,v) \end{array}$$

Comme $T(u,v) = T(u,0) + T(0,v) = R(u) + S(v)$, on écrit $T = R + S$.

A la donnée de T, c'est-à-dire à la donnée simultanée de deux processus linéaires R et S, on peut associer le processus bilinéaire :

$$\begin{array}{l} U \times V \longrightarrow L^0(\Omega) \\ (u\ ,\ v) \longmapsto R(u)\ S(v) \end{array}$$

Ce processus est noté $R \times S$. Ce processus bilinéaire est caractérisé par le processus linéaire :

$$U \otimes V \longrightarrow L^{o}(\Omega)$$
$$\sum_{j=1}^{n} u_j \otimes v_j \longmapsto \sum_{1}^{n} R(u_j)\ S(v_j)$$

Ce deuxième exemple général de processus bilinéaire joue un rôle fondamental dans la théorie des images des probabilités cylindriques par des applications bilinéaires.

Nous voyons donc que l'introduction de la notion de produit tensoriel permet d'appliquer aux processus bilinéaires toute la théorie des processus linéaires. On a donc la notion de transformée de Fourier, de composé avec une application linéaire..., de type, d'ordre, de processus décomposé, de probabilité.

(9) Définition.

Soit U un e.v. réel, et soit Y un espace de Banach.

a) Un processus linéaire R à valeurs dans Y, basé sur U est la donnée $R = ((\Omega, \mathcal{B}, P), R(u))$ d'une application linéaire R :

(10)
$$U \longrightarrow L^{o}(\Omega, Y)$$
$$u \longmapsto R(u)$$

b) Un processus linéaire vectoriel parfait est une application linéaire de U à valeurs dans $\mathcal{L}^{o}(\Omega, Y)$.

(11) Notons :

a) Si V est un e.v. en dualité séparante avec Y, alors tout processus linéaire vectoriel R basé sur U, à valeurs dans Y, permet de définir le processus bilinéaire :

(12)
$$U \times V \longrightarrow L^{o}(\Omega)$$
$$(u\ ,\ v) \longmapsto (R(u), v)$$

b) Réciproquement, soit B un processus bilinéaire basé sur $U \times V$. En général un tel processus ne provient pas d'un processus linéaire basé sur U, à valeurs dans Y. Si B provient d'un tel processus, on peut donc dire que B est "partiellement décomposé", ou plus précisément, qu'il est "Y.décomposé".

(13) Théorème, (existence d'un processus linéaire canonique).

Soit Y un espace de Banach. Tout processus linéaire $R = ((\Omega, \mathcal{B}, P), R(u))_{u \in U}$ à valeurs dans Y, basé sur U est isonome à un processus linéaire parfait :

$$R_c = ((\Omega_c, \mathcal{B}_c, P_c), K(u))_{u \in U})$$

basé sur $\Omega_c = U^* \otimes Y$, muni de la plus petite tribu $\mathcal{B}$ rendant mesurables les applications :

$$U^* \otimes Y \xrightarrow{K(u)} Y$$

$$\sum_{1}^{N} \theta_j \otimes y \longmapsto \sum_{1}^{N} (\theta_j, u)\, y_j$$

où u décrit U.

Preuve.

a) On suppose donné le processus R. Soit U_i un sous e.v. de dimension finie n de U. Soit (ε_j) une base de U_i et soit (e^j) la base duale de $(U_i)^*$. On voit que $R|U_i$ est connu dès que l'on connaît les v.a. $R_j = R(\varepsilon_j)$. Soit P_i l'image dans $U_i^* \otimes Y$ de la probabilité P sur Ω par l'application $\omega \xrightarrow{\alpha} \sum_{j=1}^{n} e^j \otimes (U(\varepsilon_j))(\omega)$. On voit que si $u = \sum_{j=1}^{n} u^j \varepsilon_j$, alors la loi de $R(u)$ coïncide avec l'image de P_i par $K(u)$:

$$m_u = (K(u))(P_i)$$

Si l'on fait un changement de base $(\varepsilon_j) \to (\varepsilon_{j'}$, on a $(e^j) \to (e^{j'})$ avec:

$$e^j = \Sigma\, a^j_{i'}\, e^{i'} \qquad \varepsilon_j = \Sigma\, a^{k'}_j\, \varepsilon_{k'}$$

$$\text{et } \Sigma\, e^j \otimes U(\varepsilon_j) = \sum_{j,k',i'} a^j_{i'}\, e^{i'} \otimes U(a^{k'}_j\, \varepsilon_{k'})$$

$$= \sum_{i',k'} (\sum_j a^j_{i'}\, a^{k'}_j)\, e^{i'} \otimes U(\varepsilon_{k'}) = \sum_{i',k'} \delta^{k'}_{i'}\, e^{i'} U(\varepsilon_{k'})$$

$$= \sum_{i'} e^{i'} U(\varepsilon_{i'})$$

Par conséquent la définition de P_i est indépendante de la base choisie dans U_i . Nous avons donc montré (13) si U est de dimension finie.

b) Soit $(U_i)_{i\in I}$ la famille des sous e.v. de dimension finie de U . Pour $U_i \subseteq U_{i'}$, onn note $p_{ii'}$ la surjection canonique de $U_{i'}^*$ sur U_i^* . Soit $q_{ii'} = p_{ii'} \otimes Id_Y$. On obtient ainsi un système projectif d'espaces probabilisés :

$$* \qquad ((U_i^* \otimes Y\ ,\ P_i), q_{ii'})_{i,i'\in I}$$

On applique alors au système projectif * le théorème de Bochner [1], ch.5. La limite projective des e.v. $U_i^* \otimes Y$ est $U^* \otimes Y$, les applications canoniques de la limite projective sur les facteurs étant les $q_i = p_i \otimes Id_Y$. On munit $U^* \otimes Y$ de la plus petite tribu rendant mesurables les q_i . Finalement, à partir de la donnée du processus vectoriel R , on a construit le processus canonique parfait R_c .

(14) Remarque.

Cette construction utilise seulement les P_i , de plus P_i est l'image de la loi conjointe μ de $U(\varepsilon_1) \ldots U(\varepsilon_n)$ par :

$$Y^n \longrightarrow U^* \otimes Y$$
$$(y_1 \ldots y_n) \longmapsto e^j \otimes y_j$$

Ainsi, R_c peut être construit si l'on connaît seulement les lois marginales du système des v.a. $R(u)$, u décrivant U .

(15) Probabilités "$Y \otimes$ cylindriques".

Soit X un e.v. en dualité séparante avec U . On munit X de la topologie faible. Soit $(X_i)_{i\in I}$ la famille des sous e.v. fermés de codimension finie de X . Comme $(X/X_i)' \sim X_i^{\perp}$ et comme l'application $X_i \to X_i^{\perp}$ établit une correspondance biunivoque entre la famille $(X_i)_{i\in I}$ et la famille $(U_i)_{i\in I}$, la preuve du théorème (13) permet de caractériser la classe d'isonomie du processus linéaire vectoriel R par un système projectif de probabilités de Radon sur les espaces $(X/X_i) \otimes Y$. On appelle un tel système projectif une probabilité "$Y \otimes$ cylindrique" sur $X \otimes Y$, (qu'il ne faut pas confondre avec les probabilités "X.cylindriques" introduites au paragraphe 5). On définit naturellement les opérations sur les processus linéaires vectoriels et les probabilités $Y \otimes$ cylindriques :

(16) Transformée de Fourier bilinéaire.

