

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. SCHWARTZ

Suite de l'exposé XXIV et théorème de dualité en situation générale

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 25, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970__A29_0

© Séminaire Laurent Schwartz
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77
(633)

S E M I N A I R E L . S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

SUITE DE L'EXPOSE XXIV

=====

et

THEOREME DE DUALITE EN SITUATION GENERALE

=====

Exposé N° 25

25 Mai 1970

§ 1. SUITE DE L'EXPOSE XXIV.

Voici une autre application directe du théorème de dualité :

Proposition (XXV,1;1) : Soient E un Hilbert, G un Banach, u une application linéaire continue de E dans G. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) u est 2-radonifiante ;
- 2) u est p-radonifiante pour tout $p \geq 0$;
- 3) u se factorise par $E \rightarrow S \rightarrow G$, où S est un Hilbert, et $E \rightarrow S$ de Hilbert-Schmidt.

Si ces conditions sont réalisées, ${}^t u$ est p-radonifiante de $\sigma(G', G)$ dans E' pour tout $p \geq 0$. Si, plus généralement, u est q-radonifiante pour un $q \geq 0$ fini, ou même si simplement l'image $u(\gamma)$ de la probabilité cylindrique de Gauss γ de E est de Radon sur $\sigma(G'', G')$, alors ${}^t u$ est approximativement p-radonifiante de $\sigma(G', G)$ dans E, pour tout $p \geq 0$.

Démonstration : D'abord $1 \Rightarrow 3$. En effet, la factorisation de Pietsch (prop. VII,3;4) : $E \rightarrow S \rightarrow G$, donne un $S \in L^2(K, \mu)$ de Hilbert, et $E \rightarrow S$ 2-sommante donc de Hilbert-Schmidt.

Alors $3 \Rightarrow 2$, et trivialement $2 \Rightarrow 1$. Si ces conditions sont réalisées, on a, par transposition, une factorisation de ${}^t u$ par $\sigma(G', G) \rightarrow S' \rightarrow E'$, où $S' \rightarrow E'$ est de Hilbert-Schmidt, donc ${}^t u$ est p-radonifiante pour tout $p \geq 0$.

Mais supposons seulement que $u(\gamma)$ soit de Radon dans $\sigma(G'', G')$. Le théorème de dualité (corollaire 5 de la prop. (XXIV,3;1)) montre que ${}^t u$ est approximativement 0-radonifiante de $\sigma(G', G)$ dans E, puisque γ est de cotype 0.

Remarques : 1) Il peut arriver que $u(\gamma)$ soit de Radon sans que u soit 2-radonifiante. Considérons par exemple une suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables gaussiennes réelles indépendantes ; on voit facilement qu'elle définit la probabilité cylindrique de Gauss γ sur l^2 . Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, avec $|\alpha_n| = O\left(\sqrt{\frac{1}{\log n}}\right)$.

Alors

$$P_r\{|\alpha_n Z_n| > 1\} = 2 \int_{\frac{1}{\alpha_n}}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt \leq \text{const.} \times e^{-\pi/\alpha_n^2} \leq \text{const.} \frac{1}{n},$$

terme général d'une série convergente. Donc la suite $(\alpha_n Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est presque sûrement bornée. De là on déduit aisément que l'image de γ par la multiplication $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\alpha} (\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Radon. Mais les multiplications radonifiantes dans les espaces de suites sont connues et seront étudiées ultérieurement (exposé XXVI). L'application α , d'après la prop. (XXV,1;1), ne peut être 2-radonifiante de l^2 dans $\sigma(l^\infty, l^1)$, que si elle est 0-radonifiante, et ceci exige $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^2 < +\infty$.

Corollaire : Sur \mathbb{R}^n , l'injection canonique de M^α dans $(L_{loc}^2)^\beta$ (notations du corollaire 1 de la prop. (XIV,4;1)) est p-radonifiante pour tout $p \geq 0$, si $\frac{\alpha-\beta}{n} > \frac{1}{2}$.

