SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. SCHWARTZ

Le théorème de dualité pour les applications radonifiantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. nº 24, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A28_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E L. S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

LE THEOREME DE DUALITE POUR LES APPLICATIONS RADONIFIANTES

Exposé N° 24 11 Mai 1970

§ 1. LE COTYPE

Soit E un espace vectoriel localement convexe. Soit Φ un poids, et θ' une fonction ≥ 0 sur E'. Rappelons qu'une probabilité cylindrique λ sur E est dite de type (Φ,θ'), si, pour tout $\xi \in E'$, on a l'inégalité $\Phi(\xi(\lambda)) \leq \theta'(\xi)$. Elle est dite, au contraire, de cotype (Φ,θ'), si

$$\theta'(\xi) \leq \Phi(\xi(\lambda)). \tag{XXIV,1;1}$$

Si Φ est un poids quelconque, λ est bien évidemment à la fois de type et de cotype (Φ,θ'), avec $\theta'(\xi) = \Phi(\xi(\lambda))$. Mais c'est là en général un résultat peu maniable ; on cherchera des probabilités cylindriques de cotype (Φ,θ'), où Φ et θ' sont donnés à l'avance, et ce n'est pas si commode.

Si E est un Banach, il sera entendu que θ' est proportionnelle à la norme ; on dira que λ est de cotype Φ, si Φ est un poids homogène, s'il existe $M \geq 0$ fini tel que

$$\|\xi\| \leq M \;\Phi(\xi(\lambda)) \; ; \tag{XXIV,1;2}$$

la borne inférieure de ces M se note ${}^*\Phi(\lambda)$:

$${}^*\Phi(\lambda) = \Big(\operatorname*{Inf}_{\|\xi\| \geq 1} \Phi(\xi(\lambda))\Big)^{-1} . \tag{XXIV,1;3}$$

Le fait que λ soit de cotype Φ s'écrit donc ${}^*\Phi(\lambda) < +\infty$. Si $\tau\lambda$ est l'homothétique de λ dans le rapport τ, on a $\Phi^*(\tau\lambda) = |\tau|\,\Phi^*(\lambda)$, ${}^*\Phi(\tau\lambda) = |\tau|^{-1}\,{}^*\Phi(\lambda)$. Le type exprime une certaine concentration de λ, le cotype une certaine déconcentration ou dispersion.

Par exemple, soit γ la probabilité cylindrique de Gauss sur un espace hilbertien E. Alors $\xi(\gamma)$ est, sur $\mathbb{R}$, la loi de Gauss de paramètre $\|\xi\|$. Si γ_o est la loi de Gauss normale sur $\mathbb{R}$, $e^{-\pi t^2}dt$, on a, quel que soit le poids homogène Φ :

$$\Phi^*(\gamma) = \Phi(\gamma_o)$$

$${}^*\Phi(\gamma) = (\Phi(\gamma_o))^{-1} .$$

En particulier γ est de cotype p pour tout $p>0$, fini ou non, alors qu'elle est de type p, pour tout $p>0$ fini. En liaison avec la prop. (VI,1;1), λ est de cotype Φ, si et seulement si la convergence de $\Phi(\xi(\lambda))$ vers 0 implique la convergence de ξ vers 0 dans E', et, si f est une fonction aléatoire : $E' \to L^0(\Omega,\mu)$ associée, si et seulement si la convergence de $\Phi(\mu,f(\xi))$ vers 0 implique celle de ξ vers 0 ; pour $\Phi = \| \ \|_p$, si et seulement si la convergence de $f(\xi)$ vers 0 dans $L^p(\Omega,\mu)$ implique celle de ξ dans E'.

En liaison avec l'exposé 16, λ sera dite de cotype 0 sur un espace vectoriel localement convexe E, si la convergence de $\xi(\lambda)$ vers δ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ implique celle de ξ vers 0 dans E' ; ou, pour f fonction aléatoire associée, si la convergence de $f(\xi)$ vers 0 dans $L^0(\Omega,\mu)$ implique celle de ξ vers 0 dans E'. Pour E Banach, le type 0 équivaut à dire que, pour tout α, $0<\alpha<1$, λ est de type J_α ; le cotype 0 équivaut à dire que λ est de cotype J_α pour au moins un α. La probabilité cylindrique de Gauss d'un espace hilbertien est de type et de cotype 0.

