L. Schwartz

La topologie étroite et la topologie cylindrique

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 3, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E L. S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

LA TOPOLOGIE ETROITE ET LA TOPOLOGIE CYLINDRIQUE

Exposé n° 3 17,11.1969

§ 1. DEFINITION DE LA TOPOLOGIE ETROITE

Soit X un espace topologique (séparé comme toujours), et soit $\mathfrak{M}_+(X)$ l'espace des mesures de Radon ≥ 0 finies sur X. La topologie étroite est une topologie sur $\mathfrak{M}_+(X)$.

Supposons d'abord X complètement régulier ; alors c'est la topologie $\sigma(\mathfrak{M}_+(X), \mathfrak{B}(X))$ de la convergence simple sur l'espace $\mathfrak{B}(X)$ des fonctions continues bornées. Si $\check{X}$ est le compactifié de Cech de X, $\mathfrak{B}(X) \simeq C(\check{X})$, donc c'est la topologie induite par la topologie vague $\sigma(C'(\check{X}), C(\check{X}))$. Si f est une fonction réelle sur X, semi-continue inférieurement (s.c.i) sur X[(♦)], elle est enveloppe supérieure des fonctions continues bornées qui la minorent ; donc $\mu \to \mu(f)$ est s.c.i. pour la topologie étroite. Si alors des $\mu_j \in \mathfrak{M}_+(X)$ convergent étroitement vers μ, on a lim. inf. $\mu_j(f) \geq \mu(f)$. Inversement, si cette condition est réalisée pour toute f s.c.i. bornée, on a une inégalité inverse (par changement de signe) pour f s.c.s. bornée, donc $\lim_j \mu_j(\varphi) = \mu(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathfrak{B}(X)$, et μ_j converge étroitement vers μ.

Ceci permet de définir (TOPSOE) la topologie étroite sur $\mathfrak{M}_+(X)$, même si X n'est pas complètement régulier : c'est la topologie la moins fine pour laquelle, pour toute f bornée s.c.i. sur X, la fonction $\mu \to \mu(f)$ soit s.c.i.

On voit aisément qu'elle est séparée, et qu'on peut se borner à des f fonctions caractéristiques d'ouverts, appartenant à une base de la topologie, stable par réunions finies.

§ 2. CONVERGENCE ETROITE DE MESURES PORTEES PAR UNE PARTIE $A \subset X$

Proposition (III;2,1)

Pour des mesures ≥ 0 finies portées par une partie $A \subset X$, la convergence étroite sur X est la même que la convergence étroite sur A des mesures induites.

(♦) non nécessairement ≥ 0 !

Démonstration : Si $(\mu_j)_A$ converge étroitement vers μ_A, il est évident que μ_j converge étroitement vers μ, car toute fonction s.c.i. sur X à une restriction à A qui est s.c.i.

Inversement, supposons que μ_j converge étroitement vers μ, toutes étant portées par A, et montrons que $(\mu_j)_A$ converge etroitement vers μ_A. Soit f une fonction s.c.i. bornée sur A, $f \leq C$. Pour $x \in X$, posons $\bar{f}(x) = \liminf\limits_{\substack{x' \in A \\ x' \to x}} f(x')$ si $x \in \bar{A}$, $\bar{f}(x) = C$ sinon.

Alors $\bar{f}$ est une fonction s.c.i. bornée prolongeant f.

On a alors :

$$\lim.\inf.(\mu_j)_A(f) = \lim.\inf.\mu_j(\bar{f}) \geq \mu(\bar{f}) = \mu_A(f),$$

donc $(\mu_j)_A$ converge étroitement vers μ_A.

Remarques

1) On doit supposer les μ_j et $\underline{\mu}$ portées par A ; le fait que les μ_j soient portées par A n'entraîne pas que μ soit portée par A.

Exemple : si $a \in X$ converge vers a, $\delta_{(a_j)}$ converge étroitement vers $\delta_{(a)}$. Cependant les $\delta_{(a_j)}$ sont portées par $\complement\{a\}$ (si les a_j sont tous dans $\complement\{a\}$), mais pas $\delta_{(a)}$.

2) D'après la définition même de la topologie étroite, le résultat énoncé dans la proposition était déjà connu pour l'espace $\check{X}$ et son sous-espace X, pour X complètement régulier.