On peut définir la transformée de Fourier bilinéaire $\mathcal{F}\mathcal{B} R = \hat{\hat{R}}$ de R comme étant la fonction numérique définie sur $U \times V$ par :

$$\hat{R}(u,v) = \mathcal{F}\mathcal{B} R(u,v) = \mathcal{E}[\exp(-i R(u,v))]$$

ou par $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it} \, d\, m_{u,v}$, où $m_{u,v}$ est la loi de la v.a. $R(u,v)$. Si u est fixé, on voit que $\hat{\hat{R}}(u,.)$ est la transformée de Fourier du processus linéaire $\hat{R}(u,.)$; donc $\hat{\hat{R}}(u,.)$ est une fonction définie positive sur U. De même $\hat{\hat{R}}(.,v)$ est, pour tout v fixé, une fonction définie positive sur U. Les propriétés de continuité de $\hat{\hat{R}}(u,.)$ et $\hat{\hat{R}}(.,v)$ sont liées aux propriétés de continuité des processus linéaires $R(u,.)$ et $R(.,v)$. Notons les relations suivantes entre $\hat{\hat{R}}$ et $\hat{\tilde{R}}$:

$$\hat{\hat{R}}(u,v) = \hat{\tilde{R}}(u \otimes v)$$

$$\hat{R}\left(\sum_I^n u_j \otimes v_j\right) = \mathcal{E}\left(\prod_{j=1}^n e^{-iR(u_j,v_j)}\right)$$

Par conséquent $\hat{\hat{R}}$ caractérise la restriction de $\hat{R}$ à la partie de $U \otimes V$ formée par les tenseurs décomposables.

(17) Ordre et type.

a) Soit R un processus bilinéaire basé sur $U \times V$ et soit $\tilde{R}$ le processus linéaire associé : $U \otimes V \to L^0(\Omega)$. Soit $p \geq 0$. Soit θ une topologie vectorielle sur $U \otimes V$ et soit $E = U \otimes_\theta V$ l'e.v.t. correspondant. On dit que R est de type p si le processus linéaire $\tilde{R}$ est de type p.

b) Si R est de type 2, on peut définir :

- la moyenne : c'est l'élément de E' associé à la forme bilinéaire $u,v \to \mathcal{E}(R(u,v))$.

- la corrélation : c'est l'opérateur de E' dans E associé à la forme bilinéaire $(e_1, e_2) \to \mathcal{E}(\tilde{R}(e_1)\ \tilde{R}(e_2))$.

- la covariance : c'est la corrélation du processus linéaire centré associé à $\tilde{R}$.

c) On suppose que tous les espaces vectoriels considérés sont des espaces de Banach. Une probabilité de Radon m sur $X \otimes A$, munie d'une norme tensorielle θ, est dite d'ordre p (avec $p > 0$) si :

$$\| m \|_p^{oo} = \Big(\int_{X \otimes_\theta A} \| t \|^p \, dm(t) \Big)^{1/p} < \infty$$

Le processus bilinéaire R est de type p (> 0) si :

$$\| m \|_p^{tt} = \sup_{\substack{|u| \leq 1 \\ |v| \leq 1}} \Big(\int |t|^p \, dm_{u,v} \Big)^{1/p} < \infty$$

où $m_{u,v}$ est la loi de $R(u,v)$.

(18) <u>Ordre et type partiels.</u>

Soit $p > 0$. Soit R un processus linéaire basé sur U , à valeurs dans Y . On dit que R est de type p si :

$$\| m \|_p^{to} = \sup_{|u| \leq 1} \Big(\int_Y \| y \|^p \, dm_u \Big)^{1/p}$$

où m_u est la loi de $R(u)$. Il serait intéressant d'étudier les applications partiellement p.radonifiantes, ou p.radonifiantes du genre $a \otimes b$, où $a : X_1 \to X_2$ et $b : Y_1 \to Y_2$ auraient des propriétés données. Notons à ce sujet le résultat suivant .

(19) Généralisation vectorielle du théorème de Pietsch.

Soient E et F deux espaces de Banach, et soit a, une application p.sommante ($p > 0$) de E dans F). Soit μ une mesure bornée positive sur la tribu de Baire de l'e.t. I . Alors l'application suivante est p.sommante:

$$\mathcal{C}^{o}(I,E) \xrightarrow{\ i\ } L^{p}(I,F)$$
$$u(.) \longmapsto a(u(.))$$

Démonstration.

Pour tout n , quels que soient $u_1 \dots u_n$ dans $\mathcal{C}^{o}(I,E)$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} (\| a \circ u_j \|_{L^{p}(I,E)})^{p} = \int_I dt \sum_{j=1}^{n} (|a \circ u_j(t)|_F)^{p}$$

Comme l'application a est p.sommante, de E dans F , on a :

$$\leq C \int_I dt \ (\sup_{|e'| \leq 1} \sum_{j=1}^{n} |(u_j(t), e')|^{p})$$

$$\leq C \int_I dt \sup_{|e'| \leq 1} \sum_{j=1}^{n} |(\delta_t \otimes e', u_j)|^{p}$$

Comme $\delta_t \otimes e'$ (pour tout t de I et pour tout e' de la boule unité de E') appartient à la boule unité du dual de $\mathcal{C}^{o}(I,E)$, on a :

$$\leq C \int_I dt \sup_{\|\ell\| \leq 1} \sum_{j=1}^{p} |(\lambda, u_j)|^{p}$$

Finalement $$\sum_{j=1}^{p} (\| a \circ u_j \|_{L^{p}(I,E)})^{p} \leq C' \sup_{\|\ell\| \leq 1} \sum_{j=1}^{n} |(\ell, u_j)|^{p}$$

et l'application i est p.sommante.

(20) Remarque.

On a encore le même résultat si l'on remplace :

- a par une application $t \to a(t)$, μ-Lusin mesurable de I à valeurs dans $\Pi_p(E,F)$ avec $\sup_t \|a(t)\|_{\Pi_p} < \infty$

- si l'on remplace i par l'application $u(.) \to a(.)(u(.))$.

(21) Corollaire.

Soient X et Y deux espaces de Banach, l'injection de X dans Y étant p.sommante. Soit u une application linéaire continue d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F . Soit μ une mesure positive bornée sur la tribu de Baire de l'espace topologique I . Supposons qu'il existe une application linéaire continue v de E dans un espace $\mathcal{C}^0(I,X)$, telle que :

$$\exists C > 0 \qquad \forall e \in E \qquad \| u(e) \|_F \leq \| v(e) \|_{L^p(I,Y)}$$

Alors l'application u est p.sommante.

En effet :

$$\sum_{j=1}^{n} |u(e_j)|^p \leq C \sum_{j=1}^{n} (\| v(e_j) \|_{L^p(I,Y)})^p$$

Comme l'injection de $\mathcal{C}^0(I,X)$ dans $L^p(I,Y)$ est p.sommante, il vient :

$$\leq C' \sup_{\| \ell \| \leq 1} \sum_{j=1}^{p} |(\ell, v(e_j))|^p$$

Introduisant la transposée v' de $v : E \to \mathcal{C}^0(I,X)$, on obtient :

$$\leq C'' \sup_{\| \ell \| \leq 1} \sum_{j=1}^{p} |(v'(\ell), e_j)|^p$$

Lorsque ℓ décrit la boule unité du dual de $\mathcal{C}^0(I,X)$, $v'(\ell)$ décrit un borné de E' . Donc u est p.sommante.

II - EXEMPLES DE PROCESSUS BILINEAIRES ET DE PROCESSUS LINEAIRES VECTORIELS.

Les notions de processus bilinéaires et de processus linéaires vectoriels sont des cas particuliers de processus linéaires. Cependant, les exemples qui suivent montrent l'intérêt d'introduire ces nouvelles définitions pour l'étude de processus linéaires basés sur des produits tensoriels ou des produits tensoriels complétés. Physiquement, les processus stochastiques correspondants sont des processus à valeurs vectorielles.

A - Séries de fonctions à coefficients aléatoires.

