P. Saphar

(Annexe n°1) Analyse mathématique : applications p-sommantes et p-décomposantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A33_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE L. SCHWARTZ 1969-1970

ANALYSE MATHEMATIQUE : APPLICATIONS p-SOMMANTES ET p-DECOMPOSANTES

par P. SAPHAR

Annexe N°1

Dans cette note, on utilise en général les notations de (7), (8) et (9) et aussi les suivantes : E et F désignent deux espaces de Banach quelconques. On dit qu'un espace de Banach G est de type $\underline{L^p}$, $(1 \leq p \leq +\infty)$, si G est isomorphe en tant qu'espace normé à un espace $L^p(\Omega,\mu)$, (Ω est un espace localement compact et μ une mesure de Radon positive sur Ω). On dit que G est de type $\underline{C}$ si G est isomorphe en tant qu'espace normé à l'espace des fonctions continues sur un compact K et à valeurs scalaires. On note $\pi_p(E,F)$ l'espace des applications p-sommantes de E dans F $(0 \leq p \leq +\infty)$, cf. (4) et (13). On rappelle (cf. (9) et 10)) que pour $p \geq 1$, la norme induite sur $E' \otimes F$ par $\pi_p(E,F)$ est la norme tensorielle $g_p\backslash$. On dit qu'une application linéaire T de E dans F est p-sommante approximable si T appartient à $E' \hat{\otimes}_{g_p\backslash} F$. L'espace $E' \hat{\otimes}_{g_p\backslash} F$ est contenu dans l'espace $N_p^Q(E,F)$ des applications quasi p-nucléaires au sens de Pietsch et Persson (cf.(5)). Si E ou F vérifie l'hypothèse d'approximation, ces deux espaces sont identiques.

1. Un résultat sur les applications p-sommantes

A l'aide du théorème 2 de (9), on peut obtenir le résultat suivant :

Théorème 1 : soient F un espace de Banach, α un nombre réel tel que $1 \leq \alpha < +\infty$, C un espace de type $\underline{C}$. Considérons les conditions :

1) pour tout $\beta > \alpha$ (resp. pour tout $\beta \geq \alpha$), $\pi_\beta(C,F) = \mathcal{L}(C,F)$,

2) pour tout espace de Banach E et tout $\beta' < \alpha'$ (resp $\beta' \leq \alpha'$)

$$\pi_1(F,E) = \pi_{\beta'}(F,E) , \qquad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1 .$$

Alors 1) et 2) sont équivalentes.

Nous allons avoir besoin des notions d'applications p-décomposées et p-décomposantes introduites par Laurent Schwartz (cf. (11)) :

2) Applications p-décomposées

On désigne par $L^p(\Omega,\mu,E)$ l'espace des classes de fonctions définies sur Ω, à valeurs dans E, μ-mesurables et de puissance p-ième intégrables. Soit Δ_p la norme induite sur $E\otimes L^p$ par $L^p(\Omega,\mu,E)$. On désigne par $E\otimes_{\Delta_p} L^p$ le produit tensoriel $E\otimes L^p$ muni de Δ_p. On sait que $L^p(\Omega,\mu,E)$ est égal à l'espace complété $E\hat{\otimes}_{\Delta_p} L^p$. Il existe une application linéaire continue canonique de $E'\otimes_{\Delta_p} L^p$ dans $\mathcal{L}(E,L^p)$, qu'on peut prolonger par continuité à $E'\hat{\otimes}_{\Delta_p} L^p$. L'application prolongée est injective. On dit qu'un élément A de $\mathcal{L}(E,L^p)$ est p-décomposé si A appartient à l'image de $E'\hat{\otimes}_{\Delta_p} L^p$ par cette application. L'application A provient alors d'un élément f unique de $E'\hat{\otimes}_{\Delta_p} L^p$ et l'on pose $\Delta_p(A) = \Delta_p(f)$. L'espace des applications p-décomposées de E dans L^p, muni de la norme Δ_p, est donc un espace de Banach, noté $\Delta_p(E,L^p)$.