Démonstration : Raisonnons sur le tore \mathbb{T}^n au lieu de \mathbb{R}^n . On sait que l'application identique de $(L^2)^{-\beta}$ dans $C^{-\alpha}$ est q-radonifiante si $\frac{\alpha-\beta}{n} > \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$, par le corollaire cité. Comme $(L^2)^{-\beta}$ est hilbertien (sa topologie est transportée de celle de L^2 !), la prop. (XXV,1;1) dit que l'injection canonique de $(C^{-\alpha})' = M^\alpha$ dans $((L^2)^{-\beta})' = (L^2)^\beta$ est p-radonifiante pour tout $p \geq 0$. Comme ceci est valable pour tout q fini, il suffit que $\frac{\alpha-\beta}{n} > \frac{1}{2}$ pour que la conclusion subsiste. Le passage de \mathbb{T}^n à \mathbb{R}^n se fait par les techniques de l'exposé XIV.

§ 2. LE THEOREME DE DUALITE EN SITUATION GENERALE. CHANGEMENT PREALABLE DE NOTATIONS.

Reprenons le corollaire 1 de la prop. (XXIV,3;1), et changeons les notations. Les espaces importants sont E' et G ; appelons-les U et V , et remplaçons α' par α . La probabilité cylindrique ρ est sur $\sigma(G', G) = \sigma(V', V)$. Ce n'est pas là un fait essentiel ; elle pourrait être aussi bien une probabilité cylindrique sur n'importe quel autre espace de dual V ; c'est

d'ailleurs simplement une classe d'isonomie de fonctions aléatoires linéaires sur V . Par ailleurs, son cotype (\bar{B}, β) s'exprime par : $\beta(\eta) \leq \bar{B}(\eta(\rho))$, pour tout $\eta \in V$. Nous omettrons V' dans les notations, et nous dirons que ρ est une probabilité cylindrique de cotype (\bar{B}, β, V) . Ensuite $v(\rho)$ est de Radon sur U , d'ordre (\bar{A}, α) ; c'est bien ici U qui est important, (et qui, dans la variante indiquée après la proposition (XXIV,3;1), peut être E' avec une topologie plus fine que $\sigma(E', E)$, pourvu que $v(\rho)$ soit de Radon d'ordre (\bar{A}, α) pour cette topologie, et α semi-continue inférieurement); on dira que $v(\rho)$ est de Radon d'ordre (\bar{A}, α, U) . Cherchons les résultats obtenus sur λ . On part de λ , probabilité cylindrique sur E ou $\sigma(U', U)$, de type (A, α) approximable; ici encore, on omettra de citer U' et on dira que λ est une probabilité cylindrique de type (A, α, U) approximable la propriété de type étant : $A(\xi(\lambda)) \leq \alpha(\xi)$ pour tout $\xi \in U$. Et on trouvera $u(\lambda)$ de Radon sur V , d'ordre (B, β) , ce qu'on exprimera en disant qu'elle est de Radon d'ordre (B, β, V) . Les 4 propriétés relatives à ρ, λ , ne font ainsi intervenir que U, V , sans citer U', V' :

ρ de cotype (\bar{B}, β, V) ,
 $v(\rho)$ de Radon d'ordre (\bar{A}, α, U) ;
 λ de type (A, α, U) approximable ,
 $u(\lambda)$ de Radon d'ordre (B, β, V) .

§ 3. LE THEOREME DE DUALITE EN SITUATION GENERALE. ENONCE ET DEMONSTRATION.

Mais alors il devient raisonnable d'imaginer que U et V sont des sous-espaces d'espaces plus grands, sur lesquels opèrent u et v . Par exemple, en analyse, on considère souvent des opérateurs de l'espace \mathfrak{D}' des distributions (par exemple des opérateurs différentiels à coefficients C^∞), et on regarde ultérieurement sur quels sous-espaces de \mathfrak{D}' ils opèrent. Il sera donc raisonnable de supposer U et V sous-espaces de \mathfrak{D}' , u et v opérant de \mathfrak{D}' dans \mathfrak{D}' (mais on ne doit pas oublier que moralement ou en fait, v opérera de V' dans U et u de U' dans V , et non de V dans U ou de U dans V).

