A. BADRIKIAN

Mesures cylindriques

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. nº 2, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A2_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E L. S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

MESURES CYLINDRIQUES

par A. BADRIKIAN

Exposé n°2 17.10.1969

I. DEFINITIONS RELATIVES AUX MESURES CYLINDRIQUES.

Soit E un espace localement convexe séparé, $\mathfrak{N}$ la famille des sous-espaces fermés de E de codimension finie : c'est une base de filtre.

Soit $N \in \mathfrak{N}$; on désigne par E_N l'espace E/N : c'est un espace vectoriel de dimension finie.

Si $N_1 \subset N_2$, on a une application linéaire canonique de E_{N_1} sur E_{N_2} ; on l'appellera $\pi_{N_2 N_1}$. Les applications $\pi_{N_2 N_1}$, $N_1 \subset N_2$, satisfont la relation de cohérence :

$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \qquad \pi_{N_3 N_1} = \pi_{N_3 N_2} \; \pi_{N_2 N_1}$$

Par conséquent, les E_N, $N \in \mathfrak{N}$, forment un système projectif d'espaces vectoriels (relativement aux $\pi_{N_1 N_2}$).

Définition : E désignant un espace localement convexe séparé, on appelle mesure cylindrique sur E un système projectif $(E_N, \mu_N)_{N \in \mathfrak{N}}$, où où μ_N est une probabilité borélienne sur E_N.

Remarque 1. Si on remplace la topologie de E par n'importe quelle topologie localement convexe séparée donnant le même dual, les sous-espaces fermés sont les mêmes. Par conséquent, deux topologies (localement convexes séparées) donnant même dual ont les mêmes mesures cylindriques.

Remarque 2. Pour définir une mesure cylindrique, il suffit de se donner un système cofinal de sous-espaces vectoriels fermés de codimension finie.

Donnons un résultat qui permet de remplacer les quotients de dimension finie par n'importe quel espace de dimension finie.

Proposition 1. Se donner une mesure cylindrique sur E revient à se donner pour tout espace vectoriel de dimension finie X et toute application linéaire continue f de E dans X une probabilité de Radon sur

X, μ_f, les μ_f satisfaisant la relation de cohérence :

$$E \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y$$

$$\mu_{g \circ f} = g(\mu_f)$$

Démonstration. Immédiate, car f se factorise en

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "f"'] & E_M \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

avec $M = \operatorname{Ker} f$.

On peut encore voir les choses d'une autre façon. Soit F le dual de E et soit $\{y_1, \dots, y_n\}$ une famille finie d'éléments de F. L'application $x \longrightarrow (\langle x, y_i \rangle)_{1 \leq i \leq n}$ est linéaire continue de E dans $\mathbb{R}^n$. Il lui correspond donc une mesure que l'on désignera par $\mu_{y_1 \dots y_n}$. Inversement d'ailleurs toute application linéaire continue de E dans un $\mathbb{R}^n$ peut être définie par une famille $\{y_1 \dots y_n\}$.

Par conséquent, se donner une mesure cylindrique sur E revient à se donner pour toute famille finie d'éléments de $F\{y_1, \dots, y_n\}$ une mesure $\mu_{y_1 \dots y_n}$ sur $\mathbb{R}^n$, les $\mu_{y_1 \dots y_n}$ étant cohérentes au sens suivant : soit le diagramme $(m \leq n)$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "v"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "w"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

u s'exprime par $(y_1, \dots, y_n)$; v par $(z_1, \dots, z_m)$ et w s'exprime par une matrice w : $z_i = \sum w_{ij} y_j$

$$\mu_{z_1, \dots, z_m} = w(\mu_{y_1 \dots y_n})$$

Donnons des exemples de mesures cylindriques

Exemple 1. Toute mesure de Radon sur E est une mesure cylindrique : on prend $\mu_N = \Pi_N(\mu)$.

L'application qui à une mesure de Radon associe la mesure cylindrique correspondante est injective : c'est le théorème de PROKHOROV.

Exemple 2. (Mesure cylindrique qui n'est pas de Radon).

Soit F un espace vectoriel, E_1 et E_2 deux espaces vectoriels en dualité avec F et supposons que $E_1 \subset E_2$ $(E_1 \neq E_2)$.

