Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

S. Chevet

(Conférence n°2) Une propriété caractéristique des processus linéaires continus. Applications aux opérateurs p-radonifiants

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. nº 29, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A40_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

D E U X   J O U R N E E S   p - R A D O N I F I A N T E S

UNE PROPRIETE CARACTERISTIQUE DES PROCESSUS LINEAIRES CONTINUS

APPLICATIONS AUX OPERATEURS p - RADONIFIANTS

par S. CHEVET

Conference N° 2

25 Janvier 1972

Nous rappelons une caractérisation des fonctions aléatoires linéaires continues sur un Banach donnée par NIKISIN dans [9] et donnons quelques applications de cette caractérisation aux opérateurs p-radonifiants. Nous montrerons ainsi la conjecture suivante de PIETSCH : "tout opérateur p-sommant d'un Banach dans un autre avec $0<p<1$ est 0-sommant au sens de KWAPIEN [1]"; MAUREY [2] a trouvé une démonstration très différente de cette conjecture.

§1. NOTATIONS, RAPPELS, DEFINITIONS.

Dans tout cet exposé, E désignera un espace vectoriel, p un élément de $[0,\infty]$, Ω un espace topologique séparé et P une probabilité de Radon sur Ω ; sur $L^0(\Omega,P)$, J_α $(\alpha>0)$ désignera la jauge de l'ensemble équilibré $V_\alpha = \{f \ ; \ f\in L^0(\Omega,P) \ ; \ P(|f|>1)\leq\alpha\}$; si G est un espace normé, U_G désignera sa boule unité et $\mathcal{E}(\Omega,P\,;\,G)$ l'espace des P-classes de fonctions étagées sur Ω à valeurs dans G.

Soit alors $\varepsilon>0$ et (Ω,P,L) une fonction aléatoire sur E (c'est-à-dire une application L de E dans $L^0(\Omega.P)$).

Définition 1.- On appelle *ε-tronquée* de L, toute fonction aléatoire (Ω,P,L_ε) sur E pour laquelle il existe $\Omega_\varepsilon\subset\Omega$ de P-mesure$\geq 1-\varepsilon$ tel que $L_\varepsilon(x) = 1_{\Omega_\varepsilon} L(x)$, pour tout $x\in E$.

Trivialement, toute ε-tronquée d'une fonction aléatoire linéaire est une fonction aléatoire linéaire ; si E_1 est un autre espace vectoriel, u une application linéaire de E_1 sur E et (Ω,P,L_ε) une ε-tronquée de L, alors $(\Omega,P,L_\varepsilon\circ u)$ est une ε-tronquée de $(\Omega,P,L\circ u)$.

Définition 2.- Si E est un espace vectoriel topologique, la fonction aléatoire L est dite continue (ou de type 0) si $L : E\to L^0(\Omega,P)$ est continue ; elle est dite de *type* p, si L est à valeurs dans $L^p(\Omega,P)$ et si $L : E\to L^p(\Omega,P)$ est continue.

Soit G un Banach, (Ω,P,L) une fonction aléatoire linéaire sur G' et μ_L la mesure cylindrique sur G associée à L. Notons que

$$\sup_{x\in U_{G'}} J_\alpha(L(x)) = J^*_\alpha(\mu_L), \text{ pour tout réel } \alpha>0,$$

où J^*_α est défini comme dans [6], c'est-à-dire : $J^*_\alpha(\mu_L) = \sup_{x\in U_{G'}} J_\alpha(x\circ\mu_L)$ avec $J_\alpha(x\circ\mu_L) = \inf\{t\ ;\ t>0\ ;\ (x\circ\mu_L)\{u\ ;|u|>t\} \leq \alpha\}$.