Proposition (III;2,2)

Soit X localement compact. Pour que des mesures $\mu_j \geq 0$ finies convergent étroitement vers μ, il faut et il suffit qu'elles convergent vaguement et que $\lim\limits_j \mu_j(1) = \mu(1)$.

Démonstration : C'est trivialement nécessaire, montrons que c'est suffisant. Les μ_j convergent alors vers μ, simplement sur $C_{comp.}(X) \oplus \mathbb{R}$, sous-espace dense de $C(\tilde{X})$, où $\tilde{X}$ est est le compactifié d'Alexandroff de X. Par Ascoli, les μ_j convergent vers μ simplement sur $C(\tilde{X})$, c'est-à-dire étroitement sur $\tilde{X}$; la proposition précédente dit qu'elles convergent étroitement sur X.

§ 3. LES FONCTIONS INTEGRABLES - RIEMANN

Soit $\mu \in \mathfrak{M}_+(X)$. Une fonction $\vec{f}$ sur X, à valeurs dans un Banach F, est dite μ-intégrable-Riemann, si elle est bornée, et si l'ensemble de ses points de discontinuité est μ-négligeable. La fonction caractéristique d'une partie A de F est μ-intégrable Riemann, si et seulement si la frontière A est μ-négligeable.

Proposition (III;3,1)

Soit $\vec{f} : X \to F$. Si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue décomposable $\vec{g} \in \mathfrak{B}(X) \otimes F$, et une fonction h continue bornée ≥ 0, telles que $\|\vec{f} - \vec{g}\|_F \leq h$ et $\mu(h) \leq \varepsilon$, alors $\vec{f}$ est μ-intégrable-Riemann. La réciproque est vraie si X est complètement régulier.

Démonstration :

1) Supposons réalisée la condition de l'énoncé.

Soit $\omega(\vec{f})$ la fonction oscillation de $\vec{f}$:

$$\omega(\vec{f})(x) = \limsup_{x',x'' \to x} \|\vec{f}(x') - \vec{f}(x'')\|_F$$

On a $\omega(\vec{f})(x) \leq \omega(\vec{g})(x) + \omega(\vec{f} - \vec{g})(x) \leq 0 + \limsup_{x',x''\to x} (h(x') + h(x'')) = 2h(x)$,

donc $\mu(\omega(\vec{f})) \leq 2\mu(h) \leq 2\varepsilon$.

Comme ε est arbitraire, on a $\mu(\omega(\vec{f})) = 0$, $\vec{f}$ est μ-presque partout continue.

2) Supposons inversement $\vec{f}$ bornée et μ-presque partout continue. Alors, la restriction de $\vec{f}$ à un ensemble portant μ est continue donc μ-mesurable, donc $\vec{f}$ est aussi μ-mesurable, donc μ-intégrable.

Donc, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\vec{g} \in \mathfrak{B}(X) \otimes F$ telle que $\mu(\|\vec{f} - \vec{g}\|) \leq \varepsilon/2$.

Soit k la plus petite fonction s.c.s. majorant $\|\vec{f} - \vec{g}\|$:

$k(x) = \limsup_{x' \to x} \|\vec{f}(x') - \vec{g}(x')\|$. Comme l'ensemble des points de discontinuité de f (et aussi de $\vec{g}$) est μ-négligeable, $k = \|\vec{f} - \vec{g}\|$ μ-presque partout, et $\mu(k) \leq \varepsilon/2$. Mais comme X est complètement régulier,

$$\mu(k) = \operatorname*{Inf}_{\substack{h \text{ continue} \\ h \geq k}} \mu(h)$$, donc il existe h continue ≥ 0

telle que $\|\vec{f} - \vec{g}\| \leq h$ et $\mu(h) \leq \varepsilon$, <u>cqfd</u>

<u>Proposition (III;3,2)</u>

<u>Soient</u> μ_j <u>des mesures ≥ 0 finies sur X, convergeant étroitement vers μ. Soit $A \subset X$, portant les</u> μ_j <u>et μ. Soit $\vec{f}$ une fonction bornées sur A, à valeurs dans un Banach F,</u> μ_A-<u>intégrable-Riemann, et</u> $(\mu_j)_A$-<u>mesurables pour tout j.</u>

<u>Si X est complètement régulier, ou si f est à valeurs réelles, et peut-être dans tous les cas,</u> $\lim_j \mu_j(\vec{f}) = \mu(\vec{f})$.