§ 2. L'INEGALITE DE FUBINI

Soit Φ un poids. Si λ est une probabilité de Radon sur un espace topologique X, et si f est une fonction ≥ 0 λ-mesurable sur X, nous avons aussi noté $\Phi(\lambda,f)$ le nombre $\Phi(f(\lambda))$; nous le noterons aussi $\Phi(d\lambda(x),f(x))$, adoptant la "variable muette x" en honneur dans l'intégration. Par exemple $\|\lambda,f\|_p$ ou $\|d\lambda(x),f(x)\|_p$ veut dire $(\int_X |f(x)|^p d\lambda(x))^{1/p}$.

Soient maintenant A, B, deux poids, X, Y, deux espaces topologiques, μ, ν, des probabilités de Radon sur X, Y respectivement, et f une fonction ≥ 0 $(\mu\otimes\nu)$-mesurable sur $X\times Y$. On peut alors calculer les 2 quantités

$$\text{(XXIV,2;1)} \qquad \begin{cases} A(d\mu(x)\ ,\ B(d\nu(y),f(x,y))) \\ \\ B(d\nu(y)\ ,\ A(d\mu(x),f(x,y))) \ . \end{cases}$$

Leur signification est évidente. Explicitons la première. Pour x fixé, f_x est la fonction $y \mapsto f(x,y)$; on sait que f_x est ν-mesurable, pour μ-presque tout x. Alors $B(d\nu(y),\ f(x,y))$ est $B(\nu,f_x)$. Le résultat est fonction de x ;

admettons provisoirement qu'il soit fonction μ-mesurable de x. Alors on calcule la valeur de A sur μ et cette fonction μ-mesurable. Montrons donc cette mesurabilité. Comme $f \in \overline{L}^0_+(X\times Y, \mu\otimes\nu)$ ($\overline{L}^0_+$ veut dire que f est ≥ 0, mais pas nécessairement finie ; on définit la topologie de $\overline{L}^0_+$ à partir de la structure uniforme de $\overline{\mathbb{R}}_+$). Il est connu que $x \mapsto f_x$ est μ-mesurable de X dans $\overline{L}^0_+(Y,\nu)$ [démontrons-le. Il existe un $A^+_n \subset X$ compact et un $B_n \subset Y$ compact, tels que $\mu(A_n) \geq 1-\frac{1}{2^n}$, $\nu(B_n)\geq 1-\frac{1}{2^n}$, et que la restriction de f à $A_n\times B_n$ soit continue à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, $x\mapsto f_x$ est continue de A_n dans $\overline{C}_+(B_n)$. Si $\mathcal{A}_n = \bigcap_{\nu>n} A_n$, on a $\mu(\mathcal{A}_n) \geqslant 1-\frac{1}{2^n}$, et $x\to f_x$ est continue de $\mathcal{A}_n$ dans $\overline{C}_+(B_m)$, pour tout $m\geqslant n$, donc de $\mathcal{A}_n$ dans $\overline{L}^0_+(Y,\nu)$, donc elle est μ-mesurable de X dans $\overline{L}^0_+(Y,\nu)$. En fait, on peut montrer qu'il y a isomorphisme entre $\overline{L}^0_+(X\times Y, \mu\otimes\nu)$ et $\overline{L}^0_+(X,\mu\,;\,\overline{L}^0_+(Y,\nu))$]. Ensuite $g\to g(\nu)$ est continue de $\overline{L}^0_+(Y,\nu)$ dans $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, et enfin B est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, donc $x\to B(\nu,f_x)$ est μ-mesurable de X dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (si on a peur devant ces $\overline{\mathbb{R}}_+$, on remplacera f par $f_n = \mathrm{Inf}(f,n)$, $n\in\mathbb{N}$, ce qui remplacera partout $\overline{\mathbb{R}}_+$ par $\mathbb{R}_+\subset\mathbb{R}$, et à la fin on fera tendre n vers $+\infty$, c'est plus facile. On peut aussi faire d'un bout à l'autre un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{R}}_+$ sur $[0,1]$, ce qui ramène $\overline{L}^0_+$ à L^0).

Il n'y a naturellement aucune raison, sauf dans des cas exceptionnels, pour que les deux expressions (XXIV,2;1) coïncident.