Nous avons <u>équivalence</u> <u>d'une part</u> (d'après KWAPIEN) de :

a) μ_L a une image dans $\sigma(G'',G')$ qui est de Radon ;

b) $L(U_{G'})$ est latticiellement borné dans $L^0(\Omega,P)$;

c) pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un réel $R_\varepsilon>0$ tel que $P(\sup_{x\in S}|L(x)|>R_\varepsilon) \leq \varepsilon$, pour toute partie finie S de $U_{G'}$;

et <u>d'autre part</u> (d'après SCHWARTZ, [6], Prop (XIII,3 ; 1)) de :

a') μ_L est de Radon sur G ;

b') L est décomposée, c'est-à-dire il existe $\varphi : \Omega\to G$, P-Lusin mesurable telle que pour tout $x\in G$, la classe de $x\circ\varphi$ est égale à $L(x)$;

c') pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un compact K_ε de G tel que $P(\sup_{x\in S}|L(x)|>1)\leq\varepsilon$, pour toute partie finie S de K^o_ε.

<u>Remarque 1</u>.- Le lecteur pourra trouver aussi une preuve complète de ces équivalences dans [8].

<u>Remarque 2</u>.- Dans c') on peut prendre pour K_ε un compact faible ; et ainsi c) et c') sont équivalentes si G est réflexif.

<u>Remarque 3</u>.- Si φ et φ' décomposent (Ω,P,L), alors φ et φ' sont égales P-presque partout d'après la proposition (XIII,3 ; 1) de SCHWARTZ dans [6].

<u>Remarque 4</u>.- Soit $(\Omega,P,1_{\Omega_\varepsilon}L(.)) = (\Omega,P,L_\varepsilon)$ une ε-tronquée de L. Si L est décomposée par φ, alors L_ε est décomposée par $\varphi_\varepsilon:\omega\to 1_{\Omega_\varepsilon}\cdot\varphi(\omega)$

et $J_{\alpha+\varepsilon}(\|\varphi\|) \leq J_\alpha(\|\varphi_\varepsilon\|)$, pour tout réel $\alpha>0$.

Nous obtenons immédiatement la proposition suivante :

Proposition.- Soit G un Banach et (Ω,P,L) une fonction aléatoire linéaire sur G'. Alors :

1) si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une ε-tronquée de L décomposée, L est décomposée ;

2) si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une ε-tronquée de L, soit L_ε, telle que $L_\varepsilon(U_{G'})$ soit latticiellement borné dans $L^0(\Omega,P)$, $L(U_{G'})$ est latticiellement borné dans $L^0(\Omega,P)$;

3) si $L(U_{G'})$ est latticiellement borné dans $L^0(\Omega,P)$, il existe pour tout $\varepsilon>0$ une ε-tronquée de L de type infini.

Soit maintenant G et F deux Banach et u un opérateur linéaire continu de G dans F.

Définition 3.- u est dite (p,0)-radonifiante de G dans F (resp. de G dans $\sigma(F'',F')$) si pour toute probabilité cylindrique μ sur G de type p, $u(\mu)$ est de Radon sur F (resp. a une image dans $\sigma(F'',F')$ de Radon). Nous dirons u 0-radonifiante au lieu de u (0,0)-radonifiante.

Donc, u est (p,0)-radonifiante de G dans F (resp. de G dans $\sigma(F'',F')$) si et seulement si pour toute fonction aléatoire linéaire sur G' de type p, soit (Ω,P,L), $L\circ u'$ est décomposée (resp. $L\circ u'(U_{F'})$ est latticiellement borné dans $L^0(\Omega,P)$).

Définition 4.- Si $p>0$, u est dite p-sommante si pour toute suite $(x_n)_n$ dans G scalairement de puissance p-ième-sommable, $(u(x_n))_n$ est de puissance p-ième-sommable.

Alors, u est p-sommante ($0<p<\infty$) si et seulement si il existe un réel $K>0$ tel que

$$\left(\int \|u(x)\|^p \mu(dx)\right)^{1/p} \leq K \sup_{x'\in U_{G'}} \left(\int |\langle x,x'\rangle|^p \mu(dx)\right)^{1/p}$$

pour toute probabilité de Radon μ sur G à support fini. On note $\pi_p(u)$ le plus petit K vérifiant l'inégalité ci-dessus.

u <u>est dite 0-sommante</u> au sens de KWAPIEN [1] si, pour tout réel $\beta>0$, il existe deux réels >0, K et δ, tels que

$$J_\beta\left(\| u(\mu) \| \right) \leq K \, J_\delta^*(\mu)$$

pour toute probabilité de Radon μ sur G à support fini.