Soit $f_1 \ldots f_n$ une suite de fonctions numériques, définies sur un ensemble donné I (on peut aussi supposer que I est une variété, et que les f_i sont des fonctions généralisées). Soit (X_n) une suite de v.a. et soit (c_n) une suite de coefficients. Alors $\sum_1^\infty c_n X_n f_n$ est une série de fonctions à coefficients aléatoires. On s'intéresse à la propriété d'appartenance presque sûre de cette série à un e.v.t. F admettant le système des f_i comme un système total. Notons $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites (c_n) de nombres réels qui sont tous nuls sauf au plus un nombre fini, et notons D le sous espace de F engendré par les f_n. Il est naturel d'introduire les processus linéaires vectoriels :

$$D \longrightarrow L^0(\Omega,F) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \longrightarrow L^0(\Omega,F)$$

$$\Sigma\, c_n f_n \longmapsto \Sigma\, c_n X \qquad\qquad (c_n) \longmapsto \Sigma\, c_n X_n f_n$$

De même que la théorie des processus linéaires basés sur des espaces de suites permet l'étude des séries numériques à coefficients aléatoires, la théorie des processus vectoriels permet l'étude des séries de fonctions à coefficients aléatoires : voir Krée [5].

B - Mouvement brownien à valeurs dans un espace de Hilbert réel E .

Si H et K sont deux espaces de Hilbert, on note $H \underset{2}{\otimes} K$ l'espace vectoriel $H \otimes K$ muni de la structure préhilbertienne canònique. On note $h \underset{2}{\hat{\otimes}} K$ le complété de cet espace.

Soit $I = [0,1]$ et soit E un espace de Hilbert réel. Soit ${}_oH^1(I)$ le sous espace de l'espace de Sobolev $H^1(I)$, formé par les fonctions nulles à l'origine. On sait que l'opérateur d'intégration J :

$$f \to g \qquad \text{avec} \quad g(t) = \int_o^t f(\theta)\, d\theta$$

réalise un isomorphisme de $H = L^2(I,E)$ sur ${}_oH^1(I,E) \simeq {}_oH^1(I) \underset{2}{\hat{\otimes}} E$. Un mouvement brownien sur H , paramétré dans I , est tout processus B associé à $J(m)$, où m est la probabilité cylindrique gaussienne canonique sur H . Soit F un espace de Banach réflexif contenant E , l'injection de E dans F étant supposée p.sommante. Pour $0 < \theta < \frac{1}{2}$, on introduit :

$$\mathcal{C}^\theta(I,F) = \{u : I \to F, \quad \sup_{x \text{ et } y \in I} \frac{\|u(x) - u(y)\|_F}{|x-y|^\theta} < \infty \}$$

Montrons qu'il existe une version de B dont les trajectoires appartiennent presque sûrement à F . Soit G_a la distribution sur $\mathbb{R}$ de transformée de Fourier $\hat{G}_a(u) = (1+u^2)^{-a/2}$. En utilisant les techniques et les notations de Schwartz [1] chapitre 14, on factorise de la manière suivante l'injection i de $H^1(I,E)$ dans $\mathcal{C}^\theta(I,E)$:

$$H^1(I,E) \xrightarrow{(G_{-\frac{1}{2}+\varepsilon})^*} H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(I,E) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(I,E)$$

$$\xhookrightarrow{\ j\ } L^p(I,F) \xrightarrow{(G_{\frac{1}{2}+\varepsilon})^*} \mathcal{C}^\theta(I,F)$$

Vu (19), l'injection j est p.sommante. La dernière application est continue pour $\theta = \frac{1}{2} - \varepsilon - \frac{1}{p}$ d'après la variante vectorielle naturelle du théorème de Krylov-Sobolev. Finalement, on a montré que l'injection de H $H^1(I,E)$ dans $\mathcal{C}^\theta(I,F)$ est p.sommante, donc p.radonifiante. Comme les probabilités cylindriques de Gauss sont de type p pour tout p fini, on peut prendre θ arbitrairement proche de 1/2, $(0 < \theta < 1/2)$.

(22) <u>Remarque</u>.

Voici une variante de ce résultat. Supposons que $t \to R(t)$ est une application Lusin.mesurable de I à valeurs dans $\mathcal{L}_{HS}(E)$, telle que :

$$\sup_t |||R(t)||| < \infty$$

où l'on a noté $|||\ .\ |||$ la norme dans l'espace $\mathcal{L}_{HS}(E)$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt de l'espace de Hilbert E . On introduit alors la probabilité cylindrique gaussienne canonique de E : p admet pour transformée de Fourier :

... / ....

$$f \to \hat{p}(f) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 \| R(t)\ f(t) \|^2\, dt\right)$$

Alors tout processus de la classe de $J(p)$ admet une version dont les trajectoires appartiennent presque sûrement à $\mathcal{C}^{\theta}(I,E)$. Pour démontrer ce résultat, il suffit de modifier ainsi la factorisation $*$:

$$L^2(I,E) \xrightarrow{J} H^1(I,E) \xrightarrow{(G_{\eta-\frac{1}{2}+\varepsilon})^*} H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(I,E) \hookrightarrow \mathcal{C}^{o}(I,E)$$
$$\xrightarrow{k} L^p(I,E) \xrightarrow{(G_{\eta-\frac{1}{2}+\varepsilon})^*} \mathcal{C}^{\theta}(I,E)$$

où k est l'application : $f(.) \to R(.)\ f(.)$. Comme k est p.sommante, on voit que l'application composée $\tilde{i}$ est p.radonifiante. Comme $\tilde{i}(m)$ coïncide avec l'image q de p par l'injection de $H^1(I,E)$ dans $\mathcal{C}^{o}(I,E)$, et comme $\tilde{i}(m)$ est de Radon, q est de Radon.

D - Processus linéaire associé à deux processus gaussiens indépendants.

Soient H et K deux espaces de Hilbert réels. Soient $A \in \mathcal{L}(H)$, $B \in \mathcal{L}(K)$. Soit T un processus linéaire sur $H \times K$ de transformée de Fourier :

$$(h,k) \to \hat{q}(h,k) = \exp\left(-\frac{1}{2}\| Ah \|^2 - \frac{1}{2}\| Bk \|^2\right)$$

Vu (7-b), on peut écrire $T = R + S$ où R et S sont indépendants. On se propose d'étudier le processus bilinéaire $R \times S$ basé sur $H \times K$, et le processus linéaire $R \otimes S$ correspondant basé sur $H \otimes K$.

(23) <u>Lemme</u>.

Notons $N(a,b^2)$ la loi normale de moyenne a et de variance b^2. Soient X et Y deux v.a.i. suivant des lois normales $N(0,\lambda^2)$ et $N(0,\mu^2)$. Alors la loi m de $Z = XY$ a pour transformée de Fourier :

$$u \to \hat{m}(u) = (1+\lambda^2\mu^2u^2)^{-1/2}$$

Preuve.

$$\hat{m}(u) = \mathcal{E}(e^{-iuUV}) = \sum_0^\infty \frac{(-iu)^k}{k!}\mathcal{E}(U^k V^k)$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-iu)^k}{k!}\mathcal{E}(U^k)\ \mathcal{E}(V^k) = \sum_0^\infty \frac{(-iu)^k}{k!} m_k(X)\ m_k(Y)$$

où $m_k(X)$ est le moment d'ordre k de la loi de X :

$$m_k(X) = \frac{(2k)!\ \lambda^{2k}}{2^k\ k!} \qquad \text{De même } m_k(Y) = \frac{(2k)!\ \mu^{2k}}{2^k(k!)}$$

$$\text{D'où } \hat{m}(u) = \sum_0^\infty (-1)^k \left(\frac{\lambda^2\mu^2u^2}{4}\right)^k \frac{(2k)!}{(k!)^2} = (1+\lambda^2\mu^2u^2)^{-1/2}$$

(24) <u>Lemme</u>.