Soient alors A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, quatre poids. On dira qu'ils vérifient l'inégalité de Fubini

$$(B,\overline{B}) \leq (\overline{A},A) \ , \tag{XXIV,2;2}$$

si, quels que soient X, Y, μ, ν, f, comme ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} &B(d\mu(x)\ ,\ \overline{B}(d\nu(y)\ ,\ f(x,y))) \\ &\leq \overline{A}(d\nu(y)\ ,\ A(d\mu(x)\ ,\ f(x,y)))\ . \end{aligned} \tag{XXIV,2;3}$$

Proposition (XXIV,2;4) : On a l'égalité de Fubini pour $A = B = \overline{A} = \overline{B} = \| \ \|_p$, $0 < p \leq +\infty$. D'autre part, on a sûrement

(XXIV,2;5) $$(J_\gamma , J_\delta) \leq (J_\alpha , J_\beta)$$

si $\gamma\delta \geq \alpha + \beta - \alpha\beta$, a fortiori si $\gamma\delta \geq \alpha+\beta$.

Démonstration :

$$\|d\mu(x), \|d\nu(y), f(x,y)\|_p\|_p = \left(\int d\mu(x)\left(\left(\int d\nu(y)\,|f(x,y)|^p\right)^{1/p}\right)^p\right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(X\times Y, \mu\otimes\nu)} ,$$

d'où l'égalité par symétrie.

Montrons d'abord que l'on a :

(XXIV,2;6) $$J_{\alpha+\beta-\alpha\beta}(\mu\otimes\nu, f) \leq J_\alpha(d\mu(x), J_\beta(d\nu(y), f(x,y))) .$$

Soit en effet c le 2ème membre. Cela prouve qu'il existe $A \subset X$, μ-mesurable, $\mu(A) \leq \alpha$, tel que, pour $x \notin A$, on ait $J_\beta(d\nu(y), f(x,y)) \leq c$. Cela prouve que, pour $x \notin A$, il existe un $B_x \subset Y$, ν-mesurable, tel que $\nu(B_x) \leq \beta$, et que, pour $y \notin B_x$, on ait $f(x,y) \leq c$. Alors l'ensemble $\{(x,y) \in X\times Y ; f(x,y) > c\}$, $(\mu\otimes\nu)$-mesurable, est contenu dans $(A\times Y) \cup \bigcup_{x\in\complement A} (\{x\}\times B_x)$; sa mesure est (d'après Fubini) $\leq \alpha + (1-\alpha)\beta = \alpha + \beta - \alpha\beta$, ce qui prouve notre affirmation.

Ensuite on a l'inégalité

(XXIV,2;7) $$J_\gamma(d\mu(x), J_\delta(d\nu(y), f(x,y))) \leq J_{\gamma\delta}(\mu\otimes\nu, f) .$$

Soit en effet c le second membre. Alors l'ensemble $\{(x,y) \in X\times Y ; f(x,y) > c\}$ a une $(\mu\otimes\nu)$-mesure $\leq\gamma\delta$. Alors l'ensemble A' des x pour lesquels l'ensemble $B'_x = \{y \in Y ; f(x,y) > c\}$ est de ν-mesure $> \delta$, a une μ-mesure $\leq \gamma$, par Fubini. Pour $x \in \complement A'$, on a donc $J_\delta(d\nu(y), f(x,y)) \leq c$; et comme $\mu(A') \leq \gamma$, on a bien $J_\gamma(d\mu(x), J_\delta(d\nu(y), f(x,y))) \leq c$, ce qui prouve notre affirmation.

En renversant l'ordre de x et y dans l'une des 2 inégalités et compte-tenu de ce que J_ε est fonction décroissante de ε :

$$J_\gamma(d\mu(x), J_\delta(d\nu(y), f(x,y)) \leq J_{\gamma\delta}(\mu\otimes\nu, f) \leq J_{\alpha+\beta-\alpha\beta}(\mu\otimes\nu, f)$$

$$\leq J_\alpha(d\nu(y), J_\beta(d\mu(x), f(x,y)))$$

si $\gamma\delta \geq \alpha+\beta-\alpha\beta$.

§ 3. L'INEGALITE DE PIETSCH GENERALISEE

Proposition (XXIV,3;1) : Soient E G, des espaces localement convexes, u une application linéaire faiblement continue de E dans G, β une fonction ≥ 0 sur G, α' une fonction ≥ 0 semi-continue inférieurement sur $\sigma(E',E)$, A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, 4 poids.