$\pi_p(G,F)$ désignera l'ensemble des opérateurs p-sommants de G dans F.

<u>Remarque 5</u>.- D'après l'erratum de [6] et d'après [7], u est p-sommante $(0\leq p\leq\infty)$ si et seulement s'il existe un compact K, une probabilité de Radon ν sur K, un sous-espace vectoriel fermé S de $L^p(K,\nu)$, muni de la topologie induite par celle de $L^p(K,\nu)$, une application linéaire continue u_o de G dans $L^\infty(K,\nu)$ et une application linéaire continue u_2 de S dans F, telle que u admette la factorisation

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "u_o"] \arrow[dr, "u_1"'] & L^\infty(K,\nu) \arrow[r, "i"] & L^p(K,\nu) \\
& S \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "u_2"'] & F
\end{tikzcd}$$

$u = u_2 \circ u_1$

i, j injections naturelles

§2. <u>ENONCE ET PREUVE D'UN THEOREME FONDAMENTAL</u>.

<u>Définition 5</u>.- Soit E un espace vectoriel topologique et $p \in]0,\infty]$; nous dirons que E vérifie la condition (C_p) si, pour tout $\varepsilon>0$ et pour toute fonction aléatoire linéaire continue sur E, soit (Ω,P,L), il existe une ε-tronquée de L de type p.

Si E vérifie (C_p), il vérifie aussi trivialement (C_q) pour tout $q \in]0, p]$; nous poserons $\alpha(E) = \sup \{p \,;\, p \in]0,\infty] \,;\, E$ vérifie $(C_p)\}$.

Si E est un Banach de dimension finie, E vérifie (C_∞) d'après la partie 3) de la proposition puisque toute mesure cylindrique sur E' est de Radon sur $\sigma(E',E)$.

Remarque 6.- Par définition même, si E est un espace normé vérifiant (C_p), alors $\mathfrak{L}(E, L^p(\Omega, P))$ **est partout dense dans** $\mathfrak{L}_b(E, L^0(\Omega, P))$ pour tout (Ω, P).

Théorème 1.- a) Tout espace localement convexe E vérifie (C_p) pour tout $p \in]0,1[$ $\quad (\Rightarrow \alpha(E) \geq 1)$.

b) Il existe des Banach E ne vérifiant pas (C_1) (il en est ainsi de $E = l^1$).

c) Si E est un Banach isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé d'un $L^q(S,\mathcal{S},\mu)$ avec $1<q<\infty$, $(S,\mathcal{S},\mu)$ espace mesuré, alors E vérifie (C_p) pour tout $p \in]0, \min(q,2)[$ $(\Rightarrow \alpha(E) \geq \min(q,2))$.

Le résultat a) dans le cas où E est un Banach (resp. le résultat c)) est une conséquence immédiate du théorème 1 (resp. du théorème 2) du §2 de l'article [9] de NIKIŠIN. Notons que nous avons démontré dans [10] le théorème énoncé ci-dessus sans connaître cet article de NIKIŠIN dans [9].

Nous allons donner une preuve des parties a) et c) du théorème 1 (la preuve de b) sera établie dans le corollaire 5 du §3). Pour montrer ce théorème nous avons besoin de lemmes préliminaires ; le théorème 1 sera une conséquence immédiate des 2 derniers lemmes (lemmes 5 et 6).

Commençons par énoncer les lemmes.

Lemme 1.- NIKISIN [3 ou 9].- Soit Ω un espace topologique séparé, P une probabilité de Radon sur Ω et l un entier >0. Soit aussi A_i et B_i $(i = 1,\ldots,l^3)$ des parties P-mesurables de Ω. Si les A_i $(i=1,\ldots,l^3)$ sont disjoints 2 à 2, alors il existe l entiers $i_1,\ldots,i_l$ tels que $1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq l^3$ et tels que

$$P\left(\bigcup_{\substack{k\neq k'\\ k,k'=1,\dots,l}} (A_{i_k} \cap B_{i_{k'}})\right) \leq \frac{1}{l} \sup_{1\leq i\leq l^3} P(B_i),$$

donc tels que

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{l} \left(A_{i_k} \cap \left(\bigcap_{\substack{k'\neq k\\ k'=1,\dots,l}} \complement (B_{i_{k'}})\right)\right)\right] \geq 1 \inf_{1\leq i\leq l^3} P(A_i) - \frac{1}{l} \sup_{1\leq i\leq l^3} P(B_i)$$