Supposons $A'A$ et $B'B$ compacts; il existe donc des suites $(\lambda_i)_i$, $(\mu_j)_j$ tendant en décroissant vers zéro, des systèmes orthonormés $(h_i)_i$ et $(k_j)_j$ de H et K respectivement tels que :

$$A'A = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i\ h_i \otimes h_i \qquad B'B = \sum_{j=1}^\infty \mu_j\ k_j \otimes k_j$$

a) Pour tout élément $t = \sum_{i=1}^N t_i\ h_i \otimes k_i$ de $H \otimes K$, on a :

$$\widehat{R \otimes S}(t) = \prod_{j=1}^N (1 + \lambda_j^2\ \mu_j^2\ t_j^2)^{-1/2}$$

b) $R \otimes S$ se prolonge en un processus continu sur $H \hat{\underset{2}{\otimes}} K$

Démonstration.

a) Comme les v.a. $R(h_i)$, $S(k_j)$ sont normales et indépendantes dans leur ensemble, la transformée de Fourier de $(R \otimes S)(t)$ est :

$$u \to \mathcal{E} \exp(- iu \sum_{j=1}^{N} t_j\, R(h_j)\, S(k_j))$$

$$= \mathcal{E}\,[\prod_{j=1}^{N} \exp(- iu\, t_j\, R(h_j)\, S(k_j))] = \prod \mathcal{E}[\exp(- iu\, t_j\, R(h_j)\, S(k_j))]$$

$$= \prod_{j=1}^{N} (1 + \lambda_j^2\, \mu_j^2\, t_j^2\, u^2)^{-1/2}$$

D'où l'expression annoncée pour $\widehat{R \otimes S}$.

b) $\widehat{R \otimes S}$ est une fonction continue sur $H \underset{2}{\otimes} K$. Donc $\widehat{R \otimes S}$ se prolonge par continuité à $H \hat{\underset{2}{\otimes}} K$, et c'est la transformée de Fourier d'un processus continu T . Notons que ce processus a une importance pratique et qu'il est construit de façon très simple à partir de deux processus gaussiens indépendants.

III - METHODES GENERALES POUR DEFINIR L'ACCOUPLEMENT DE DEUX PROCESSUS LINEAIRES PAR UNE APPLICATION BILINEAIRE.

3. A. Les données du problème.

Soient $X - U$, $Y - V$, et $Z - W$ trois couples d'e.v. réels en dualité séparante. On munit ces e.v. des topologies faibles. On donne simultanément deux processus linéaires R et S basés sur U et V respectivement : on donne donc le processus $R + S$ basé sur $U \times V$. Soit m la probabilité cylindrique sur $X \times Y$ associée au processus $R + S$ et soient m_1 et m_2 les projections canoniques de m . Soit β une application bilinéaire séparément continue de $X \times Y$ à valeurs dans Z . On cherche à définir l'image $\beta(m)$ de m par β : c'est une probabilité cylindrique sur Z . On va définir $\beta(m)$ à l'aide du processus linéaire associé T basé sur W . Ce processus est appelé l'accouplement des processus R et S et l'on pose $T = \beta(R,S)$.
On introduit le processus bilinéaire $R \times S$ et le processus linéaire $R \otimes S$.

$$U \times V \xrightarrow{R \times S} L^0(\Omega) \qquad\qquad U \otimes V \xrightarrow{R \otimes S} L^0(\Omega)$$

$$(u\ ,\ v) \longmapsto R(u)\ S(v) \qquad\qquad \sum_1^n u_j \otimes v_j \longmapsto \sum_1^n R(u_j)\ S(v_j)$$

Comme $X \otimes Y$ est naturellement en dualité séparante avec $U \otimes V$, le processus $R \otimes S$ définit une probabilité cylindrique sur $X \otimes Y$. On va utiliser la factorisation canonique $\beta = \tilde{\beta} \circ s$ de β :

(25)
$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ X \otimes Y \arrow[r, "\tilde{\beta}"'] & Z \end{tikzcd}$$

On note $s(m)$ la probabilité cylindrique sur $X \otimes Y$ associée au processus $R \otimes S$.

On utilise la terminologie suivante :

Supposons donnés deux couples A-C et B-D d'espaces vectoriels en dualité séparante et une application linéaire ℓ de A à B . On dit que ℓ est transposable de D à C si ℓ est continue pour les topologies faibles $\sigma(A,C)$ et $\sigma(B,D)$ et l'on définit ainsi la transposée ℓ' de ℓ :

$$\begin{aligned} D &\xrightarrow{\ \ell'\ } C \\ d &\longmapsto d \circ \ell \end{aligned}$$

On rappelle que si μ est une probabilité cylindrique sur A muni de la topologie $\sigma(A,C)$, on peut définir l'image $\ell(\mu)$ sur B , muni de la topologie $\sigma(B,D)$, si et seulement si ℓ est transposable de D à C .

3. B. Méthode directe.

> Si $\tilde{\beta}$ est transposable de W à $U \otimes V$ on pose :
>
> $$T = \beta(R,S) = (R \otimes S) \circ (\tilde{\beta})' \quad \text{et} \quad \beta(m) = \tilde{\beta}(s(m))$$
>
> et l'on dit que $\beta(R,S)$ et $\beta(m)$ sont définis directement.

Donnons un exemple où l'accouplement par β des processus R et S peut être défini directement :

Proposition.

Supposons dim X $< \infty$. Alors l'accouplement par β des processus linéaires R et S est défini directement.

Preuve:

Soit (e_j) une base de X et soit (ε_j) la base duale de U . Tout $x \in X$ s'écrit $x = \sum_1^n x_i\, e_i$ avec $x_i = (x,e_i)$. Pour tout $x \in X$, $\beta_x(.)$

désigne l'application linéaire $\beta(x,.)$ de Y dans Z. Nous avons :

$$\forall y \in Y \quad \forall w \in W \; ; \quad (\beta(e_j,y),w) = (\beta_{e_j}(y),w) = (y,\beta'_{e_j}(w))$$

Par conséquent $w \circ \beta$ est la forme bilinéaire ;

$$(x,y) \to (\beta(x,y),w) = \sum_{j=1}^{n} x_j(\beta(e_j,y),w) = \sum_{j=1}^{n} (x,\varepsilon_j)(y,\beta'_{e_j}(w))$$

L'application linéaire $\tilde{\beta}$ associée à β a donc pour transposée $\tilde{\beta}'$:

$$w \to \sum_{1}^{n} \varepsilon_j \otimes \beta'_{e_j}(w) \; .$$

$$\text{D'où} \quad T(w) = \sum_{j=1}^{n} R(\varepsilon_j) \; S(\beta'_{e_j}(w))$$

(28) Exemple.

a) Soit $X = Y = U = V = L^2(I)$ avec $I =]0,1[$.

Soit $n > 0$. Soit X^n le sous espace vectoriel de $L^2(I)$ engendré par $k_0^n \ldots k_{n-1}^n$, où k_j^n est la fonction caractéristique de $]j/n, j+1/n[$. On se donne simultanément un processus généralisé S sur I , (représenté par une probabilité cylindrique μ_2 sur $L^2(I)$), et un processus R^n dont les trajectoires sont du type $f = \sum_{i=v}^{n-1} R_i^n k_i^n$, les R_i^n étant des v.a.