Quand on a deux espaces en dualité les sous-espaces (faiblement) fermés de codimension finie de l'un sont en correspondance bijective avec les sous-espaces de dimension finie; N_i l'orthogonal de M pour la dualité entre F et E_i $(i=1,2)$; on a :

$$E_1 N_1 \simeq E_2/N_2 \simeq (M)^*.$$

Soit a dans $E_2 \setminus E_1$ et δ_a la mesure sur E_2; δ_a définit une mesure cylindrique sur E_1 qui ne peut être définie par une mesure de Radon sur E_1.

On verra un autre exemple plus loin.

Cela étant, on peut appliquer PROKHOROV pour avoir une C.N.S. pour qu'une mesure cylindrique sur un espace localement convexe E séparé soit une mesure de Radon. On a besoin de la forme générale du théorème de PROKHOROV, car E n'est pas égal à $\varprojlim E_N$.

II. OPERATIONS SUR LES MESURES CYLINDRIQUES.

a) Produit tensoriel.

Lemme. Soient E_1 et E_2 deux espaces localement convexes séparés; les sous-espaces fermés de $E_1 \times E_2$ de la forme $N_1 \times N_2$ (N_i, sous-espace fermé de E_i de codimension finie; $i = 1,2$) forment un système cofinal.

Preuve : $E_1 \times E_2$ est en dualité avec $F_1 \times F_2$ (F_i; $i=1,2$, dual de E_i). Soit N un sous-espace fermé de $E_1 \times E_2$ de codimension finie, $N^{\perp}_1$ et N_2 les projections de $N^{\perp}$; alors :

$$N^{\perp} \subset N^{\perp}_1 \times N^{\perp}_2$$

et
$$(N^{\perp})^{\perp} = N \supset (N^{\perp}_1 \times N^{\perp}_2)^{\perp} = N_1 \times N_2 \ ;$$

donc :
$$N \supset N_1 \times N_2$$

A partir de là, on définit le produit tensoriel de mesures cylindriques. Soit μ^i une mesure cylindrique sur E_i et soient les mesures boréliennes $\mu^1_{N_1} \otimes \mu^2_{N_2}$ sur $E_{N_1} \times E_{N_2} \simeq E_1 \times E_2 / N_1 \times N_2$, $N_i \in \mathfrak{M}_i$, $i = 1,2$ ($\mathfrak{M}_i$, famille des sous-espaces fermés de E_i de codimension finie). Le produit tensoriel de μ^1 et de μ^2 est le système projectif

$$E_1 \times E_2 \quad N_1 \times N_2 \quad \mu^1_{N_1} \otimes \mu^2_{N_2})_{N_1 \in \mathfrak{M}_1,\ N_2 \in \mathfrak{M}_2}$$

- b) <u>Image par une application linéaire continue u</u>

Soient E_1 et E_2 deux espaces localement convexes séparés, $u \;\; E_1 > E_2$ une application linéaire continue et μ une mesure cylindrique sur E_1. On définit une mesure cylindrique sur E_2, soit $u(\mu)$, en utilisant les applications linéaires continues g_i de E_i dans un $\mathbb{R}^n$ $(i=1,2)$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "g_1"'] & E_2 \arrow[d, "g_2"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$$u_{g_1} = (u(\mu))_{g_2}$$

- c) <u>Convolution des mesures cylindriques</u>.

<u>Définition</u> Soit E un espace localement convexe séparé, μ et ν deux mesures cylindriques sur E et soit l'application s_E : $(x,y) \longrightarrow x+y$ de $E \times E$ dans E.

La convolée $\mu * \nu$ de μ et ν est la mesure cylindrique image de $\mu \otimes \nu$ par s_E :

$$\mu * \nu = s_E(\mu \otimes \nu).$$

<u>Propriété immédiate</u>. Soient E et F deux espaces localement convexes séparés, u $F \longrightarrow F$ une application linéaire faiblement continue et μ et deux mesures cylindriques sur E. Alors

$$u(\mu * \nu) = u(\mu) * u(\nu).$$

<u>Preuve</u> On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
E \times E & \xrightarrow{\quad u \times u \quad} & F \times F \\
\mu \otimes \nu & \xrightarrow{\qquad\qquad} & u(\mu) \otimes u(\nu) \\
{\scriptstyle s_E}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle s_F} \\
E & \xrightarrow{\quad u \quad} & F \\
\mu * \nu & & u(\mu) * u(\nu)
\end{array}$$

En particulier, si f est une application linéaire continue de E dans $\mathbb{R}^n$

$$(\mu * \nu)_f = \mu_f * \nu_f$$

- d) <u>Transformée de Fourier d'une mesure cylindrique</u>.