<u>Lemme 2</u>.- Soit E un espace vectoriel, (Ω,P,L) une fonction aléatoire linéaire sur E, l un entier >2, R un réel ≥ 0 et η un réel >0. Soit U une partie disquée de E telle que

(1) : $\sup_{x\in U} P(|L(x)|>R) \leq \eta$.

Alors, il existe $s\leq l^3$ éléments de U, soit $x_1,\dots,x_s$ tels que

(2) : $\sup_{x\in U} P(\sup_{1\leq i\leq s} |L(x_i)| \leq R \, ; \, |L(x)| > 2\beta R) \leq \frac{2}{l}\eta$

avec $\beta = 1$. ∎

<u>Lemme 3</u>.- Soit $(S,\mathcal{S},\mu)$, $(R,\mathfrak{R},\nu)$ deux espaces mesurés, r et q deux réels ≥ 1. Si F est un Banach isomorphe à un sous-espace (fermé) F_1 de $L^q(R,\mathfrak{R},\nu)$, si $x_1,\dots,x_n$ sont n éléments de $E = L^r(S,\mathcal{S},\mu)$ et $y_1,\dots,y_n$ n éléments de F, alors il existe n réels $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ tels que

$$\varepsilon_i = \pm 1, \quad i=1,\dots,n,$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\|_E \leq C_r \, 2^{1/r} \, n^{\frac{1}{\min(r,2)}} \sup \| x_i \|_E ,$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i y_i \right\|_F \leq d(F,F_1) \, C_q \, 2^{1/q} \, n^{\frac{1}{\min(q,2)}} \sup \| y_i \|_F ,$$

avec $C_p = \sup_{(c_n)_n \in U_{l^2}} \| \sum_m c_m X_m \|_{L^p(\Omega,P)}$, où $(X_m)_m$ est une suite de

Rademacher sur (Ω,P) et $d(F,F_1)=\inf \|T\|\ \|T^{-1}\|$, la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des isomorphismes T de F sur F_1.

Lemme 4.- Soit E un Banach isomorphe à un sous-espace F_1 d'un $L^q(R,\mathfrak{R},\nu)$ avec $1\leq q<\infty$. Soit (Ω,P,L) une fonction aléatoire linéaire sur E, R un réel >0 et η un réel >0. Soit l un entier >2. Supposons que $U=U_E$ vérifie la condition (1) du lemme 2. Alors, on a (2) avec $\beta=M_q l^{1/\min(q,2)}$, où $M_q=2^{1/q}\ C_q\ d(E,F_1)+6^{1/\min(q,2)}$.

Lemme 5.- Sous les hypothèses du lemme 2, il existe une partie P-mesurable de Ω, soit Ω_1, telle que

$$(3)\qquad P(\complement\Omega_1)\leq\frac{l^4\eta}{l-2}\ ,\quad \sup_{x\in U} P(\Omega_1\ ;\ |L(x)|>yR)\leq\frac{l\eta}{2}\ y^{-\gamma(l)}$$

pour tout réel $y\geq1$, avec $\gamma(l)=\dfrac{\mathrm{Log}(l/2)}{\mathrm{Log}2l}$.

Lemme 6.- Sous les hypothèses du lemme 4, il existe une partie P-mesurable de Ω, soit Ω_1, telle que

$$P(\complement\Omega_1)\leq\frac{l^4\eta}{l-2}\ ,\quad \sup_{x\in U} P(\Omega_1\ ;\ |L(x)|\ >yR)\leq\frac{l\eta}{2}\ y^{-\gamma'(l)}$$

pour tout réel $y\geq1$, avec $\gamma'(l)=\dfrac{\mathrm{Log}(l/2)}{\mathrm{Log}2M_q l}\ .\ \min(q,2)$ (M_q étant défini comme dans le lemme 4).