On aura donc d'abord la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xleftarrow{v} & G \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 U & & \\
 \downarrow & & \\
 \mathcal{E} & \xleftarrow{v} & \mathcal{G}
 \end{array}$$

où les injections $G \rightarrow \mathcal{G}$, $E \rightarrow U \rightarrow \mathcal{E}$, sont continues, G dense dans \mathcal{G} et E dans \mathcal{E} ; v sera une application faiblement continue de \mathcal{G} dans \mathcal{E} , mais aussi faiblement continue de G dans E . Par exemple,

$$E = G = \mathfrak{D}, \mathcal{E} = \mathcal{G} = \sigma(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}), U = L^p.$$

Ensuite, en introduisant les duals E' , G' , \mathcal{E}' , \mathcal{G}' , toujours munis de la topologie *-faible et en posant ${}^t v = u$, on a aussi une configuration transposée, où V est un nouvel espace :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E}' & \xrightarrow{u} & \mathcal{G}' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 & & V \\
 & & \downarrow \\
 E' & \xrightarrow{u} & G'
 \end{array}$$

et nous oublierons les duals U' et V' . On suppose $V \rightarrow G'$ continue. Dans l'exemple plus haut, $\mathcal{E}' = \mathcal{G}' = \sigma(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$, $E' = G' = \sigma(\mathfrak{D}', \mathfrak{D})$. Si $V = L^q$, on voit que $V \rightarrow G'$ est bien continue, mais pas $\mathcal{G}' \rightarrow V$ (qui serait $\sigma(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}') \rightarrow L^q$). Soit ρ une probabilité cylindrique sur G . On se donne un poids \bar{B} , une fonction $\beta \geq 0$ sur V , et on dira que ρ est de cotype (\bar{B}, β, V) , si $\beta(\eta) \leq \bar{B}(\eta(\rho))$ pour $\eta \in \mathcal{G}'$. En fait β n'intervient que comme fonction ≥ 0 sur \mathcal{G}' , mais on écrit (\bar{B}, β, V) , parce que β est donnée sur V (ce sera essentiel plus loin). On dira que $v(\rho)$ est de Radon d'ordre (\bar{A}, α, U) , où \bar{A} est un poids et α une fonction semi-continue inférieurement ≥ 0 sur U , si $v(\rho)$ est de Radon sur \mathcal{E} , image, par l'injection continue $U \rightarrow \mathcal{E}$, d'une

probabilité de Radon ν sur U , d'ordre (\bar{A}, α) (ν est nécessairement unique, car $\mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E})$ est injective comme $U \rightarrow \mathcal{E}$, prop. (I, 2; 1)).

Soit maintenant λ une probabilité cylindrique sur E' . On dira qu'elle est de type (A, α, U) , où A est un poids, si $A(\xi(\lambda)) \leq \alpha(\xi)$ pour tout $\xi \in E$. Comme antérieurement, elle sera dite de type (A, α, U) approximable, si elle est limite cylindrique de λ_j , probabilités de Radon portées par des compacts de dimension finie, de type (A, α, U) . Mais on aura besoin de plus : elle sera dite de type $(\mathcal{E}', U) - (A, \alpha, U)$ approximable, si elle est limite cylindrique de probabilités λ_j de Radon portées par des compacts de dimension finie de \mathcal{E}' , et vérifiant $A(\xi(\lambda_j)) \leq \alpha(\xi)$, non seulement pour $\xi \in E$, mais pour $\xi \in U$, ce qui a un sens puisque λ_j est sur \mathcal{E}' et $\xi \in U$ donc $\xi \in \mathcal{E}$, et que α est définie sur U . Enfin on dira que $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre (B, β, V) , si elle est de Radon sur G' , image par l'injection $V \rightarrow G'$ d'une probabilité de Radon Λ (nécessairement unique) sur V , d'ordre (B, β) (d'où la nécessité d'avoir β semi-continue inférieurement sur V).