<u>Définition</u>. Soit E un espace localement convexe séparé, E' son dual, μ une mesure cylindrique sur E.

On appelle transformée de Fourier de μ l'application φ de E' dans C définie par :

$$\varphi(x') = \mathfrak{F}(\mu_{x'})(1) = \int_{\mathbb{R}} e^{it} \mu_{x'}(dt) \qquad (x' \in E').$$

On note aussi φ par $\mathfrak{F}(\mu)$.

<u>Propriétés</u>.

- <u>1. Transformée de Fourier d'une convolution</u>.

Soit x' dans E'; on sait que :

$$(\mu * \nu)_{x'} = \mu_{x'} * \nu_{x'}$$

et
$$\mathfrak{F}(\mu_{x'} * \nu_{x'})(t) = \mathfrak{F}(\mu_{x'})(t)\, \mathfrak{F}(\nu_{x'})(t) \qquad (t \in \mathbb{R});$$

et par conséquent :

$$\mathfrak{F}(\mu * \nu)(x') = \mathfrak{F}(\mu)(x')\, \mathfrak{F}(\nu)(x') \qquad \forall x' \in E'$$

- <u>2. Transformée de Fourier de l'image d'une mesure cylindrique</u>.

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue, μ une mesure cylindrique sur E et $\nu = u(\mu)$. Pour tout y' de F', on a :

$$\mathfrak{F}(\nu)(y') = \mathfrak{F}(y'(\nu))(1) = \mathfrak{F}(y'(u(\mu)))(1) = \mathfrak{F}(t_u(y')(\mu))(1).$$

Donc :
$$\mathfrak{F}(u(\mu))(y') = \mathfrak{F}(\mu)(t_u(y')) \qquad \forall y' \in F'$$

<u>Proposition</u>. La transformée de Fourier établit une bijection entre les mesures cylindriques sur E et les applications $\varphi : E' \longrightarrow C$ de type positif. telles que $\varphi(0) = 1$ et dont les restrictions à tous les sous-espaces de E de dimension finie sont continues.

Application : Mesure gaussienne normale sur un Hilbert.

III. MESURES CYLINDRIQUES CONCENTREES.

- a) Concentration cylindrique.
- b) Concentration scalaire.

<u>Définition 1</u> Une mesure cylindrique μ sur l'espace localement convexe séparé E est dite scalairement concentrée à ε-près sur $A \subset E$ si, pour tout hyperplan fermé N de E, la mesure μ_N (sur E/N) associée est concentrée à ε-près sur $\pi_N(A)$, c'est-à-dire :

$$(\mu_N)_*(\pi_N(A)) > 1-\varepsilon.$$

Cela équivaut à : pour toute forme linéaire x' sur E, la mesure $\mu_{x'}$ est concentrée à ε-près sur $x'(A)$.

<u>Définition 2</u>. Si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties de E, μ est dite scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A_ε dans $\mathfrak{S}$ tel que μ soit scalairement concentrée à ε-près sur A_ε.

Dans ce qui suit on se donnera une famille de parties de E, soit $\mathfrak{S}$, ayant les propriétés suivantes :

1. $\mathfrak{S}$ est filtrante croissante.
2. $\mathfrak{S}$ est invariante par homothétie.
3. $\mathfrak{S}$ admet un système fondamental de parties <u>équilibrées</u> bornées (pas forcément convexes).

On a alors le résultat suivant.

<u>Théorème</u>. Soit E un espace localement convexe séparé, F son dual, μ une mesure cylindrique sur E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) μ est scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée;

b) $\tau(\mu)$ est continue de $F_{\mathfrak{S}}$ dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Fixons d'abord des notations. Soit A une partie de E. Soit p_A la jauge du polaire A^0 de A, c'est-à-dire :

$$p_A(y) = \inf \{\lambda,\ \lambda > 0;\ y \in \lambda\ A^0\}.$$

Si A^0 n'est pas absorbant, on peut avoir $p_A(y) = +\infty$.

a ⇒ b

Nous aurons besoin d'un lemme.