Preuve partielle des lemmes.- Nous ne démontrerons pas les lemmes 1 et 3. Le lemme 2 (resp.le lemme4) résulte du lemme 1 (resp. du lemme 1 et 3). Le lemme 5 (resp.le lemme 6) résulte du lemme 2 (resp. du lemme 4).

.Preuve des lemmes 2 et 4.- Supposons (1) vérifiée. Posons pour tout $x\in U$ et tout réel $\beta>1$, $\phi_\beta(x)=\{|L(x)|\ >2\beta R\}$ et $\varphi(x)=\{|L(x)|\ \leq R\}$.

Supposons qu'il existe l^3 éléments de U, soit $x_1,\dots,x_{l^3}$, tels que

$$P\left[\psi_\beta(x_k)\cap(\bigcap_{i=0}^{k-1}\Phi(x_i))\right] > \frac{2}{l}\eta,\ k=1,\dots,l^3 \qquad (\text{avec } x_o=0).$$

Posons alors $A_k=\psi_\beta(x_k)\cap(\bigcap_{i=0}^{k-1}\Phi(x_i))$ et $B_k=\complement\Phi(x_k)$ pour $k=1,\dots,l^3$; les A_k ($k=1,\dots,l^3$) sont disjoints 2 à 2, donc par le lemme 1, il existe l entiers $1\le i_1<\dots<i_l\le l^3$ tels que

$$\Omega'=\bigcup_{k=1}^{l}(A_{i_k}\cap(\bigcap_{k'\neq k}\Phi(x_{i_{k'}})))$$

vérifie

(4) $$P(\Omega')> l.\frac{2}{l}\eta-\frac{\eta}{l}\ge\frac{3}{2}\eta.$$

1^{er} cas : <u>$\beta=1$; U partie disquée de E</u>

Alors, sur $A_{i_k}\cap(\bigcap_{k'\neq k}\Phi(x_{i_{k'}}))\subset\psi_1(x_{i_k})\cap(\bigcap_{k'\neq k}\Phi(x_{i_{k'}}))$,

$$|L(x_{i_1}+\dots+x_{i_l})|\ge|L(x_{i_k})|-\sum_{k'\neq k}|L(x_{i_{k'}})|>2lR-(l-1)R\ge lR\ ;$$

donc, pour $y=\frac{1}{l}(x_{i_1}+\dots+x_{i_l})\in U$, on a $P(|L(y)|>R)\ge P(\Omega')>\eta$, ce qui contredit l'hypothèse (i) du lemme 2. Nous en déduisons le lemme 2.

2^e cas : <u>$\beta=M_q l^{1/\min(q,2)}$; U comme dans le lemme 4</u>.

Posons $r=\min(q,2)$, $\rho=2^{1/q}C_q\,d(E,F_1)$ et $X_k=1_{\Omega'\setminus A_{i_k}}L(x_{i_k})$; $(k=1,\dots,l)$. Alors

$$\|X_k\|_{L^r(\Omega,P)}\le R(P(\Omega'))^{1/r},\quad k=1,\dots,l\ ;$$

et d'après le lemme 2, il existe l réels $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_l$ tels que $\varepsilon_i=\pm1$ $(i=1,\dots,l)$ et tels que

$$\|\sum_{k=1}^{l}\varepsilon_k X_k\|_{L^r(\Omega,P)}\le R(2lP(\Omega'))^{1/r},\quad \sum_{k=1}^{l}\varepsilon_k x_{i_k}\in\rho l^{1/r}U.$$

Comme sur Ω'

$$\left|\sum_{k=1}^{l} \varepsilon_k\, L(x_{i_k})\right| + \left|\sum_{k=1}^{l} \varepsilon_k\, X_k\right| \geq \left|\sum_{k=1}^{l} \varepsilon_k\, 1_{A_{i_k}}\, L(x_{i_k})\right| > 2\beta R$$

nous avons, en posant $y = \dfrac{1}{\rho\, l^{1/r}} \displaystyle\sum_{k=1}^{l} \varepsilon_k\, x_{i_k}$,

$$y \in U \quad \text{et} \quad P(\Omega') \leq P(|L(y)| > R) + P\left(\left|\sum_{k=1}^{l} \varepsilon_k\, X_k\right| > (2M_q - \rho)\, l^{1/r} R \right)$$

donc

$$P(\Omega') \leq \eta + \frac{2P(\Omega')}{(2M_q-\rho)^r} \leq \eta + \frac{1}{3} P(\Omega').$$

D'où $P(\Omega') \leq \frac{3}{2}\eta$, ce qui contredit (4). Nous en déduisons le lemme 4.