Soit μ^n la probabilité cylindrique sur $X \times X$ associée à la donnée simultanée de ces deux processus. Alors l'image de μ^n par l'application bilinéaire :

$$\begin{aligned} X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f , g) &\longmapsto \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \end{aligned}$$

peut être définie en appliquant (27), (bien que $\dim X = +\infty$!), parce que R^n est basé sur X^n . On a :

$$\int_0 R^n \, dS = \int_0 R^n(t) \; S(t) \, dt = \sum_{i=0}^{n-1} U_i^n \; V(k_i^n)$$

En particulier si $S = \frac{dB}{dt} = B$, où B est une version du mouvement brownien sur I , on obtient :

$$\int_0^1 R^n\, dB = \sum_{i=0}^{n-1} R_i^n \left(B\left(\frac{i+1}{n}\right) - B\left(\frac{i}{n}\right)\right)$$

ce qui correspond à la définition usuelle des intégrales stochastiques.

b) Soit t fixé dans $[0,1]$, on peut définir dans des conditions analogues :

(30) $$\int_0^t R^n\, dB = \sum_{i<[nt]} R_i^n \left(B\left(\frac{i+1}{n}\right) - B\left(\frac{i}{n}\right)\right) + R^n_{[nt]}\left(B(t) - B\left(\frac{[nt]}{n}\right)\right)$$

c) Supposons t variable. Comme $\int_0^t R^n\, dB$ dépend continuement de t (en moyenne d'ordre 2), on voit que le processus T^n :

$t \to \int_0^t R^n\, dB$ définit un processus linéaire sur $\mathcal{M}(I)$, ou une probabilité cylindrique sur $\mathcal{E}^o(I)$. Le processus T^n est le résultat de l'accouplement des processus R^n et $\dot{B}$ par l'application bilinéaire :

(31) $$\begin{aligned} X \times X &\longrightarrow \mathcal{E}^o(I) \\ (f\ ,\ g) &\longmapsto \left(t \to \int_0^t f(\theta)\, g(\theta)\, d\theta\right) \end{aligned}$$

3.C. <u>Méthode par prolongement linéaire continu.</u>

Munissons $L^o(\Omega)$ de la topologie de la convergence en probabilité.

(32) Supposons qu'il existe un e.v.t. séparé G_θ tel que :

a) G contient $U \otimes V$, et $U \otimes V$ est dense dans G_θ.

b) Le processus $R \otimes S : U \otimes V \to L^o(\Omega)$ admet un prolongement linéaire continu : $\overline{R \otimes S} : G_\theta \to L^o(\Omega)$

c) G est en dualité séparante avec $X \otimes Y$.

d) L'application linéaire $\tilde{\beta}$ est transposable de Z à G.

On pose alors :

(33) $$\beta(m) = \tilde{\beta}(s(m)) \quad \text{et} \quad T = (\overline{R \otimes S}) \cdot (\tilde{\beta})'$$

(34) Exemple.

a) On suppose que R et S sont de type p_1 et p_2 respectivement avec $p_1^{-1} + p_2^{-1} = 1$, et que U et V sont munis de topologies localement convexes complètes. Vue l'inégalité de Hölder, le processus bilinéaire $R \times S$ est de type 1. Vue la définition de la topologie π, $R \otimes S$ est continu de $U \otimes_\pi V$ à valeurs dans $L^1(\Omega)$. Par conséquent $R \otimes S$ se prolonge par continuité au produit tensoriel complété et l'on peut prendre $G_\theta = U \hat{\otimes}_\pi V$, à condition que $\tilde{\beta}$ soit faiblement continue de $X \otimes Y$ (supposé en dualité séparante avec $U \hat{\otimes}_\pi V$) à valeurs dans Z.

b) Dans le cas plus particulier où U et V sont des espaces de Fréchet, on pourra vérifier que ces conditions sont satisfaites en utilisant la représentation sous forme de série d'un élément de $U \hat{\otimes}_\pi V$

$$t = \sum_1^\infty \lambda_n u_n \otimes v_n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n| < \infty ,$$

les suites (u_n) et (v_n) tendant vers zéro.

3.D. Méthode par approximation.

(35) Supposons qu'on a une famille filtrée $(R^j + S^j)$ de processus linéaires sur $U \times V$, cette famille étant telle que :

a) $(R^j + S^j)$ converge cylindriquement vers $R + S$.

b) L'accouplement $T^j = \beta(R^j, S^j)$ est défini directement (c'est-à-dire par la méthode directe).

c) $(T^j)_j$ converge cylindriquement vers un processus linéaire T.

On pose alors $T = \beta(R, S)$ et on définit $\beta(m)$ comme étant la probabilité cylindrique sur Z, associée à T.

(36) Exemple.

a) L'intégrale stochastique de Ito $t \to \int_0^t R\, d\, B$ est en fait définie par la méthode d'approximation. En effet, soit R un processus sur $I = [0,1]$, représenté par une v.a. f à valeurs dans $X = L^2(I)$ et dont la loi est une mesure de probabilité sur X . On suppose que R vérifie les hypothèses habituelles : voir par exemple Mac Kean [1] ou Gikman-Skorokhod [2]. Pour tout entier positif n , notons Q^n l'opérateur linéaire "non anticipé" :

$$X \longrightarrow X$$

$$f(.) \longmapsto \sum_{1}^{n-1} n^{-1} k_i^n(.) \int_{(i-1)/n}^{i/n} f(\theta)\, d\theta$$

et introduisons le processus linéaire sur X associé à la v.a. $R^n = Q^n \circ R$. Vu (28 b et c) on sait définir le processus $T^n : t \to \int R^n\, d\, B$, résultat de l'accouplement par l'application bilinéaire (31) des processus R^n et $\dot{B}$. Ito a montré que T^n converge cylindriquement vers une limite T lorsque n tend vers l'infini. Cette limite est alors le résultat de l'accouplement des processus R et $\dot{B}$ par (31).

b) Lorsque la fonction R(.) est déterministe, on dit en général que T est une intégrale de Wiener. La définition de T , dans ce cas, ne requiert pas de procédure d'approximation et se définit élémentairement : T est le composé de B avec l'application linéaire continue :

(37)
$$L^2 \longrightarrow \mathcal{C}^o$$

$$f \longmapsto \left(t \to \int_0^t R(\theta)\, f(\theta)\, d\, \theta\right)$$

c) On peut interpréter de la même manière les raisonnements de I.O. Daleckii [1] et [2], qui permettent de définir une intégrale de Ito vectorielle.

(38) Remarque.

a) Il faut noter la différence entre le point de vue des probabilités cylindrique (ou classe d'isonomie de processus linéaires) et le point de vue des processus linéaires. Dans le deuxième point de vue, l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ est fixé, et l'on cherche à définir des variables aléatoires. Dans le premier point de vue, l'espace probabilisé n'est pas fixé. Les définitions qui précèdent ont donc un intérêt ~~doublé~~ en théorie des probabilités.

b) Les trois procédés indiqués ci-dessus s'appliquent de façon non contradictoire dans des situations de plus en plus générales. En effet :

- Si $R + S$ est représenté par une probabilité de Radon m sur $X \times Y$, on voit à l'aide de la factorisation (25) de β que la probabilité cylindrique $s(m)$ coïncide avec l'image par s de la probabilité m. Finalement, $\beta(m)$ est alors l'image de la probabilité m par β.

- Il est clair que 3.C. prolonge 3.B.

- La méthode 3.D. prolonge la méthode 3.C: ceci résulte du fait que l'application $R,S \to T$ définie en 3.C. est continue pour la topologie cylindrique.

IV - EXEMPLE D'ACCOUPLEMENT PAR LA METHODE DU PROLONGEMENT CONTINU.

4.A. Images pour des espaces du type $\mathcal{C}^o(K)$.