Lemme 1. Si μ est scalairement concentrée a ε-près sur A équilibré, sa transformée de Fourier φ satisfait :

(1) $$|1 - \varphi(y)| \leq 2\varepsilon + p_A(y), \qquad \forall y \in F$$

Preuve. Soit $y \in F$ et ν la mesure μ_y; ν est concentrée à ε-près sur $y(A)$. Or, par définition :

$$y(A) \subset [-p_A(y),\ p_A(y)]$$

et $$|1 - \varphi(y)| = \left|\int_{\mathbb{R}} (1 - e^{it})\mu_y(dt)\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |1 - e^{it}|\ \mu_y(dt).$$

Si $p_A(y) < +\infty$, on a :

$$|1 - \varphi(y)| \leq \int_{|t| \leq p_A(y)} |1 - e^{it}|\mu_y(dt) + \int_{|t| > p_A(y)} |1 - e^{it}|\mu_y(dt).$$

Or : $$|1 - e^{it}| \leq \inf(2, |t|).$$

Donc : $$\int_{|t| \leq p_A(y)} |1 - e^{it}|\mu_y(dt) \leq p_A(y)$$

et $$\int_{|t| > p_A(y)} |1 - e^{it}|\mu_y(dt) \leq 2\varepsilon\ ;$$

d'où (1).

Si $p_A(y) = +\infty$ le résultat est évident. Et ainsi le lemme est complètement démontré.

On en déduit : $$y \in \varepsilon A^0 \Rightarrow |1 - \varphi(y)| \leq 3\varepsilon.$$

Cela étant, on peut démontrer que a implique b. En effet, φ est continue, si elle est continue à l'origine, c'est-à-dire, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage de zéro V_ε dans F, tel que :

$$y \in V_\varepsilon \Rightarrow |1 - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

Il suffit de considérer A_ε dans $\mathfrak{S}$ et tel que μ soit scalairement concentrée à $\frac{\varepsilon}{3}$ -pres sur A_ε et de prendre $V_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3} A^o{}_\varepsilon$ (qui est un voisinage pour F_σ).

<u>Démontrons maintenant</u> : " b $\Rightarrow$ a ".

Nous aurons besoin d'un lemme.

<u>Lemme 2</u>. Soit P une probabilité sur $\mathbb{R}$, Ψ sa transformée de Fourier. Supposons que pour tout τ tel que $|\tau| \leq \alpha$ ($\alpha > 0$, $\alpha \leq \infty$), on ait :

$$|1 - \Psi(\tau)| \leq \varepsilon.$$

Alors, pour tout $c > 0$,

$$P\{|t| \geq c\} \leq \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1} \left(\varepsilon + \frac{2}{c^2\alpha^2}\right).$$

<u>Preuve</u>. On a :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1 - \exp\left(-\frac{t^2}{2c^2}\right)\right) P(dt) \geq \int_{|t| \geq c} \left(1 - \exp\left(-\frac{t^2}{2c^2}\right)\right) P(dt)$$

$$\geq \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) \int_{|t| \geq c} P(dt).$$

Donc :

$$P\{|t| \geq c\} \leq \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e-1}} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{\frac{t^2}{2c^2}}\right) P(dt).$$

Or, $t \longrightarrow e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{c^2}}$ est transformée de Fourier de $\tau \longrightarrow \frac{c}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\tau^2 c^2}$.

Donc :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{c^2}} P(dt) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Psi(\tau)\, e^{-\frac{1}{2} c^2\tau^2} d\tau$$

$$= \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Psi(\tau)\, e^{-\frac{1}{2} c^2\tau^2} d\tau$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{c^2}}\right) P(dt) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (1 - \Psi(\tau))\, e^{-\frac{1}{2} c^2\tau^2} d\tau.$$

En outre :

$$|1 - \Psi(\tau)| \leq \varepsilon + 2\frac{\tau^2}{\alpha^2}, \qquad \forall\ \tau \in \mathbb{R}.$$

Donc :
$$P\{|t| \geq c\} \leq \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e-1}} \quad \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\varepsilon + \frac{2\tau^2}{\alpha^2}) e^{-\frac{1}{2}c^2\tau^2} d\tau$$
$$\leq \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e-1}} (\varepsilon + \frac{2}{\alpha^2 c^2}).$$

Et le lemme est démontré.