Preuve des lemmes 5 et 6.- Si U est comme dans le lemme 2 (resp. comme dans le lemme 4) par récurrence on déduit du lemme 2 (resp. du lemme 4) qu'il existe une partie Ω'' de Ω telle que

$$P(\complement\Omega'') \leq l^3\, \eta\, \left(1+\frac{2}{l} + \left(\frac{2}{l}\right) + \ldots\right) = \frac{l^4\, \eta}{l-2} \quad ,$$

$$\sup_{x\in U} P(\Omega'' ; |L(x)| > (2\beta)^n R) \leq \left(\frac{2}{l}\right)^n \eta$$

avec $\beta = l$ (resp. $\beta = M_q\, l^{1/\min(q,2)}$) ; nous en déduisons facilement le lemme 5 (resp. le lemme 6).

Démontrons maintenant les parties a) et c) du théorème 1.

Montrons a). Soit E un espace localement convexe, p dans $]0,1[$, $\varepsilon>0$ et (Ω,P,L) une fonction aléatoire linéaire continue sur E. Soit l un entier tel que $\gamma(l)>p$ (ce qui est possible puisque $\gamma(l)\uparrow 1$, quand $l\uparrow\infty$) et posons $\eta = \dfrac{l-2}{l^4}\varepsilon$.

L étant continue, il existe un voisinage disqué de zéro dans E, soit V_ε tel que $\sup\limits_{x\in V_\varepsilon} P(|L(x)| > 1) \leq \eta$; d'où, par le lemme 5 (appliqué à $U=V_\varepsilon$) et la théorie de l'intégrale Riemann-Stieljes il existe une partie $\Omega_{\varepsilon,1}$ de Ω telle que

$$P(\Omega_{\varepsilon,1}) \geq 1-\varepsilon \ , \quad \sup_{x\in V_\varepsilon} \int_{\Omega_{\varepsilon,1}} |L(x)|^p \, dP \leq 1 + \frac{1\eta}{2} \int_1^\infty y^p dy^{-\gamma(1)}$$

et comme $\gamma(1)>p$, $L_\varepsilon : x \to 1_{\Omega_{\varepsilon,1}} L(x)$ est une ε-tronquée de L de type p sur E.

Notons que si E est un Banach, on peut prendre $V_\varepsilon = R_\varepsilon U_E$ avec $R_\varepsilon > 0$.

Montrons c). Si E est un Banach isomorphe à un sous-espace d'un $L^q(S,\mathcal{S},\mu)$ $(1<q<\infty)$, on peut d'après le lemme 6, remplacer $\gamma(1)$ par $\gamma'(1)$; et comme $\gamma'(1)\uparrow \min(q,2)$ quand $1\uparrow\infty$, on montre de manière analogue que E vérifie (C_p) pour tout p dans $]0,\min(q,2)[$.

Remarque 7.- Si E est un Banach et si $\sup\limits_{x\in U_\varepsilon} J_\eta(L(x)) = b_\varepsilon$, on peut prendre dans la preuve ci-dessus de a), $V_\varepsilon = \frac{1}{b_\varepsilon} U_E$ si $b_\varepsilon \neq 0$ et $V_\varepsilon = E$ si $b_\varepsilon = 0$; et alors

$$\sup_{x\in U_\varepsilon} \left(\int_{\Omega_{\varepsilon,1}} |L(x)|^p \, dP\right)^{1/p} \leq b_\varepsilon \left(1 + \frac{1\eta}{2} \int_1^\infty y^p \, dy^{-\gamma(1)}\right)^{1/p}.$$