Soit K un espace compact et soit $\mathcal{C}^o = \mathcal{C}^o(K)$ l'espace de Banach des fonctions numériques définies et continues sur K. Soit $\mathcal{M} = \mathcal{M}(K)$ l'ensemble des mesures de Radon sur K. On a $\mathcal{M}(K) = (\mathcal{C}^o(K))'$. On prend deux exemplaires $\mathcal{C}^o_x$ et $\mathcal{C}^o_y$ de $\mathcal{C}^o(K)$; et l'on note $\mathcal{M}_x$ et $\mathcal{M}_y$ les espaces duals. On note $\mathcal{C}^o_{xy}$ l'espace des fonctions continues sur $K_x \times K_y$ et $\mathcal{M}_{xy}$ l'ensemble des mesures de Radon sur $K_x \times K_y$.

(39) Proposition.

Soit m une probabilité cylindrique sur $\mathcal{C}^o \times \mathcal{C}^o_x$ dont les projections canoniques sont de type 2. Soit β l'application bilinéaire :

$$\mathcal{C}^o \times \mathcal{C}^o \xrightarrow{\beta} \mathcal{C}^o$$

$$(f\ ,\ g) \longmapsto fg$$

Alors $\beta(m)$ est une probabilité cylindrique de type 1 sur $\mathcal{C}^o$, (en dualité séparante avec $\mathcal{M}$).

(40) Lemme.

$$\mathcal{M}_x \hat{\otimes}_\pi \mathcal{M}_y = \mathcal{M}_{xy}$$

Preuve du lemme.

On a une injection isométrique :

$$\mathcal{M}_x \otimes_\pi \mathcal{M}_y \subseteq (\mathcal{C}_x \otimes_\varepsilon \mathcal{C}_y)'$$

Or on a $\quad (\mathcal{C}_x \otimes_\varepsilon \mathcal{C}_y)' = (\mathcal{C}_x \hat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{C}_y)' = \mathcal{C}'_{xy} = \mathcal{M}_{xy}$

Donc $\quad \mathcal{M}_x \otimes_\pi \mathcal{M}_y \subseteq \mathcal{M}_{xy}$

Le théorème du bipolaire appliqué aux mesures simples $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \, \delta_{x_j} \otimes \delta_{y_j}$, $(\lambda_i \in \mathbb{R},\ x_j \in X,\ y_j \in Y)$, montre que $\mathcal{M}_x \otimes \mathcal{M}_y$ est dense dans $\mathcal{M}_{xy}$. Par conséquent le complété du sous espace $\mathcal{M}_x \otimes_\pi \mathcal{M}_y$ dense dans l'espace de Banach $\mathcal{M}_{xy}$, coïncide avec $\mathcal{M}_{xy}$.

<u>Preuve de la proposition (39).</u>

On sait que pour toute $\mu \in \mathcal{M}(K)$, la forme bilinéaire :

$$\mathcal{C}^o(K) \times \mathcal{C}^o(K) \xrightarrow{\beta(\mu)} \mathbb{R}$$
$$(f\ ,\ g) \longmapsto \int f\ g\ d\mu$$

est intégrale. Par conséquent la forme linéaire $\tilde{\beta}(\mu)$ sur $\mathcal{C}^o(K) \otimes \mathcal{C}^o(K)$ qui est associée à $\beta(\mu)$ est continue pour la topologie ε . L'application linéaire $\breve{\beta}$ associée à l'application bilinéaire β est donc transposable de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}_x \hat{\otimes}_\pi \mathcal{M}_y = \mathcal{M}_{xy}$:

$$\mathcal{C}^o \otimes \mathcal{C}^o \xrightarrow{\tilde{\beta}} \mathcal{C}^o$$
$$\mathcal{M}_x \otimes_\pi \mathcal{M}_y \xleftarrow{\tilde{\beta}'} \mathcal{M}$$

Par conséquent $\beta(m)$ est une probabilité cylindrique de type 1 sur $\mathcal{C}^o$, en dualité séparante avec $\mathcal{M}$.

<u>Comparaisons de (39) aux résultats connus.</u>

Soit μ une mesure de Radon positive fixée sur K . Vus les résultats des chapitres 11 et 12 de L. Schwartz [1], et vu le théorème de Prokhoroff, l'application identique de $\mathcal{C}^o \times \mathcal{C}^o$ dans $L^2_\mu \times L^2_\mu$ transforme m en une mesure de Radon m' sur $L^2_\mu \times L^2_\mu$.

Notons que β se prolonge en une application β bilinéaire continue de $L^2_\mu \times L^2_\mu$ dans L^1_μ , qui transforme m' en une mesure de Radon n' sur L^1_μ . Vue la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}^0 \hat{\otimes}_{\varepsilon} \mathcal{C}^0 \arrow[r] & \mathcal{C}^0 \arrow[d, hook] \\
\mathcal{C}^0 \times \mathcal{C}^0 \arrow[ur] \arrow[r, hook] & L^2_\mu \times L^2_\mu \arrow[r] & L^1_\mu
\end{tikzcd}$$

m' est l'image de $\beta(m)$ par l'injection de $\mathcal{C}^0$ dans L^1_μ. Finalement, la proposition (39) a permis de montrer que n' se relevait en une probabilité cylindrique $\beta(m)$ de type 1 sur $\mathcal{C}^0$. Ceci ne résulte pas de la théorie usuelle des probabilités cylondriques, parce que $\mathcal{M}$ et L^1_μ ne sont pas en dualité séparanté.

(41) Variantes.

a) On peut définir l'image d'une probabilité cylindrique sur $(\mathcal{C}^0)^3$; dont chaque projection est de type 3 , par l'application $(f,g,h) \to fgh$.

b) En composant (par devant) cette application avec l'application linéaire continue :

$$\mathcal{C}^0 \longrightarrow (\mathcal{C}^0)^3$$
$$f \longmapsto (f,f,f)$$

on voit que l'on peut définir l'image par $f \to f^3$ d'une probabilité cylindrique de type 3 sur $\mathcal{C}^0$.

4.B. Accouplement par convolution.

(42) Proposition.

Le tore $\mathbb{T}$ est muni de la mesure $\mu = \frac{d\theta}{2\pi}$. Soit m une probabilité cylindrique sur $L^1_\mu \times L^1_\mu$, en dualité séparante avec $L^\infty_\mu \times L^\infty_\mu$. On suppose que les deux projections canoniques m_1 et m_2 de m sont de type 2. Soit $s > \frac{1}{2}$ et soit β l'application bilinéaire :

$$L^1_\mu \times L^1_\mu \longrightarrow H^{-s}(\mathbb{T})$$
$$(f\ ,\ g) \longmapsto f * g$$

Alors on peut définir la probabilité cylindrique $\beta(m)$ sur $H^{-s} = H^{-s}(\mathbb{T})$, en dualité séparante avec $H^{s}(\mathbb{T})$. De plus $\beta(m)$ est de type 1.

Démonstration.

On développe les fonctions en série de Fourier :

$$f \sim \sum_n f_n e^{in\theta} \quad \text{et} \quad g \sim \sum_n g_n e^{in\theta} \Longrightarrow f * g \sim \sum_n f_n g_n e^{in\theta}$$

On rappelle la définition de $H^s(\mathbb{T})$:

$$H^s(\mathbb{T}) = \{h \sim \sum_n h_n e^{in\theta} \; ; \; \sum_n (1+n^2)^s |h_n|^2 < \infty\}$$

Pour tout $\lambda \in H^{-s}(\mathbb{T})$, on a :

$$(\lambda, \beta(f,g)) = \sum_n \lambda_{-n} f_n g_n = \sum_n (1+n^2)^{2\varepsilon} \lambda_{-n} \frac{f_n}{(1+n^2)^{\varepsilon}} \frac{g_n}{(1+n^2)^{\varepsilon}}$$

Notant $\tilde{\beta}$ l'application linéaire associée à β, on a :

$$\lambda \circ \tilde{\beta} = \sum_n (1+n^2)^{2\varepsilon} \lambda_{-n} \frac{e^{in\theta}}{(1+n^2)^{\varepsilon}} \otimes \frac{e^{in\theta}}{(1+n^2)^{\varepsilon}}$$

Vu (34.b), on aura donc $\lambda \circ \tilde{\beta} \in L^{\infty} \hat{\otimes}_{\pi} L^{\infty}$ si :

$$\sum_n (1+n^2)^{2\varepsilon} |\lambda_{-n}| < \infty$$

Or ceci résulte de l'inégalité de Schwarz.