Généralisant un résultat de Persson (6) et Chevet (6), nous avons pu obtenir le :

<u>Théorème 2</u> : Soient p un nombre réel tel que $1<p<+\infty$ et L^p un espace de type <u>L^p</u>. Alors, sur $E\otimes L^p$, on a : $g_p \leq \Delta_p \leq /d_p$.
Sur $E\otimes L^1$, on a : $g_1 = \Delta_1 = /d_1$.
La relation $g_1 = \Delta_1$ est de Grothendieck (3).

<u>Corollaire</u> : soient G et G_1 deux espaces de type <u>L^p</u>, alors, sur $G\otimes G_1$, on a : $g_p = d_p = g_p\backslash = /d_p = \Delta_p$.

3) Applications p-décomposantes

On dit qu'une application linéaire continue u de E dans F est p-décomposante ($1\leq p\leq+\infty$) si, pour tout espace L^p de type <u>L^p</u> et pour tout élément A de $\mathcal{L}(F,L^p)$, Au est p-décomposée. On montre alors que l'application $A\to Au$, de $\mathcal{L}(F,L^p)$ dans $\Delta_p(E,L^p)$, est linéaire continue. Soit $m_{L^p}(u)$

sa norme. On désigne par $\mathfrak{D}_p(E,F)$ l'espace vectoriel des applications p-décomposantes de E dans F.

Utilisant le théorème 2, nous avons pu obtenir directement le résultat suivant de L. Schwartz (11), (voir aussi S. Kwapien (4)) :

Théorème 3 : Soient u une application linéaire continue de E dans F et p tel que $1<p<+\infty$.
Considérons les conditions :

1) u est p-décomposante

2) ${}^t u$ est p-sommante

3) u est 1-sommante approximable.

Alors 1) et 2) sont équivalentes. De plus, si elles sont vérifiées, on a, pour tout espace L^p : $m_{L^p}(u) \leq \pi_p({}^t u) \leq m_{l^p}(u)$, (4).
Posant alors $\delta_p(u) = \pi_p({}^t u)$, on conclut que $\mathfrak{D}_p(E,F)$, muni de δ_p, est un espace de Banach.

Remarque : pour $p = 1$, le résultat reste vrai si E est réflexif ou E' séparable. Si on ne fait pas d'hypothèse sur E, on a seulement : 1) implique 2) et 3) implique 1) et la relation (4).

Corollaire 1 : sur $E'\otimes F$, $\delta_p = /d_p$ pour $1\leq p<+\infty$. L'application canonique de $E'\hat{\otimes}_{\varepsilon_p} F$ dans $\mathfrak{D}_p(E,F)$ est isométrique.

Corollaire 2 : pour que u soit une application p-décomposante de E dans F $(1\leq p<+\infty)$ limite pour la norme δ_p d'applications de rang fini, il faut et il suffit que u s'exprime sous la forme :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) y_i \qquad \text{avec :}$$

$y_i \in F$ et $N_p(y_i) < +\infty$, $\varphi_i \in C(\varepsilon'')$, ($\varepsilon''$ est la boule unité faible du bidual de E) et $M_{p'}(\varphi_i) < +\infty$.

Si F est réflexif ou F' séparable et si de plus F' ou E' vérifient l'hypothèse d'approximation, on peut montrer que, si on note i l'injection canonique de F dans F", toute application p-décomposante u de E dans F est telle que iu s'identifie à un élément de $E'\hat{\otimes}_{/d_p} F''$.

<u>Remarque</u> : puisque $/d_p \leq d_p$, on retrouve le fait, qu'en général, $\mathcal{L}^p_d(E,F) \subset \mathfrak{D}_p(E,F)$, (cf. Badrikian (1)).

<u>Corollaire 3</u> : si $1<p<+\infty$, on a :

$$\mathfrak{D}_p(E,L^p) \subset \Delta_p(E,L^p) \subset \mathcal{L}^p_g(E,L^p) .$$

<u>Corollaire 4</u> : soit $u \in \mathcal{L}(L^{p'},L^p)$, $(1<p<+\infty)$. Considérons les conditions :

1) u est p-nucléaire à gauche
2) u est p-nucléaire à droite
3) u est p-sommante
4) ${}^t u$ est p-sommante
5) u est p-décomposée
6) ${}^t u$ est p-décomposée
7) u est p-décomposante
8) ${}^t u$ est p-décomposante.

Alors ces huit conditions sont équivalentes.
L'équivalence entre 1) et 2) est de S. Chevet (2). L'équivalence entre 1), 3) et 5) est de Persson (6).