Nous en déduisons le

Théorème 2.- Soit E un Banach ; alors, pour tout $\varepsilon>0$ et tout $p\in]0,1[$ il existe deux constantes >0, $K=K_{p,\varepsilon}$ et $\eta=\eta_{p,\varepsilon}$, telles que pour toute fonction aléatoire linéaire continue (Ω,P,L) sur E il existe une ε-tronquée de L, soit (Ω,P,L_ε), vérifiant

$$\sup_{x\in U_E} \left(\int |L_\varepsilon(x)|^p \, dP\right)^{1/p} \leq K \sup_{x\in U_E} J_\eta(L(x)).$$

Remarque 8.- La partie a) du théorème 1 donne une caractérisation des parties convexes bornées de $L^0(\Omega,P)$.

§3. APPLICATIONS des THEOREMES 1 et 2 et PROBLEMES.

Théorème 3.- Soit G et F deux Banach arbitraires. On a

$$\pi_o(G,F) = \pi_p(G,F), \text{ pour tout } p \text{ dans } [0,1[.$$

Démonstration.- Nous savons déjà que $\pi_o(G,F) \subset \pi_p(G,F)$ pour tout réel $p \geq 0$. D'autre part soit $u \in \pi_p(G,F)$; grâce au théorème 2 et à la remarque 4, nous avons

$$J_{2\varepsilon}\left(\| u(\varphi) \|\right) \leq \frac{\pi_p(u)}{\varepsilon^{1/p} K_{p,\varepsilon}} \sup_{x \in U_{G'}} J_{\eta_{p,\varepsilon}}(x \circ \varphi)$$

pour tout $\varepsilon > 0$, tout (Ω,P) et tout $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega,P\,;\,G)$; d'où $u \in \pi_o(G,F)$.

Remarque 9.- MAUREY [2] a montré que si $u \in \pi_p(G,F)$ pour un p de $[0,1[$, alors $\sup_{p>0} \pi_p(u) < +\infty$; nous ne savons pas établir ce résultat par notre méthode.

Théorème 4.- Soit G et F deux Banach. Si G' vérifie (C_p), tout opérateur (p,0)-radonifiant de G dans F (resp. de G dans $\sigma(F'',F')$) est 0-radonifiant de G dans F (resp. de G dans $\sigma(F'',F')$).

Démonstration.- Soit $u : G \to F$ un opérateur (p,0)-radonifiant de G dans F (resp. de G dans $\sigma(F'',F')$) et soit (Ω,P,L) une fonction aléatoire linéaire continue arbitraire sur G'. G' vérifie (C_p), pour tout $\varepsilon>0$ il existe une ε-tronquée L_ε de L de type p. Par suite, pour tout $\varepsilon>0$, $L_\varepsilon \circ u'$ est une ε-tronquée de $(\Omega,P,L\circ u')$ décomposée (resp. avec $L_\varepsilon \circ u'(U_{F'})$ latticiellement borné dans $L^0(\Omega,P)$). D'où, par la partie 1 (resp.2) de la proposition du §1, $(\Omega,P,L\circ u')$ est décomposée (resp. $L\circ u'(U_{F'})$ est latticiellement borné dans $L^0(\Omega,P)$). Nous en déduisons que u est 0-radonifiant de G dans F (resp. de G dans $\sigma(F'',F')$).

Corollaire 1.- Soit G et F deux Banach arbitraires et u un opérateur linéaire continu de G dans F. Si u est $(p,0)$-radonifiant de G dans F (resp. de G dans $\sigma(F'',F')$) pour un certain p de $]0,1[$, u est aussi 0-radonifiant de G dans F (resp. de G dans $\sigma(F'',F')$).

Corollaire 2.- Si G est un Banach dont le dual vérifie (C_p) pour un certain $p\geq 1$, alors

$$\pi_p(G,F) = \pi_o(G,F) \quad , \text{ pour tout Banach F.}$$

Démonstration.- On a toujours $\pi_o(G,F) \subset \pi_p(G,F)$. D'autre part, soit $u \in \pi_p(G,F)$. D'après SCHWARTZ [6,prop(XII.1 ; 1)] u est $(p,0)$-radonifiant de G dans $\sigma(F'',F')$ puisque $p\geq 1$; donc, par le théorème 4, u est 0-radonifiant de G dans $\sigma(F'',F')$. Enfin d'après SUNYACH [7], u est 0-sommant.