On suppose B et β compacts. On suppose vérifiée l'inégalité de Fubini $(B,\overline{B}) \leq (\overline{A},A)$.

S'il existe une probabilité de Radon ν sur $\sigma(E',E)$ de cotype $(\overline{B},\beta\circ u)$, et d'ordre $(\overline{A},\alpha')$, alors u est approximativement $(A,\alpha';B,\beta)$-radonifiante de E dans G.

Démonstration : Il nous suffit d'utiliser la prop. (V,3;1), valable puisque B et β sont compacts.
Soit donc λ une probabilité de Radon sur E, portée par un compact de dimension finie. Nous devons montrer que, si λ est de type (A,α'), $u(\lambda)$ est d'ordre (B,β).

$$B(u(\lambda),\beta) = B(\lambda,\beta\circ u) = B(d\lambda(x),(\beta\circ u)x)$$

$$\leq B(d\lambda(x),\overline{B}(x(\nu))) \quad (\text{puisque } \nu \text{ est de cotype } (\overline{B},\beta\circ u))$$

$$= B(d\lambda(x),\overline{B}(d\nu(\xi),|\langle x,\xi\rangle|)) \leq \overline{A}(d\lambda(\xi),|\langle x,\xi\rangle|)) \quad (\text{Fubini})$$

$$= \overline{A}(d\nu(\xi),A(\xi(\lambda))) \leq \overline{A}(d\nu,\alpha') \quad (\text{puisque } \lambda \text{ est de type } (A,\alpha'))$$

$$= \overline{A}(\alpha'(\nu)) \leq 1 \quad (\text{puisque } \nu \text{ est d'ordre } (\overline{A},\alpha')).$$

L'application de Fubini est valable, car $(x,\xi) \rightsquigarrow |\langle x,\xi\rangle|$ est continue sur le produit d'un sous-espace vectoriel de dimension finie de E par $\sigma(E',E)$.

Variante : Si ν est une probabilité de Radon sur E' pour une topologie plus fine que $\sigma(E',E)$ (non nécessairement vectorielle), il suffit de supposer α' semi-continue inférieurement pour cette topologie.

Corollaire 1 (théorème de dualité) : *Soient E, G, des espaces localement convexe, u une application linéaire faiblement continue de E dans G, β une fonction ≥ 0 sur G, α' une fonction ≥ 0 semi-continue inférieurement sur $\sigma(E',E)$, A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, 4 poids. On suppose B et β compacts, et on suppose vérifiée l'inégalité de Fubini, $(B,\overline{B}) \leq (\overline{A},A)$.*

Supposons qu'il existe une probabilité cylindrique ρ sur $\sigma(G',G)$, de cotype$(\overline{B},\beta)$, telle que ${}^t u(\rho)$ soit de Radon sur $\sigma(E',E)$, d'ordre $(\overline{A},\alpha')$. Alors u est approximativement $(A,\alpha';B,\beta)$-radonifiante de E dans G (i.e. : si λ est une probabilité cylindrique de type (A,α') approximable sur E, $u(\lambda)$ est de Radon sur G, d'ordre (B,β).

Démonstration : Il suffit de montrer que $\nu = {}^t u(\rho)$ est de cotype $(\overline{B},\beta \circ u)$. Or, pour $x \in E$:

$$(\beta \circ u)(x) = \beta(u(x)) \leq \overline{B}((u(x))(\rho))$$

(puisque ρ est de cotype $(\overline{B},\beta)$)

$= \overline{B}(x({}^t u(\rho)))$ (parce que $u(x) : G' \to \mathbb{K}$ se factorise par $G' \xrightarrow{{}^t u} E' \xrightarrow{x} \mathbb{K}$)

$= \overline{B}(x(\nu))$, ce qui prouve notre affirmation.

Moyen Mnemotechnique : C'est bien entendu B, β, qui doivent être supposés compacts, pour obtenir $u(\lambda)$ de Radon d'ordre (B,β) à partir du théorème de compacité de Prokhorov. Dans l'inégalité de Fubini, on met B à l'extrême gauche, c'est le poids le plus important, celui qui interviendra pour

$u(\lambda)$; comme ensuite il y a d'un côté B, $\overline{B}$, de l'autre A, $\overline{A}$, il suffit de se souvenir qu'on inverse l'ordre : $(B,\overline{B}) \leq (\overline{A},A)$. (On peut aussi dire qu'on les met dans l'ordre $(u(\lambda),\rho)$; ${}^t u(\rho),\lambda)$). Enfin ρ fait intervenir $\overline{A}$, $\overline{B}$, λ fait intervenir A, B, de la seule manière possible ; et nous avons conservé la formule $(A,\alpha' ; B,\beta)$-radonifiante, comme antérieurement.