Alors :

Proposition (XXV, 3; 1) : Soient $E, G, \mathcal{E}, \mathcal{G}, U, V, u, v$ comme ci-dessus, et $E', G', \mathcal{E}', \mathcal{G}'$ munis des topologies *-faibles. Soient A, B, \bar{A}, \bar{B} , 4 poids vérifiant l'inégalité de Fubini $(B, \bar{B}) \leq (\bar{A}, A)$, B compact. Soient α une fonction ≥ 0 semi-continue inférieurement sur U , β une fonction ≥ 0 compacte sur V . Supposons qu'il existe une probabilité cylindrique ρ sur \mathcal{G} de cotype (\bar{B}, β, V) telle que $v(\rho)$ soit de Radon d'ordre (\bar{A}, α, U) .

Alors, pour toute probabilité cylindrique λ sur E' , de type $(\mathcal{E}', U) - (A, \alpha, U)$ approximable, l'image $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre (B, β, V) .

Démonstration :

1) Soit λ une probabilité de Radon sur \mathcal{E}' , portée par un compact de dimension finie, vérifiant $A(\xi(\lambda_j)) \leq \alpha(\xi)$ pour $\xi \in U$.

On refera exactement le calcul de la démonstration de (XXIV,3;1) :

$$\begin{aligned}
 & B(u(\lambda_j, \beta)) (u(\lambda_j)) \text{ est de Radon sur } \mathcal{G}^j \subset V = B(d\lambda_j(x), \beta(u(x))) \\
 & \leq B(d\lambda_j(x), \bar{B}((u(x))(\rho))) = B(d\lambda_j(x), \bar{B}(x({}^t u(\rho)))) \\
 & = B(d\lambda_j(x), \bar{B}(x(v))) \quad (v \text{ est sur } \mathcal{E}, x \text{ est dans } \mathcal{E}^j) \\
 & = B(d\lambda_j(x), \bar{B}(d_v(\xi), |\langle x, \xi \rangle|)) \leq \bar{A}(d_v(\xi), A(d\lambda_j(x), |\langle x, \xi \rangle|)) \\
 & = \bar{A}(d_v(\xi), A(\xi(\lambda_j))) \leq \bar{A}(d_v(\xi), \alpha(\xi)) \quad (\text{à cause des propriétés de } \lambda_j) \\
 & = \bar{A}(v, \lambda) \leq 1 .
 \end{aligned}$$

Donc λ_j est (de Radon sur $\mathcal{G}^j \subset V$) d'ordre (B, β) . On remarquera qu'on a utilisé par deux fois le fait que λ_j est sur \mathcal{E}^j et pas seulement sur E^j , et d'autre part l'inégalité $\bar{A}(\xi(\lambda_j)) \leq \alpha(\xi)$ pour $\xi \in U$ et pas seulement $\xi \in E$.

2) Soit maintenant λ cylindrique sur E^j , de type $(\mathcal{E}^j, U) - (A, \alpha, U)$ approximable.

Elle est limite cylindrique de λ_j du type précédent, suivant un ultrafiltre convenable. Alors les $u(\lambda_j)$ forment un ultrafiltre de probabilités de Radon Λ_j sur V , d'ordre (B, β) , avec B et β compacts. Alors le 2ème théorème de Prokhorov (IV,6;1) dit que l'ensemble des Λ_j est relativement compact dans $\mathcal{P}(V)$, donc que les Λ_j ont une limite étroite (et a fortiori cylindrique) Λ sur V , d'ordre (B, β) ; et $u(\lambda)$ est alors image de Λ par l'injection $V \rightarrow G^j$, cqfd.

§ 4. ELIMINATION DES CONDITIONS SPECIALES D'APPROXIMATION.

Proposition (XXV.4;1) : Supposons qu'il existe des applications π_j , linéaires continues de \mathcal{E} dans E , dont les restrictions à E convergent (suivant j) vers l'application identique de E , pour la topologie de la convergence simple faible, et telles que, pour tout $\xi \in U$, on ait $\alpha(\pi_j(\xi)) \leq \alpha(\xi)$. Alors toute probabilité cylindrique λ sur E^j , de type (A, α, U) approximable, est de type $(\mathcal{E}^j, U) - (A, \alpha, U)$ approximable.