Remarque 10.- Le théorème 3 ne peut se déduire à priori du Corollaire 1, car si $p<1$, on ignore si un opérateur p-sommant de G dans F est $(p,0)$-radonifiant de G dans $\sigma(F'',F')$.

Remarque 11.- Soit G un Banach. S'il existe $p\geq 1$ tel que $\pi_p(G,F) = \pi_o(G,F)$ pour tout Banach F, G' vérifie-t-il la condition (C_p) ?

Grâce à la partie c) du théorème 1, le corollaire 2 donne le corollaire 3.

Corollaire 3.- (KWAPIEN [1]).- Si q est un réel >1 et $(S,\mathcal{S},\mu)$ un espace mesuré, on a

$$\pi_p(L^{q'}(S,\mathcal{S},\mu),F) = \pi_o(L^{q'}(S,\mathcal{S},\mu),F) \quad \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1\right) \text{ pour tout}$$

p dans $]0,\min(q,2)[$ et tout Banach F.

<u>Corollaire 4</u>.-(NIKIŠIN [4]).- <u>Pour tout p dans</u> $[1,\infty[$

$$\alpha(l^p) = \min(p,2)$$

<u>Plus précisément, si</u> $1 \le p < 2$, <u>l^p ne vérifie pas la condition</u> (C_p).

<u>Démonstration</u>.- Nous savons déjà que $\alpha(l^p) \ge \min(p,2)$. Pour montrer le corollaire 4, nous utilisons la remarque 11. Si p est dans $[2,\infty[$, on a d'après PIETSCH [5, exposé 31, p.20]

$$\pi_2(l^{p'},l^{2+\varepsilon}) \subsetneq \pi_{2+\varepsilon}(l^{p'},l^{2+\varepsilon})$$

pour tout réel $\varepsilon>0$; et comme par KWAPIEN [1],

$$\pi_0(l^{p'},E) = \pi_2(l^{p'},E) \tag{5}$$

pour tout Banach E, on en déduit que

$$\alpha(l^p) = \min(p,2) \quad , \text{ si } p\in[2,\infty[.$$

D'autre part, si $1<p<2$ (resp. $p=1$) et si $(a_n)_n$ est un élément de l^p, tel que $\sum\limits_n |a_n|^p \left(1 + \operatorname{Log}\frac{1}{|a_n|}\right) = +\infty$, l'opérateur $u : (x_n)_n \to (a_n x_n)_n$ de $l^{p'}$ dans l^p (resp. de c_0 dans l^1) est p-sommant (trivial) sans être 0-sommant d'après le théorème (XXVI,4 ; 1) de SCHWARTZ [6]. Donc, si $p \in [1,2[$, l^p ne vérifie pas (C_p).

<u>Problème 2</u>.- Si $p \in [2,\infty[$, l^p vérifie-t-il (C_p)? Notons que si la réponse au problème 1 est oui, la réponse à ce nouveau problème sera oui également, d'après (5).

BIBLIOGRAPHIE

[1] KWAPIEN, Studia Mathematica,38, 1970, p.193-201.

[2] MAUREY, Symposium Ecole Polytehnique du 25-26 Janvier 1972.

[3] NIKIŠIN, Mat. Sb., 81, n°123, 1970, p.23-38.

[4] NIKIŠIN, Math. U.S.S.R. Izvestija, 4, n°3, 1970, p.628-644.

[5] PIETSCH, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1970-1971, Ecole Polytechnique, Paris.

[6] L. SCHWARTZ, Séminaire Schwartz 1969-1970, Ecole Polytechnique, Paris.

[7] SUNYACH, Séminaire Schwartz 1969-1970, Ecole Polytechnique, Paris.

[8] BADRIKIAN, CHEVET, Séminaire Clermont-Fd 1970-1971, Lecture Notes (à paraître).

[9] NIKIŠIN, Translation of contents of Uspekhi Matematicheskikh Nauk, vol XXV, n°6, November-December 1970, p.129-187.

[10] CHEVET, C.R.A.S, Novembre 1971.