<u>Démonstration</u> : D'après la prop.(III;2,1), on peut supposer A = X. Supposons d'abord X complètement régulier. D'après la prop.(III;3,1), pour $\varepsilon > 0$, il existe $\vec{g} \in \mathcal{B}(X) \otimes F$ et h continue ≥ 0, telles que $\|\vec{f} - \vec{g}\| \leq h$ et $\mu(h) \leq \varepsilon/4$. $\|\mu_j(\vec{f}) - \mu(\vec{f})\| \leq \|\mu_j(\vec{f}) - \mu_j(\vec{g})\| + \|\mu_j(\vec{g}) - \mu(\vec{g})\| + \|\mu(g) - \mu(\vec{f})\|$
Le 2ème terme est $\leq \varepsilon/3$ pour j assez grand. Le 3ème terme aussi. En outre $\|\mu_j(\vec{f}) - (\mu_j(\vec{g})\| \leq \vec{\mu}_j(h)$, et comme $\mu(h) \leq \varepsilon/4$ et que h est continue bornée, $\lim_j \mu_j(h) = \mu(h)$, donc $\mu_j(h) \leq \varepsilon/3$ pour j assez grand, d'où le résultat.

Supposons maintenant $F = \mathbb{R}$ (ou bien sûr F de dimension finie) et X quelconque. Soit f^+ (resp. f^-) la plus petite majorante s.c.s. (resp. la plus grand minorante s.c.i.) de f. Alors $f^+ = f^- = f$ μ - p.p., donc :
$\lim.\sup._j \mu_j(f^+) \leq \mu(f^+) = \mu(f^-) \leq \lim.\inf._j \mu_j(f^-) \leq \lim.\sup._j \mu_j(f^+)$.

Donc, toutes ces quantités sont égales, et $\lim_j \mu_j(f) = \mu(f)$.

§ 4. PARTIES RELATIVEMENT COMPACTES DE $\mathcal{P}(X)$: LE 2ème THEOREME DE PROKHOROV.

Proposition (III;4,1).(2ème théorème de Prokhorov). Soient X un espace topologique, $\mathfrak{M}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$ (espace des probabilités de Radon sur X, muni de la topologie étroite).

Pour que $\mathfrak{M}$ soit relativement compact dans $\mathcal{P}(X)$, il est suffisant, et nécessaire si X est localement compact ou polonais, que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset X$ tel que, pour toute $\mu \in \mathfrak{M}$, $\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$.

Démonstration

1) supposons cette condition réalisée et montrons que $\mathfrak{M}$ est relativement compact. Pour simplifier, bornons-nous au cas où X est complètement régulier. Puisqu'alors la topologie étroite de $\mathcal{P}(X)$ est induite par celle de $\mathcal{P}(\check{X})$, et qu'on sait que $\mathcal{P}(\check{X})$ est vaguement compact, il suffit de montrer que l'adhérence $\overline{\mathfrak{M}}$ de $\mathfrak{M}$ dans $\mathcal{P}(\check{X})$ et dans $\mathcal{P}(X)$. Or, pour tout K_ε, $\mu \mapsto \mu(K_\varepsilon)$ est semi-continue supérieurement pour la topologie étroite ; de $\lambda(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ pour $\lambda \in \mathfrak{M}$ on déduit la même conclusion pour $\lambda \in \overline{\mathfrak{M}}$. Alors toute $\lambda \in \overline{\mathfrak{M}}$ est ôrtée par une réunion dénombrable de compacts de X, donc par X, donc $\lambda \in \mathcal{P}(X)$, et $\overline{\mathfrak{M}} \subset \mathcal{P}(X)$.

2a) supposons $\mathfrak{M}$ compact et X localement compact. Pour toute $\mu \in \mathfrak{M}$, soit K_μ un compact de X tel que $\mu(K_\mu) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, et soit $\mathcal{O}_\mu$ un ouvert relativement compact contenant K_μ. Appelons $\mathcal{V}_\mu$ le voisinage de μ dans $\mathcal{P}(X)$ défini par $\mathcal{V}_\mu = \{\nu \in \mathcal{P}(X) \; ; \; \nu(\mathcal{O}_\mu) \geq \mu(\mathcal{O}_\mu) - \frac{\varepsilon}{2}\}$. Puisque $\mathfrak{M}$ est compact , il est recouvert par un nombre fini de ces voisinages, soit $\mathcal{V}_{\mu_i}$, $1 \leq i \leq n$. Posons alors $K = \bigcup_{1\leq i\leq n} \overline{\mathcal{O}}_{\mu_i}$; c'est un compact de X. Pour toute $\mu \in \mathfrak{M}$, il existe un i tel que $\mu \in \mathcal{V}_{\mu_i}$, donc $\mu(K) \geq \mu(\mathcal{O}_{\mu_i}) \geq \mu_i(\mathcal{O}_{\mu_i}) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \mu_i(K_{\mu_i}) - \frac{\varepsilon}{2} \geq 1 - \varepsilon$, d'où le le résultat.