<u>Théorème 4</u> : Soient E et G deux espaces de Banach tels que G soit isomorphe en tant qu'espace vectoriel topologique à un sous-espace M d'un espace de type <u>L^p</u> et u un élément de $\mathcal{L}(E,G)$. On désigne par i l'injection canonique de M dans L^p et par A l'isomorphisme de G sur M. Alors, si iAu est p-décomposée, u est quasi p-nucléaire et l'on a : $\pi_p(u) \leq |A^{-1}| \Delta_p(iAu)$.

<u>Théorème 5</u> : on fait sur G les mêmes hypothèse qu'au théorème 4. Alors, sur $E \otimes G$, on a : $g_{p\backslash} \leq |A^{-1}|\,|A| /d_p$.

<u>Corollaire</u> : $\mathfrak{D}_p(E,G) \subset N^Q_p(E,G)$.

Théorème 6 : soit H un espace de Hilbert. Alors, pour tout p tel que $1 \leq p < +\infty$, il existe une constante $\lambda_p > 0$, telle que sur $E \otimes H$, on ait : $g_1 \backslash \leq \lambda_p \, /d_p$. De plus : $\mathfrak{D}_p(E,H) \subset E' \hat{\otimes}_{g_1\backslash} H$.

Théorème 7 : on fait sur G les mêmes hypothèses qu'au théorème 4 avec de plus $1 < p < 2$. Alors, pour tout r tel que $1 \leq r < p$, il existe une constante $\mu_r > 0$, telle que sur $E \otimes G$, on ait : $g_1 \backslash \leq \mu_r \, /d_r$. De plus, $\mathfrak{D}_r(E,G) \subset N_1^Q(E,G)$.

4. Applications

Dans ce paragraphe, L désigne un espace de type $\underline{L}^1$, H un espace de Hilbert, C un espace de type $\underline{C}$, L^p un espace de type $\underline{L}^p$. A partir des théorèmes précédents, on peut obtenir les résultats suivants :

- $\mathfrak{L}(L,L^p) = I_q(L,L^p) = \pi_q(L,L^p)$ pour $2 < p < +\infty$ et $p < q \leq +\infty$ (on désigne par $I_q(L,L^p)$ l'ensemble des applications q-intégrales de L dans L^p, cf. (5) ou (9)),
- $\mathcal{C}(L,L^p) = \mathfrak{L}_g^q(L,L^p)$, pour $2 < p < +\infty$ (on désigne par $\mathcal{C}(L,L^p)$ l'ensemble des applications compactes de L dans L^p),
- $\mathfrak{D}_q(C,L^p) \subset \mathfrak{L}_g^1(C,L^p)$ pour $1 < p < 2$ et $1 \leq q < p$,
- $\pi_q(L^p,E) = \pi_1(L^p,E) \subset \mathfrak{D}_1(L^p,E)$ pour $2 < p < +\infty$ et $1 \leq q < p'$,
- $\mathfrak{L}(L,H) = I_q(L,H)$, $1 < q \leq +\infty$.
- $\mathcal{C}(L,H) = \mathfrak{L}_g^q(L,H)$, $1 < q \leq +\infty$

(1) A. Badrikian : Comptes Rendus, t 265, 1967, p.662-664.

(2) S. Chevet : Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. geb. 11, 1969, p.120-138.

(3) A. Grothendieck : Mem. of the Amer. Soc. (1955).

(4) S. Kwapien : On a theorem of Laurent Schwartz and its applications to absolutely summing operators (à paraître).

(5) A. Pietsch, A. Persson : Studia Math. t 33, 1969, p.19-62.

(6) A. Persson : Studia Math., 1969. p. 213.

(7) P. Saphar : Comptes Rendus, t 266, 1968, p.526-528.

(8) Comptes Rendus, t 266, 1968, p.809-811.

(9) Comptes Rendus, t 268, 1969, p.528-531.

(10) Studia Math., 1970, (à paraître).

(11) L. Schwartz : Séminaire de l'Ecole Polytechnique, 1969-1970, Paris.

(12) Comptes Rendus, t 268, 1969, p.1410-1413.

(13) A. Pietsch : Studia Math., 28, 1967, p.333-353.