<u>Corollaire 2</u> : Soient E, G, des Banach, u une application linéaire continue de E dans G. Supposons qu'il existe une probabilité cylindrique ρ sur $\sigma(G',G)$, de cotype p, telle que ${}^t u(\rho)$ soit de Radon d'ordre p sur E ; $0 \leq p \leq +\infty$. Alors u est approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$. En outre, pour $p > 0$:

$$\text{(XXIV,3;2)} \qquad \pi_p(u) \leq {}^*\|\rho\|_p \, \|{}^t u(\rho)\|_p \; .$$

<u>Démonstration</u> : Supposons d'abord $p > 0$. Comme ρ est de cotype $\left(\| \; \|_p , \dfrac{\| \; \|_G}{{}^*\|\rho\|_p}\right)$ et que ${}^t u(\rho)$ est d'ordre $\left(\| \; \|_p , \dfrac{\| \; \|_{E'}}{\|{}^t u(\rho)\|_p}\right)$, nous voyons que, si λ est une probabilité de Radon portée par un compact de dimension finie de E, de type $\left(\| \; \|_p , \dfrac{\| \; \|_{E'}}{\|{}^t u(\rho)\|_p}\right)$, $u(\lambda)$ est d'ordre $\left(\| \; \|_p , \dfrac{\| \; \|_G}{{}^*\|\rho\|_p}\right)$; on a donc l'inégalité (XI,1;2), avec $M = {}^*\|\rho\|_p \, \|{}^t u(\rho)\|_p$, d'où le résultat par le théorème (XI,1;1).

Supposons maintenant $p = 0$. D'après la définition du cotype 0 (§ 1), il existe un $\sigma > 0$ tel que ρ soit de cotype J_σ, $0 < \sigma < 1$. D'autre part, ${}^t u(\rho)$ est de Radon (automatiquement d'ordre 0), donc d'ordre J_τ pour tout τ, $0 < \tau < 1$. Alors ρ est de cotype $\left(J_\sigma , \dfrac{\| \; \|_G}{{}^*J_\sigma(\rho)}\right)$, et ${}^t u(\rho)$ est d'ordre $\left(J_\tau , \dfrac{\| \; \|_{E'}}{J_\tau({}^t u(\rho))}\right)$. Il en résulte que, si λ est une probabilité de Radon sur E, portée par un compact de dimension finie, de type $\left(J_\alpha , \dfrac{\| \; \|_{E'}}{J_\tau({}^t u(\rho))}\right)$, $u(\lambda)$ est d'ordre $\left(J_\beta , \dfrac{\| \; \|_G}{{}^*J_\sigma(\rho)}\right)$, pourvu qu'on ait Fubini : $(J_\beta, J_\sigma) \leq (J_\tau, J_\alpha)$; ce qui sera réalisé, d'après la prop. (XXIV,2;4), si l'on prend $\tau = \alpha = \dfrac{\beta\sigma}{2}$.

On en déduit que, pour tout β, il existe α et M tels que l'on ait l'inégalité 2 du théorème (XVI,2;1), avec

$$\alpha = \frac{\beta\sigma}{2} \quad , \quad M = {}^{*}J_{\sigma}(\rho)\ J_{\frac{\beta\sigma}{2}}({}^{t}u(\rho)) \quad ;$$

le théorème (XVI,2;1) permet de conclure.

<u>Remarque</u> : La formule (XXIV,3;2) est bien homogène ; si on remplace ρ par $\tau\rho$, ${}^{*}\|\rho\|_{p}$ est multiplié par $|\tau|^{-1}$, $\|{}^{t}u(\rho)\|_{p}$ par $|\tau|$, et le 2ème membre ne change pas.