On ramène ainsi la propriété spéciale d'approximation considérée ici à la propriété antérieure, celle de l'exposé V, § 3, ne faisant intervenir que λ sur E' , et α sur E . Et on sait comment éliminer celle-ci dans bien des cas (exposé V, § 4, et exposé XII).

Démonstration : Il suffit de montrer que, si λ est de Radon sur E' , portée par un compact de dimension finie, de type (A, α) , elle est limite de λ_j , de Radon sur \mathcal{E}' , portées par des compacts de dimension finie, avec $A(\xi(\lambda_j)) \leq \alpha(\xi)$ pour $\xi \in U$. Or il suffit de prendre $\lambda_j = {}^t\pi_j(\lambda)$. Chaque ${}^t\pi_j(\lambda)$ est bien portée par un compact de dimension finie de \mathcal{E}' . Ensuite, pour $\xi \in U$, $A(\xi({}^t\pi_j(\lambda))) = A((\pi_j(\xi))(\lambda)) \leq \alpha(\pi_j(\xi))$ (car $\pi_j(\xi) \in E \leq \alpha(\xi)$). Il reste à montrer que ${}^t\pi_j(\lambda)$ converge cylindriquement vers λ . Or ${}^t\pi_j$ converge vers l'identité sur E' , pour la convergence simple faible ; donc ${}^t\pi_j$ converge vers l'application identique de E' , uniformément sur tout compact de dimension finie, donc uniformément sur le support de λ , donc en probabilité sur (E', λ) , donc ${}^t\pi_j(\lambda)$ converge étroitement vers λ dans E' , cqfd.

Conséquence : Dans la plupart des applications, U et V seront des Banach (ou quasi-Banach), α et β seront proportionnelles aux normes. Alors on doit supposer que les $\pi_j : \mathcal{E} \rightarrow E$ convergent, sur E , vers l'application identique E pour la convergence simple faible et que pour $\xi \in U$, $\|\pi_j(\xi)\| \leq \|\xi\|$. Par exemple, si $\mathcal{E} = \mathcal{D}'$, $E = \mathcal{D}$, $U = L^q$, on prendra pour π_j des troncatures -régularisations $T \mapsto \phi_j(\rho_j * T)$, $\phi_j \in \mathcal{D}$, $\rho_j \in \mathcal{D}$.

§ 5. APPLICATIONS AUX ESPACES DE SUITES.

Désormais, \mathcal{E} et \mathcal{G} seront l'espace $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ des suites de nombres réels ou complexes ($\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Puis E et G seront l'espace $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ (somme directe) des "suites finies", c-à-d. des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

On munira $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ de la topologie produit, $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ de la topologie somme directe (limite inductive des sous-espaces de dimension finie). Pour U et V , on prendra les espaces de suites classiques, $U = l^a$, $V = l^b$, $1 \leq a, b \leq +\infty$.

Ecartons d'abord les cas 1 et $+\infty$. Alors une probabilité de Radon sur $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, portée par l^s , $1 < s < +\infty$, provient d'une probabilité de Radon sur l^s muni de la topologie induite par $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, donc aussi de sa topologie normée, car il est polonais ; ceci subsiste pour $s=1$, mais, pour $s=+\infty$, on doit remplacer l^∞ par $\sigma(l^\infty, l^1)$ (lusinien) (qui est aussi $\sigma((c^0)''', (c^0)')$). D'autre part, la boule unité est faiblement compacte ; ceci ne subsiste pour $s=+\infty$ que si l'on remplace l^∞ par $\sigma(l^\infty, l^1)$, pour $s=1$ que si on remplace l^1 pour $\sigma(l^1, c^0)$.

Une probabilité cylindrique λ sur $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est toujours de Radon. Elle est une classe d'isonomie de fonctions aléatoires linéaires $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \cdot X \in L^0(\Omega, \mu)$; une telle fonction aléatoire est simplement une suite $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires scalaires $X_n \in L^0(\Omega, \mu)$, qui définit la fonction aléatoire linéaire $c = (c_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \sum_{n \in \mathbf{N}} c_n X_n$, $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$. Alors $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une μ -classe d'applications μ -mesurables $\Omega \rightarrow \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, de sorte que la probabilité cylindrique λ est l'image $X(\mu)$ de μ par X , donc de Radon. A une isonomie près, on peut prendre $\Omega = \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, $\mu =$ la probabilité cylindrique λ , qui est de Radon, et $X_n =$ la projection $\pi_n : \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{K}$. Tout ceci n'est que la prop. (VI, 2; 1), compte-tenu de la remarque qui termine l'exposé VI.