(43) Comparons le résultat (42) aux conséquences des résultats de L. Schwartz sur les injections radonifiantes entre espaces de Sobolev.

(44) Pour tout $p \geqslant 1$ et tout a réel, posons :

$$L^{p,a}(\mathbb{T}) = L^p(\mathbb{T}) * G_a$$

avec $G_a(\theta) \sim \sum_n (1+n^2)^{-a/2} e^{in\theta}$

L'injection de $L^1(\mathbb{T})$ dans $L^{2,t}(\mathbb{T})$ est 2.radonifiante si $t < -1$. Comme la convolée de deux fonctions de L^2 est continue, il résulte de (44) que β se prolonge en une application bilinéaire continue :

$$L^{2,t} * L^{2,t} \xrightarrow{\beta'} \mathcal{C}^o * G_{2t} = \mathcal{C}^{o,2t}$$

Par conséquent, la théorie des applications radonifiantes permet de définir $\beta'(m)$ comme probabilité de Radon sur $\mathcal{C}^{o,2t}$ avec $2t < -2$. Mais cette théorie ne permet pas de définir $\beta(m)$, parce que $H^s(\mathbb{T})$ n'est pas en dualité séparante avec $\mathcal{C}^{o,2t}$ pour $2t < -2$ et $s > \frac{1}{2}$.

4.C. Multiplication dans les classes de Hardy.

On rappelle que pour $p \geqslant 1$, la classe de Hardy $\mathcal{H}^p = \mathcal{H}^p(\mathbb{T})$ est l'ensemble des fonctions f de L^p dont les coefficients de Fourier d'ordre négatif sont nuls :

$$f \sim \sum_{o}^{\infty} f_n e^{in\theta} \qquad \sup_{r<1} \int |f(r e^{i\theta})|^p d\theta < \infty$$

Le produit de deux éléments de la classe $\mathcal{H}^2$ est un élément de la classe $\mathcal{H}^1$. Nous considérons l'application bilinéaire :

(45)
$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2 &\longrightarrow H^{-s} \qquad \text{avec } s > \frac{3}{2} \\ (f \ , \ g) &\longmapsto fg \end{aligned}$$

(46) Proposition.

Soit m une probabilité cylindrique de type 2 sur $\mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2$, en dualité séparante avec $\mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2$. Alors $\beta(m)$ est de type 1 sur H^{-s}, en dualité séparante avec H^s (si $s > \frac{3}{2}$).

Démonstration.

L'application linéaire $\tilde{\beta}$ associée à β est :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2 &\longrightarrow H^{-s} \\ \sum_{j=1}^{N} u^j \otimes v^j &\longrightarrow \sum_j u^j v^j \end{aligned}$$

On va montrer que $\tilde{\beta}$ est faiblement continue, $\mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2$ étant mis en dualité séparante avec $\mathcal{H}^2 \underset{\pi}{\otimes} \mathcal{H}^2$. Soient :

$$u \sim \Sigma\, u_n\, e^{in\theta} \quad , \quad v = \Sigma\, v_n\, e^{in\theta} \quad , \quad \lambda \in H^{s}(\mathbf{T})$$

avec $\quad \sum_{o}^{\infty} |u_n|^2 < \infty \quad , \quad \sum_{o}^{\infty} |v_n|^2 < \infty \quad , \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} |\lambda_n|^2 (1+n^2)^s < \infty$

On a $\quad (\lambda, \beta(u,v)) = \int \lambda\, uv \frac{d\theta}{2\pi} = -(2\pi)^{-1} \sum_{s \text{ et } k \geqslant o} u_n\, v_k\, \lambda_{-n-k}$

Donc $\quad \lambda \circ \tilde{\beta} = -(2\pi)^{-1} \sum_{n \text{ et } k \geqslant o} e^{in\theta} \otimes e^{ik\theta}\, \lambda_{-n-k}$

Il suffit donc de montrer que :

$$\sum_{n \text{ et } k \geqslant o} (1+n^2+k^2)^{\varepsilon}\, |\lambda_{-n-k}| = \Sigma\, k(1+k^2)^{\varepsilon}\, |\lambda_k| < \infty$$

Or ceci résulte de l'hypothèse $\lambda \in H^s$ (appliquer l'inégalité de Schwarz).

(47) Remarque.

Soit $T = R + S$ un processus linéaire de la classe d'isonomie de m.
Si $R \otimes S$ se prolonge par continuité à $\mathcal{H}^2 \underset{2}{\hat{\otimes}} \mathcal{H}^2$, on met $\mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2$ en dualité séparante avec $\mathcal{H}^2 \underset{2}{\hat{\otimes}} \mathcal{H}^2$. On voit que l'on peut alors définir l'image de m par :

$$\mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2 \longrightarrow H^{-1}(\mathbf{T})$$
$$(u\,,\,v) \longmapsto uv$$

4.D. Cas où certains espaces sont nucléaires.

Si X est un evtlcs, on note X'_b son dual continu muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés. On suppose que U et V sont des espaces de Fréchet et que U est nucléaire. Alors U'_b est nucléaire et:

(48)
$$U'_b \hat{\otimes} V'_b \simeq (U \hat{\otimes} V)'_b$$

On suppose que $X = U'_b$, $Y = V'_b$ et que β est bilinéaire continue de

$U'_b \times V'_b$ à valeurs dans Z. Alors l'application linéaire $\tilde{\beta}$ associée à β est continue :

$$U'_b \otimes V'_b \longrightarrow Z$$

(49) Par conséquent $\tilde{\beta}$ est transposable. Si donc m est une probabilité cylindrique continue sur $U'_b \times V'_b$, on peut définir $\beta(m)$.

(50) Remarque.

Lorsque U et V sont tous les deux nucléaires, alors d'après le théorème de Minlos, toute probabilité cylindrique continue sur $U'_b \times V'_b$ est, en fait, une probabilité de Radon. Par conséquent, dans ce cas, le théorème de Minlos permet de définir directement $\beta(m)$.

V - REMARQUE A PROPOS DE L'IMAGE D'UNE PROBABILITE X.CYLINDRIQUE PAR UNE APPLICATION PARTIELLEMENT LINEAIRE.

On rappelle d'abord les :

(51) Définitions, (voir L. Schwartz [2] et [3]).

Soit P une probabilité de Radon sur l'espace topologique Ω. On suppose donnés un espace topologique X et un couple $Y - U$ d'e.v. réels en dualité séparante. (L'adjectif "mesurable" signifie ci-après "Lusin-mesurable". Les v.a. sont supposées Lusin-mesurables).

a) Un processus X.linéaire basé sur U est la donnée simultanée d'une v.a. f à valeurs dans X, et d'un processus linéaire S basé sur U. Un tel processus X.linéaire est noté (f,S).

b) On munit Y de la topologie faible et l'on note $(Y_i)_{i\in I}$ la famille des sous espaces fermés de codimension finie de Y. Si $Y_i \subseteq Y_j$, on a une surjection naturelle r_{ij} de Y/Y_i sur Y/Y_j. Soit Id_X l'application identique de X. Une probabilité X.cylindrique m sur $X \times Y$ est la donnée d'un système projectif $(m_i)_i$ de lois de probabilités de Radon sur le système projectif $(X \times (Y/Y_i), Id_X \times r_{ij})_{i,j\in I}$ d'espaces topologiques.