2b) soit $\mathfrak{M}$ compact, et supposons X intersection dénombrable décroissante de localement compacts X_n dont il est sous-espace. Dans chaque $\mathcal{P}(X_n)$, $\mathfrak{M}$ est compact (prop (III,2;1)), donc, pour ε donné, il existe un compact

$K_n \subset X_n$ tel que $\mu(K_n) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ pour toute $\mu \in \mathfrak{M}$. Posons $K = \bigcap_{n \geq 0} K_n$; pour toute $\mu \in \mathfrak{M}$ on a bien $\mu(K) \geq 1 - \varepsilon$, et $K \subset X$, d'où le résultat. Comme un espace polonais est un G_δ dans un compact, le théorème est démontré.

§ 5. LA TOPOLOGIE CYLINDRIQUE.

Soit E un espace vectoriel topologique séparé par son dual. Appelons $\check{\mathcal{P}}(E)$ l'espace des probabilités cylindriques sur E. Sur $\check{\mathcal{P}}(E)$, la topologie cylindrique est la moins fine rendant continues les applications $v : \check{\mathcal{P}}(E) \to \mathcal{P}(G)$, associées aux applications linéaires continues $v : E \to G$ de E dans des espaces vectoriels de dimension finie G.

Comme $\mathcal{P}(G)$ est séparé, et que les v séparent les points de $\check{\mathcal{P}}(E)$, c'est une topologie séparée.

Proposition (III;5,1)

Soit $\mathcal{P}(E_\sigma) \subset \check{\mathcal{P}}(E)$ l'espace des probabilités de Radon sur $E_\sigma = \sigma(E,E')$. Sur $\mathcal{P}(E_\sigma)$, la topologie étroite (correspondant à la topologie E_σ!) coïncide avec la topologie cylindrique.

Démonstration : la topologie étroite est trivialement plus fine. Il suffit donc de montrer que, si des $\lambda_j \in \mathcal{P}(E_\sigma)$ convergent cylindriquement vers $\lambda \in \mathcal{P}(E_j)$, elles convergent étroitement. Pour cela il suffit de montrer que, pour des ouverts $\mathcal{O}$ de E_σ formant une base de la topologie stable par réunions finies, on a $\liminf_j \lambda_j(\mathcal{O}) \geq \lambda(\mathcal{O})$. Or on obtient de tels ouverts en prenant $\mathcal{O} = v^{-1}(\Omega)$, Ω ouvert d'un espace vectoriel G de dimension finie, v linéaire continue de E dans G. Alors l'inégalité précédente s'écrit $\liminf_j (v(\lambda_j))(\Omega)$, ce qui résulte de la convergence cylindrique.
Le théorème de Prokhorov (III;4,1) a la conséquence triviale suivante, qui sera essentielle dans la théorie des applications radonifiantes :

Proposition (III;5,2)

Soient λ_j des probabilités de Radon sur E, convergeant cylindriquement vers une probabilité cylindrique λ. Supposons que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de E tel que $\lambda_j(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ pour tout j.

<u>Alors λ est de Radon sur E et, pour tout ε,</u> $\lambda(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$; <u>en outre les</u> λ_j <u>convergent vers λ étroitement sur E</u>.

<u>Démonstration</u> : soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des probabilités de Radon μ sur E, vérifiant $\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ pour tout ε. Il est relativement compact dans $\mathcal{P}(E)$ par (III;4,1), et fermé dans $\mathcal{P}(E)$, donc compact. Il est donc a fortiori compact pour la topologie plus faible $\check{\mathcal{P}}(E)$, donc fermé dans $\check{\mathcal{P}}(E)$, et, sur $\mathfrak{M}$, les topologies étroite et cylindrique coïncident, cqfd.