Exprimons que la probabilité cylindrique λ est de type (p, l^s) (c-à-d., avec les notations du § 3, de type $(\| \cdot \|_p, \text{constante} \times \text{norme } l^s, l^s)$, si $p > 0$, et de type $(J_\alpha, \text{constante} \times \text{norme } l^s, l^s)$ pour tout $\alpha, 0 < \alpha < 1$, si $p = 0$). Cela veut dire que, si $c \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$, si $\|c\|_{l^s}$ tend vers 0,

$\sum_{n \in \mathbf{N}} c_n X_n$ converge vers 0 dans $L^p(\Omega, \mu)$. Pour $p > 0$, on pourra définir

$$\|\lambda\|_{p, l^s}^* \quad (\text{qu'on écrira aussi } \|(X_n)_{n \in \mathbf{N}}\|_{p, l^s}^* \quad \text{ou } \|X\|_{p, l^s}^*)$$

$$= \sup_{c \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}} \left\| \sum_{n \in \mathbf{N}} c_n X_n \right\|_{L^p(\Omega, \mu)} \cdot \|c\|_{l^s} \leq 1$$

Bien entendu, l'application X se prolonge alors en application linéaire continue de l^s dans $L^p(\Omega, \mu)$ (c^0 au lieu de l^∞ si $s = +\infty$), donc λ provient d'une probabilité cylindrique de type p sur $l^{s'}$ ($\sigma(l^1, c^0)$ si $s = +\infty$, $\sigma(l^\infty, l^1)$ si $s = 1$). C'est bien en conformité avec les notations nouvelles introduites au § 2 qu'une probabilité cylindrique sur $l^{s'}$ (ou $\sigma(l^1, c^0)$ ou $\sigma(l^\infty, l^1)$) de type p se note de type (p, l^s) .

Exprimons maintenant que la probabilité cylindrique λ est de cotype (p, l^s) . Cela veut dire que, pour $c \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$, si $\sum_{n \in \mathbf{N}} c_n X_n$ converge vers 0 dans $L^p(\Omega, \mu)$, c tend vers 0 dans l^s . Pour $p > 0$, on pourra définir

$$\begin{aligned} & \|\lambda\|_{p, l^s}^* \quad \text{ou} \quad \|(X_n)_{n \in \mathbf{N}}\|_{p, l^s}^* \quad \text{ou} \quad \|X\|_{p, l^s}^* \\ & = \left(\inf_{\substack{c \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \\ \|c\|_{l^s} \geq 1}} \left\| \sum_{n \in \mathbf{N}} c_n X_n \right\|_{L^p(\Omega, \mu)} \right)^{-1} . \end{aligned}$$

Exprimons enfin que λ provient d'une probabilité de Radon d'ordre p sur l^s ($\sigma(l^\infty, l^1)$ pour $s = +\infty$), ou encore que $X(\mu)$ est portée par l^s et d'ordre p . Cela veut simplement dire que la suite $(X_n(\omega))_{n \in \mathbf{N}}$ est dans l^s pour μ -presque tout ω , et en outre que la μ -classe de fonctions $\omega \rightarrow \|(X_n(\omega))_{n \in \mathbf{N}}\|_{l^s}$ appartient à $L^p(\Omega, \mu)$. Pour $p > 0$, on aura $\|\lambda\|_{p, l^s}^*$ ou $\|(X_n)_{n \in \mathbf{N}}\|_{p, l^s}^*$ ou $\|X\|_{p, l^s}^* = \left(\int_{\Omega} \|(X_n(\omega))_{n \in \mathbf{N}}\|_{l^s}^p d\mu(\omega) \right)^{1/p}$ si $p < +\infty$, = (Sup. ess.) $_{d\mu(\omega)} \|(X_n(\omega))_{n \in \mathbf{N}}\|_{l^s}$ si $p = +\infty$.