On peut maintenant démontrer que b implique a. On suppose donc que :

$$\forall \ \eta > 0, \quad A \in \mathfrak{S} : y \in A^o \Rightarrow |1-\varphi(y)| < \eta.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit A dans $\mathfrak{S}$ tel que :

$$y \in A^o \Rightarrow |1-\varphi(y)| < \frac{\sqrt{e-1}}{2\sqrt{e}} \varepsilon ;$$

soit $y \in F$ et Ψ la transformée de Fourier de $\nu = \mu_y$; on a :

$$\Psi(\tau) = \varphi(\tau y) \qquad (\tau \in \mathbb{R})$$

Donc :
$$\tau y \in A^o \Rightarrow |1-\Psi(\tau)| < \frac{\sqrt{e-1}}{2\sqrt{e}} \varepsilon$$

ou encore :
$$|\tau| \leq \frac{1}{p_A(y)} \Rightarrow |1-\Psi(\tau)| \leq \frac{\sqrt{e-1}}{2\sqrt{e}} \varepsilon.$$

Appliquons alors le lemme 2 avec $\alpha = \dfrac{1}{p_A(y)}$; on obtient :

$$\nu\{|t| \geq c\} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2p_A^2(y)}{c^2} \quad \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e-1}} \qquad (c > 0).$$

Posons : $\delta = \delta_2 = \dfrac{4\sqrt{e}}{\varepsilon(\sqrt{e}-1)}$ et soit c_y une valeur de c telle que $\delta p_A(y) = c_y$. D'où, si $p_A(y)$ est non nul,

$$\nu\{|t| \geq c_y\} \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire $\nu = \mu_y$ est concentrée à ε-près sur $]-c_y, c_y[$; si $p_A(y)=0$, $\nu = \mu_y$ est concentrée à ε-près sur $\{0\}$.

Puisque A est équilibré (on peut le choisir ainsi), on a :

$$]-p_A(y), \ p_A(y)[\subset y(A) \subset [-p_A(y), \ p_A(y)].$$

En effet :

$$p_A(y) = \inf\{\lambda, \lambda > 0;\ y \in \lambda A^o\};$$

A^o étant lui aussi équilibré, on a :

$$p_A(y) = \inf\{|\lambda|, \qquad y \in \lambda A^o\}.$$

Donc :

$$p_A(y) = \inf\{\lambda, \lambda > 0\ ;\ y(A) \subset [-\lambda, \lambda]\}.$$

Donc $y(A)$ est contenu dans $[-p_A(y), p_A(y)]$ et n'est contenu dans aucun intervalle fermé $[-\lambda, \lambda]$ avec $\lambda < p_A(y)$. D'où le résultat annoncé.

Ainsi, si :

$$p_A(y) \neq 0$$

$$y(\delta A) \supset]-c_y, c_y[.$$

D'où (δ étant indépendant de y dans F), μ est scalairement concentrée à ε-près sur δA ■

SEMINAIRE L. SCHWARTZ 1969-1970

MESURES CYLINDRIQUES, par A. BADRIKIAN

Exposé N° 2

E R R A T A

Pages	Au lieu de :	Lire :
page de garde	17.10.1969	10.11.1969
1. Ligne 15	probabilité borélienne sur E_N.	probabilité de Radon sur E_N.
3. Ligne 8	$E_1 N_1 \simeq E_2/N_2 \simeq (M)^*$	$E_1/N_1 \simeq E_2/N_2 \simeq (M)^*$
3. Ligne 9	Soit a dans $E_2 \setminus E_1$ et δ_a la mesure sur E_2 ;	Soient a dans $E_2 \setminus E_1$ et la mesure δ_a sur E_2 ;
4. Ligne 6	$E_1 x E_2 \quad N_1 x N_2 \quad \mu^1{}_{N_1} \otimes \mu^2 \ldots$	$(E_1 x E_2 / N_1 x N_2, \; \mu^1 N_1 \otimes \mu^2 \ldots$
4 Ligne 7	linéaire continue u.	linéaire faiblement continue u
4 Ligne 8	linéaire continue...	linéaire faiblement continue...,