Le résultat relatif à $p=0$ peut s'énoncer en terme de théorème de Pietsch (en utilisant le théorème (XXIV,3;1) au lieu de son corollaire 1) et on obtient une extension à $p=0$ du théorème du § 2 de l'exposé VIII :

<u>Corollaire 3</u> : Supposons qu'il existe une probabilité de Radon ν sur $\sigma(E',E)$, et que la convergence de la fonction $x : \xi \to \langle x,\xi\rangle$ vers 0 dans $L^{0}(\sigma(E',E),\nu)$ entraîne la convergence de $u(x)$ vers 0 dans G. Alors u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$.
On peut alors étendre à $p=0$ la prop. (VII,3;4).

<u>Corollaire 4</u> : Supposons que $u : E \to G$ admette la factorisation $u = u_2 \circ u_1$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "u_1"'] & L^{\infty}(X,\nu) \arrow[r, "j"] & L^{0}(X,\nu) \\ & S \arrow[ur] \arrow[r, "u_2"'] & G \end{tikzcd}$$

où u_1 et u_2 sont continues, φ est une application linéaire continue de E dans un $L^{\infty}(X,\nu)$, X espace topologique, ν une probabilité de Radon sur X, j est l'injection canonique et S est un sous-espace vectoriel fermé de $L^{0}(X,\nu)$, muni de la topologie induite.

Alors u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$.

Démonstration : On peut toujours supposer φ de norme 1, quitte à changer u_2.

En remplaçant X par le compact $\widetilde{X}$, spectre de $L^\infty(X,\nu)$, on se ramène au cas où X est compact et $L^\infty(X,\nu)$ est remplacé par $C(X)$. La transposée de φ envoie alors $M(X)$ dans E', elle est continue de $\sigma(M,C)$ dans $\sigma(E',E)$; mais $\delta : x \to \delta_{(x)}$ est un homéomorphisme de X sur un compact de la boule unité de $\sigma(M,C)$, donc ${}^t\varphi \circ \delta$ est un homéomorphisme de X sur un compact de la boule unité B' de $\sigma(E',E)$; soit ν_1 l'image de ν par ${}^t\varphi \circ \delta$. Alors, si $\widetilde{x} : \xi \to \langle x, \xi \rangle$ converge vers 0 dans $L^0(B',\nu_1)$, $\varphi(x)$ converge vers 0 dans $L^0(X,\nu)$, donc $u_1(x)$ dans S, donc $u(x)$ converge vers 0 dans G. Le corollaire 3 donne alors le résultat.

Remarque : Les corollaires 3 et 4 admettent une réciproque, démontrée par Sunyach, et qui figurera dans un prochain exposé ; le théorème de Pietsch (§ 2 de l'exposé VII) sera ainsi complètement étendu à $p = 0$.

Corollaire 5 (renversement des rôles des espaces et de leurs duals) :

Soit u une application linéaire continue d'un Banach E dans un Banach G. Supposons qu'il existe une probabilité cylindrique ρ sur E, de cotype p $(0 \leq p \leq +\infty)$, telle que $u(\rho)$ soit de Radon d'ordre p sur $\sigma(G'',G')$. Alors ${}^tu$ est approximativement p-radonifiante de $\sigma(G',G)$ dans $\sigma(E',E)$.

Démonstration : L'application directe du théorème de dualité dirait que ${}^tu$ est approximativement p-radonifiante de $\sigma(G',G'')$ ou G' dans $\sigma(E',E)$. Mais alors la remarque qui suit le théorème (XI,1;1), valable pour $p > 0$ mais évidemment aussi pour $p = 0$, montre que l'on peut remplacer G' par $\sigma(G',G)$.

§ 4. APPLICATIONS AUX OPERATEURS DE HILBERT-SCHMIDT DANS LES ESPACES HILBERTIENS.

Nous avons vu (exposé VIII) que, si E et G sont hilbertiens, une application linéaire u de E dans G est p-radonifiante, pour un $p > 0$ fini, si et seulement si elle est de Hilbert-Schmidt. Nous allons le retrouver comme conséquence immédiate du théorème de dualité, et en même temps le démontrer aussi pour $p = 0$.

Proposition (XXIV,4;1) : Soit u une application linéaire continue d'un espace hilbertien E dans un espace hilbertien G. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° u est de Hilbert-Schmidt ;
2° u est p-radonifiante, pour un p fini ≥ 0 ;
3° u est p-radonifiante, pour tout $p \geq 0$;
4° l'image par u de la probabilité cylindrique de Gauss γ de E est de Radon dans G.