Nous étudierons complètement les multiplications 0-radonifiantes ($p = 0$) dans les espaces de suites dans le prochain exposé.

COMPLEMENT A L'EXPOSE XXV

4 bis. APPLICATIONS 0-RADONIFIANTES DANS LES ESPACES DE DISTRIBUTIONS SUR \mathbb{R}^n .

Le corollaire de la prop. (XXV,1;1) peut être étendu à d'autres cas, en remplaçant le mouvement brownien ($s = 2$) par le s -bruit blanc, $1 < s < 2$. Raisonnons encore sur le tore \mathbb{T}^n au lieu de \mathbb{R}^n . Soit γ_s la probabilité cylindrique sur $L^{s'}(\mathbb{T}^n; dt) = L^{s'}$, dont l'image de Fourier est, sur L^s , la fonction $\varphi \rightarrow e^{-\frac{1}{2}|\varphi|^2} L^s$ (prop. XV,6;1); elle est de type p , pour $0 \leq p < s$ et de cotype p pour tout $p \geq 0$. Or, d'après le corollaire 1 de la prop. (XIV,3;1), l'injection $L^{s'} \rightarrow (L^s)^{-\delta}$ est p -radonifiante si $\frac{\delta}{n} > \frac{1}{s'} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)^+$. Donc γ_s , probabilité cylindrique de type p sur $L^{s'}$, est de Radon dans $(L^s)^{-\delta}$, pour $\frac{\delta}{n} > \frac{1}{s'} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)^+$; comme p peut être pris arbitrairement proche de s , il en sera ainsi si $\frac{\delta}{n} > \frac{1}{s'}$. Mais alors γ_s , probabilité cylindrique de cotype 0 sur $L^{s'}$, est de Radon dans $(L^s)^{-\delta}$; par application du théorème de dualité (corollaire 2 de la prop. (XXIV,3;1)) (la propriété d'approximation de la page (V,4) est vérifiée pour $L^{s'}$), l'injection transposée $(L^{s'})^\delta \rightarrow L^s$ est 0-radonifiante. Le lemme 2 de la page (XIV,12) affirme alors que $(L^{s'})^\delta \rightarrow (L^s)^\beta$ est sûrement 0-radonifiante, si $\frac{\alpha-\beta}{n} > \frac{1}{s'}$.

Nous sommes donc en présence des 2 résultats suivants :

- 1) Si $\frac{\gamma-\delta}{n} > \frac{1}{2}$, $(L^1)^\gamma \rightarrow (L^2)^\delta$ est 0-radonifiante (obtenu pour $s = 2$);
- 2) Si $\frac{\gamma-\delta}{n} > \frac{1}{s'}$, $1 < s < 2$, $(L^{s'})^\gamma \rightarrow (L^s)^\delta$ est 0-radonifiante.

Considérons maintenant l'injection $(L^a)^\alpha \rightarrow (L^b)^\beta$, $1 \leq a, b \leq +\infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\frac{\alpha-\beta}{n} > \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^+$. Supposons qu'elle se factorise par $(L^a)^\alpha \rightarrow (L^c)^\gamma \rightarrow (L^d)^\delta \rightarrow (L^b)^\beta$ $\frac{\gamma}{n} > \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)^+$, $\frac{\delta-\beta}{n} > \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right)^+$; et $c = 1$, $d = 2$, $\frac{\gamma-\delta}{n} > \frac{1}{2}$, ou $c = s'$, $d = s$, $\frac{\gamma-\delta}{n} > \frac{1}{s'}$; alors elle sera 0-radonifiante. Il y a lieu d'examiner tous les cas possibles.