Une probabilité X.cylindrique m sur $X \times Y$ caractérise une classe d'isonomie de processus X.linéaires basés sur U. Soit m^1 la loi de f : c'est une mesure de Radon sur X. On dit que m^1 est la projection de m sur X. Dans l'étude des équations aux dérivées partielles à coefficients aléatoires, (voir Krée [2]), intervient le :

(52) Problème de la définition de l'image d'une probabilité X.cylindrique par une application partiellement linéaire :

Aux données précédentes, on ajoute la donnée d'un couple Z-W d'e.v. en dualité séparante, et d'une application :

$$\begin{array}{rcl} X \times Y & \longrightarrow & Z \\ (x\ ,\ y) & \longmapsto & \beta(x,y) = \beta_x(y) \end{array}$$

telle que :

- $\beta_x(.)$ est linéaire continue (pour les topologies faibles).
- pour tout $w \in W$, l'application $x \to \beta'_x(w)$ est continue.

On cherche à définir l'image par β de la probabilité X-cylindrique m.

On a donné dans Krée [2] une telle définition en supposant que m admet une désintégration "suffisamment régulière" $x \to \delta_x \otimes m_x$, où m_x est une probabilité cylindrique sur Y. En fait, ce raisonnement permet seulement de définir la classe d'isonomie du processus T basé sur W associé au processus X.linéaire (f,S). Pour déterminer T, il faut raisonner non pas en termes de probabilités cylindriques (ou X.cylindriques), mais en termes de processus linéaires (ou X.linéaires).

L'objet de ce paragraphe est de présenter les remarques suivantes :

(5-) La méthode de L. Schwartz [2],[3], permettant de déterminer T peut être considérée comme un cas particulier de la méthode de prolongement continu. En effet; introduisons $U = \mathcal{C}^o(X)$ et remplaçons la donnée de f par la donnée du processus linéaire :

$$\begin{array}{rcl} U & \xrightarrow{R} & L^o(\Omega) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

L'espace U est en dualité séparante avec l'espace $\bar{X} = \mathcal{M}_\delta(X)$ des combinaisons linéaires finies de masses de Dirac sur X. Remplaçons la donnée de β par la donnée de l'application bilinéaire :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_\delta(X) \times Y & \xrightarrow{\bar{\beta}} & Z \\ (\sum_1^N \alpha_i\ \delta_{x_i}\ ,\ y) & \longmapsto & \sum_1^N \alpha_i\ \beta\ (x_i,y) \end{array}$$

La classe d'isonomie du processus $R + S : U \times V \to L^{o}(\Omega)$, définit une probabilité cylindrique $\bar{m}$ sur $\bar{X} \times Y$. Remplaçons la donnée de m par la donnée de $\bar{m}$. Posons $G = \mathcal{C}^{o}(X,V)$.

On note que l'hypothèses (53) signifie que l'application linéaire $\tilde{\tilde{\beta}}$ associée à l'application bilinéaire $\bar{\beta}$ est transposable de W à G. Vue la méthode 3.C. de prolongement continu, on est donc amené à supposer que l'application :

$$\mathcal{C}^{o}(X) \otimes V \xrightarrow{R \otimes S} L^{o}(\Omega)$$

$$\sum_{i}^{N} \varphi_j \otimes v_j \longmapsto \sum_{1}^{N} (\varphi_j \circ f).\ S(v_j)$$

se prolonge par continuité à G. On peut alors définir $\bar{\beta}(\bar{m})$ et le processus linéaire T associé.

(55) Dans les cas concrets; les applications $A(w) : x \to \beta'_x(w)$ ne sont pas des applications continues arbitraires, mais elles ont certaines propriétés de régularité. Il n'est donc pas nécessaire de supposer que $R \otimes S$ se prolonge par continuité à G. Il suffit de supposer que $R \otimes S$ se prolonge par continuité à un sous e.v. topologique de G, qui contient tous les $A(w)$, w décrivant W.

(56) Exemple.

Soit $X = \mathbb{T}$. On munit V et W de topologies localement convexes complètes compatibles avec la dualité (avec Y et Z respectivement). Supposons que pour tout $w \in W$, $A(\omega) \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{T},V) = \mathcal{E}^{\infty}(\mathbb{T}) \hat{\otimes} V$, et que le processus linéaire S est de type $p \geq 1$. Alors on peut définir $\beta(m)$, même si la probabilité X.cylindrique m n'admet pas de "bonne" désintégration. (Un exemple d'une telle probabilité X-cylindrique est donné dans L. Schwartz [2]).

(57) Remarque.

Dans le cas plus général où, pour tout $w \in W$, l'application $x \to \delta'_x(w)$ est seulement Lusin.mesurable, le raisonnement ci-dessus utilisant une transposition n'est plus valable. Le processus T est alors défini en composant le prolongement de $R \otimes S$ à $L^0(X,V)$ avec l'application linéaire :

$$\begin{aligned} W &\longrightarrow L^0(\Omega,V) \\ w &\longmapsto \delta'_x(w) \end{aligned}$$

B I B L I O G R A P H I E

S. BOCHNER

[1] Harmonic analysis and probability theory. Berkeley (1955).

I.O. DALECKII

[1] (en russe) Docklady CCCP 166 - 5 (1966) pp. 1035-1038.

[1] (en russe) Cockłady CCCP 171 - 1 (1966) pp. 21-24.

J.M. GELFAND et VILENKIN

[1] Les fonctions généralisées, vol. 4, Dunod, Paris (1968).

II. GIKHMAN and A.V. SKOROKHOD

[1] Introduction to the theory of random processes. W.B. Saunders company, (1965).

L. GROSS

[1] Integration and nonlinear transformations in Hilbert space. Tras. Ann. Math. Soc. 94 (1960) pp. 404-440.

A. GROTHENDIECK

[1] Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoir of the A.M.S. N° 16, Providence RI (1955).

P. KRÉE

[1] Théorie des probabilités, Produit et accouplement de champs aléatoires généralisés. Applications à l'étude des équations aux dérivées partielles à coefficients aléatoires. C.R. Acad, Sc. Paris, t. 272, pp. 330-333, Janvier 1971.

[2] Equations linéaires à coefficients aléatoires, Actes du colloque de Rome sur l'Analyse fonctionnelle et les équations hypoelliptiques, Symposia Mathematica vol. VII, Istituto di Alta Matematica di Roma, Convegno del Gennaio 1971, pp. 515-546, distributed by Academic Press, (1971).

[3] Courants et courants projectif sur une variété de dimension infinie, (à paraître, Actes du séminaire d'Oberwollfach sur la théorie de

l'approximation et les opérateurs linéaires. Edité par L. Butze, J.P. Kahane et B. Nagy.

[4] Pairing stochastic processes. Communication au Colloque IFIP de Los Angeles (October 1971), et article à paraître dans Journal on Optimization Techniques.

[5] Cours de 3ème cycle (1er semestre 1971-72) à l'université de Paris VI.

[6] Images de probabilités cylindriques par certaines applications non linéaires, accouplement de processus linéaires. C.R. Acad. Sc. Paris , t. 274, N° 4 (24 Janvier 1972).

MAC KEAN

[1] Stochastic integrals. Academic Press (1969).

L. SCHWARTZ

[1] Applications radonifiantes, séminaire à l'Ecole Polytechnique de Paris, (1969-70).

[2] Probabilités X.cylindriques, (Communication personnelle, Août 1971).

[3] Probabilités X.cylindriques prolongeables, (Communication personnelle, Août 1971).

[4] Séminaire à la Faculté des Sciences de Paris (1953-54).

I. SEGAL

[1] Non linear functions of weak processes, 1, Journal of functional analysis, 4 - (1969) pp. 404-456.

[2] Même titre, 2, Journal of functional analysis, 6 -(1970) pp. 29-75.