Démonstration : Si u est 2-sommante, et si $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de E, elle est scalairement l^2 et $\left(\sum_{i\in I} \|u(e_i)\|^2\right)^{1/2} \leq \pi_2(u)$; donc u est de Hilbert-Schmidt. En outre, $\|u\|_{HS} \leq \pi_2(u)$, où $\| \ \|_{HS}$ est la norme de Hilbert-Schmidt. Inversement, si u est Hilbert-Schmidt, elle admet une factorisation

$$E \to l^\infty \xrightarrow{\alpha} l^2 \to G \quad ,$$

où α est une application diagonale, une multiplication $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $(\Sigma|\alpha_n|^2)^{1/2} = \|u\|_{HS}$; donc u est 2-nucléaire à gauche (§ 3 de l'exposé IX), de norme 2-nucléaire $\leq \|u\|_{HS}$, donc elle est 2-sommante, et $\pi_2(u) \leq \|u\|_{HS}$. Nous avons donc démontré que u est de Hilbert-Schmidt, si et seulement si elle est 2-radonifiante, avec $\|u\|_{HS} = \pi_2(u)$. Il reste à montrer l'équivalence de 2, 3, 4. Trivialement $3 \Rightarrow 2$; et $2 \Rightarrow 4$, car γ est de type p, pour tout p fini ≥ 0.

Reste à montrer que $4 \Rightarrow 3$, et $p=0$ suffira. Mais γ est de cotype 0 ; et $u(\gamma)$ est de Radon. donc d'ordre 0. Le théorème de dualité montre alors que ${}^t u$ est 0-radonifiante de G' dans E'. Mais alors l'image par ${}^t u$ de la probabilité cylindrique de Gauss γ' de G' est de Radon dans E', car γ' est aussi de type 0. Et une deuxième application du théorème de dualité (procédé toujours très fructueux) montre que u est 0-radonifiante,

cqfd.

Proposition (XXIV,4;2) : *Soit u un opérateur de Hilbert-Schmidt d'un Hilbert E dans un Hilbert G.*
Alors $\pi_p(u^*) = \pi_p({}^t u) = \pi_p(u)$; si γ est la probabilité cylindrique de Gauss de E, et γ_0 la probabilité normale de Gauss sur $\mathbb{R}$, $\gamma_0 = e^{-\pi t^2}dt$, on a la formule

$$\pi_p(u) = \|\gamma_0\|_p^{-1}\|u(\gamma)\|_p \quad ;$$

la fonction $p \mapsto \pi_p(u)$ est continue décroissante sur $]0,+\infty$ et tend vers une limite finie non nulle $\pi_0(u)$ pour p tendant vers 0, et la fonction $p \mapsto \|\gamma_0\|_p\,\pi_p(u)$ est continue croissante sur $]0,+\infty[$.

(La majorité de ces résultats est dûe à Sunyach).

Démonstration : On sait qu'il existe des opérateurs v et w de norme ≤ 1 tels que $u = v\sqrt{u^*u}$, $\sqrt{u^*u} = wu$, donc $\sqrt{u^*u} = u^*w^*$; alors $\pi_p(u) \leq \pi_p(\sqrt{u^*u}) \leq \pi_p(u^*)$; par symétrie, $\pi_p(u) = \pi_p(\sqrt{u^*u}) = \pi_p(\sqrt{uu^*})$. Comme ${}^t u$ est isomorphe à u^*, $\pi_p({}^t u) = \pi_p(u^*)$.

Appliquons maintenant le théorème de dualité. La probabilité cylindrique de Gauss γ sur E est de type et cotype p, $0<p<+\infty$, avec $\|\gamma\|_p^* = \|\gamma_0\|_p$, ${}^*\|\gamma\|_p = \|\gamma_0\|_p^{-1}$. Donc on a d'abord, par définition même de π_p :

$$\|u(\gamma)\|_p \leq \pi_p(u)\|\gamma\|_p^* = \|\gamma_0\|_p\ \pi_p(u) \ .$$

Mais comme γ est de cotype p et que $u(\gamma)$ est de Radon d'ordre p, le théorème de dualité dit que ${}^t u$ est p-radonifiante, et que

$$\pi_p({}^t u) \leq {}^*\|\gamma\|_p \; \|u(\gamma)\|_p = \|\gamma_o\|_p^{-1} \; \|u(\gamma)\|_p \quad ,$$