A) Le cas $c = 1, d = 2$, est utilisable si

$$\frac{\alpha - \beta}{n} > \left(\frac{1}{a} - 1\right)^+ + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b}\right)^+ = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b}\right)^+ = \text{Max} \left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{b}\right) = \sigma$$

B) Le cas $c = s', d = s$, est utilisable s'il existe $s, 1 < s < 2$, tel que

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - \beta}{n} &> \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{s'}\right)^+ + \frac{1}{s'} + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{b}\right)^+ = \text{Max} \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{s'}\right) - \frac{1}{b} + \text{Max} \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{s}\right) \\ &= \text{Max} \left(1, \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \frac{1}{s'} + \frac{1}{b}, \frac{1}{a} + \frac{1}{s}\right) - \frac{1}{b} = \tau_s ; \end{aligned}$$

ce cas sera utilisable si $\frac{\alpha - \beta}{n} > \tau = \text{Min}_{1 \leq s \leq 2} \tau_s$.

Les deux fonctions $\frac{1}{s'} \mapsto \frac{1}{s'} + \frac{1}{b}, \frac{1}{s'} \mapsto \frac{1}{a} + \frac{1}{s}$, ont pour somme

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1$, leurs graphiques (le 1er croissant, le 2ème décroissant) se croisent pour $\frac{1}{s'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + 1\right)$, qui est $\leq \frac{1}{2}$ si et seulement si $a \geq b$; la valeur commune des 2 fonctions en ce point est la demi-somme, soit

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1\right). \text{ Donc si } a \geq b, \tau = \text{Max} \left(1, \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1\right)\right) - \frac{1}{b}$$

$= \text{Max} \left(1, \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - \frac{1}{b} = \text{Max} \left(1 - \frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$. Si $a \leq b$, nous retiendrons seulement que $\tau \geq 1 - \frac{1}{b}$ et $\tau \geq \frac{1}{a}$, donc $\tau \geq \text{Max} \left(1 - \frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$.

La comparaison de A et B montre que $(L^a)^\alpha \rightarrow (L^b)^\beta$ sera 0-radonifiante, toutes les fois que $\frac{\alpha - \beta}{n} > \text{Min}(\sigma, \tau)$.

Premier cas : $b \geq 2$. Alors $\sigma = 1 - \frac{1}{b} \geq \frac{1}{2}$, et, comme $\tau \geq 1 - \frac{1}{b}$, $\text{Min}(\sigma, \tau) = 1 - \frac{1}{b}$.

Deuxième cas : $b \leq 2, a \leq 2$.

Alors $\sigma = \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{1}{b}$, et, comme $\tau \geq \frac{1}{a} \geq \frac{1}{2}$, $\text{Min}(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}$.

Troisième cas : $b \leq 2, a \geq 2$.

Alors $\sigma = \frac{1}{2}$, et $\tau = \text{Max} \left(1 - \frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right) \leq \frac{1}{2}$, donc $\text{Min}(\sigma, \tau) = \text{Max} \left(1 - \frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$,

On passe facilement de \mathbb{T}^n à \mathbb{R}^n , en remplaçant L^r par L_{loc}^r .
 Utilisons les notations du corollaire 1 de la prop.(XIV, 1;1),
 $W^{a,\alpha} = (L_{loc}^a)^\alpha$, éventuellement M^α si $a=1$, éventuellement C^α si $a=+\infty$:

Proposition (XXV, 1bis;1) : L'injection canonique $W^{a,\alpha} \rightarrow W^{b,\beta}$ est sûrement 0-radonifiante, toutes les fois que :

$$\frac{\alpha-\beta}{n} > \left(1 - \frac{1}{b}\right), \text{ si } b \geq 2 \quad ;$$

$$\frac{\alpha-\beta}{n} > \frac{1}{2} \text{ si } b \leq 2, a \leq 2 \quad ;$$

$$\frac{\alpha-\beta}{n} > \text{Max} \left(1 - \frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right), \text{ si } b \leq 2, a \geq 2 \quad ;$$

soit, dans tous les cas, si

$$\frac{\alpha-\beta}{n} > \text{Max} \left(1 - \frac{1}{b}, \text{Min} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{a}\right)\right) .$$

Ce résultat est souvent bien meilleur que celui que donnerait le corollaire 1 de la prop.(XIV, 1;1) même pour des injections 1-radonifiantes.