donc que

$$\|\gamma_o\|_p \; \pi_p(u) \leq \|u(\gamma)\|_p \; .$$

On en déduit bien , pour $0 < p < +\infty$, l'égalité $\pi_p(u) = \|\gamma_o\|_p^{-1} \; \|u(\gamma)\|_p$. Cette formule montre bien que $p \mapsto \pi_p(u)$ est continue sur $]0,+\infty[$, et que $p \mapsto \|\gamma_o\|_p \; \pi_p(u)$ est croissante; le fait que $p \mapsto \pi_p(u)$ soit décroissante est vrai pour tous les Banach.

Lorsque p tend vers 0, $\|\gamma_o\|_p \; \pi_p(u)$ a une limite finie ; mais $\|\gamma_o\|_p = (\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} |t|^p dt)^{1/p}$ tend vers la moyenne géométrique

$\exp(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \log |t| \, dt)$, finie et non nulle, donc $\pi_p(u)$ a une limite

finie ; et non nulle puisque c'est une fonction décroissante de p.

On sait que $\pi_\infty(u) = \|u\|$, donc que $\pi_p(u) \geq \|u\|$ pour tout p fini. Nous devons montrer que $\pi_p(u)$ tend vers $\|u\|$ pour p tendant vers $+\infty$. On peut supposer (quitte à remplacer u par $\sqrt{u^* u}$) que $E = G$ et que u est hermitien ≥ 0 . Supposons d'abord $E = \mathbb{R}^n$, u diagonal, de valeurs propres $\alpha_1 , \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $0 \leq \alpha_k \leq \|u\|$. Alors

$$\gamma = \bigotimes_{k=1}^{n} e^{-\pi t_k^2} dt_k \; , \; u(\gamma) = \bigotimes_{k=1}^{n} e^{-\pi t_k^2/\alpha_k^2} \; \frac{dt_k}{\alpha_k} \quad ,$$

$$\|u(\gamma)\|_p = (\int_{\mathbb{R}^n} (t_1^2 + \ldots + t_n^2)^{p/2} \; e^{-\pi \sum_{k=1}^{n} t_k^2/\alpha_k^2} \; \frac{dt_1 \ldots dt_n}{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \;)^{1/p}$$

$$= \quad (\int_{\mathbb{R}^n} (\alpha_1^2 \, t_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 \, t_n^2)^{p/2} \; e^{-\pi \sum_{k=1}^{n} t_k^2} \; dt_1 \ldots dt_n)^{1/p}$$

$$\leq \|u\| (\int_{\mathbb{R}^n} |t|^p \, e^{-\pi |t|^2} \, dt)^{1/p} = \|u\| \; (S_n \int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2} \; r^{p+n-1} \; dr)^{1/p}$$

$$= \|u\| (\; \frac{S_n}{2\pi^{(p+n)/2}}) \; \Gamma(\frac{p+n}{2}))^{1/p}$$

(S_n = aire de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$) .

Alors

$$\pi_p(u) = \|\gamma_o\|_p^{-1} \pi_p(\gamma(u)) \leq \|u\| \left(\frac{\frac{S_n}{2\pi^{(p+n)/2}} \Gamma\left(\frac{p+n}{2}\right)}{\frac{2}{2\pi^{(p+1)/2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \right)^{1/p}$$

qui tend vers $\|u\|$ pour n tendant vers $+\infty$.

Si maintenant E est de dimension infinie, on pourra l'écrire $E = E_1 \oplus E_2$, avec $u = u_1 \oplus u_2$, $\|u\| = \|u_1\|$, $\pi_2(u_2) = \|u_2\|_{HS} \leq \varepsilon$. On a

$\pi_p(u_1 \oplus u_2) \leq \pi_p(u_1 \oplus 0 + 0 \oplus u_2) \leq \pi_p(u_1 \oplus 0) + \pi_p(0 \oplus u_2) \leq \pi_p(u_1) + \varepsilon$ pour $p \geq 2$.

Alors $\lim\limits_{p \to +\infty} \pi_p(u) \leq \lim\limits_{p \to +\infty} \pi_p(u_1) + \varepsilon = \|u\| + \varepsilon$, donc $\lim\limits_{p \to +\infty} \pi_p(u) = \|u\|$,

cqfd.