Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

A. Badrikian

Exposants d'entropie de compacts dans un espace norme

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. nº 20, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A21_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   L. S C H W A R T Z   1 9 6 9 - 1 9 7 0

EXPOSANTS D'ENTROPIE DE COMPACTS DANS UN ESPACE NORME

par A. BADRIKIAN

Exposé N° 20

13 Avril 1970

Dans tout cet exposé E désignera un espace normé, U sa boule unité.

Lemme : Soit A un compact de E ; il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ d'éléments de A telle que

$$. \quad \|x_1\| = \sup_{x \in A} \|x\| = d_0(A)$$

$$. \quad d(x_{n+1}, E_n) = \sup_{x \in A} d(x, E_n) \quad n = 1,2,\ldots$$

où E_n désigne l'espace vectoriel engendré par les x_i d'indice $i \leq n$.

C'est absolument immédiat.

On posera $E_0 = \{0\}$, $a_n = d(x_{n+1}, E_n)$; il est alors clair que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que

$$d_n(a, U) \leq a_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} .$$

Si en outre A est disqué et si $a_n = 0$, on peut supposer $x_{n+1} = 0$, ce que nous ferons par la suite.

Enfin, si $t > 0$, on posera

$$l(t) = l(\{a_n\}, t) = \max\{n \,;\, n \geq 1, \ \frac{a_{n-1}}{n} > \frac{1}{t}\}.$$

(On a $a_0 = d_0(A)$).

Naturellement cette définition garde un sens pour toute suite numérique décroissante (a_n).

A étant compact, pour tout t $l(t)$ est fini ; en outre la fonction $t \to l(t)$ a les propriétés suivantes :

. elle s'annule pour $0 < t < a_0^{-1}$,

. elle a des sauts égaux à un aux points $t = \dfrac{k}{a_{k-1}}$.

Théorème 1 : Soit A un compact disqué de E ; on a pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit

$$C(A,\varepsilon U) \geq \int_0^{1/\varepsilon} \frac{l(t)}{t}\, dt \ .$$

<u>Démonstration</u> : Soit n tel que $a_n > 0$ et soit A_n l'enveloppe convexe équilibrée des x_i, $i \leq n$. Alors $A_n \subset A$ et par conséquent

$$M(A,\varepsilon U) \geq M(A_n,\varepsilon U) = M(A_n,\varepsilon(U \cap A_n)).$$

Soient y_1 et y_2 deux points distincts de A_n :

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^j \, x_i \quad (j = 1,2)$$

et soit $i_o = \max\{i \, ; \, \xi_i^1 \neq \xi_i^2\}$; alors

$$\|y_1 - y_2\| = \|\sum_{i=1}^{i_o} (\xi_i^1 - \xi_i^2)x_i\| \geq d[(\xi_{i_o}^1 - \xi_{i_o}^2)x_{i_o}, E_{i_o-1}] = |\xi_{i_o}^1 - \xi_{i_o}^2|a_{i_o-1}.$$

Par conséquent, si A_n' désigne le sous-ensemble (fini) de A_n formé des x de la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \frac{\eta_i}{a_{i-1}} x_i, \quad \text{avec } \eta_i \in \mathbb{Z}, \ \forall i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\eta_i}{a_{i-1}} \varepsilon\right| \leq 1$$

A_n' est une partie εU - discernable de A_n.

Donnons une borne inférieure pour card A_n'.

L'application $T : (\eta_1,\ldots,\eta_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \frac{\eta_i}{a_{i-1}} x_i$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur E_n. T^{-1} fait correspondre à A_n "l'octaèdre" B_n :

$$B_n = \{\vec{\eta} = (\eta_1,\ldots,\eta_n) \, ; \, \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\eta_i}{a_{i-1}} \varepsilon\right| \leq 1\}$$

et à A_n', l'ensemble des points à coordonnées entières situés dans cet octaèdre, soit A_n''.

Maintenant les pavés de centre dans A_n'' et d'arête égale à 2 :

$$Q(\vec{\eta}) = \{\vec{\xi}\ ;\ \xi_i = \eta_i + a_i,\ \sup|a_i| \leq 1\} \qquad (\vec{\eta} \in A''_n)$$

forment un recouvrement de B_n ; donc

$$\text{card } A''_n \cdot \text{vol } Q(\vec{\eta}) \geq \text{vol } B_n$$

(vol est l'abréviation de volume). Or

$$\text{vol } A(\vec{\eta}) = 2^n \quad \text{et} \quad \text{vol } B_n = 2^n \frac{1}{\varepsilon^n n!} \prod_{i=1}^{n} a_{i-1}.$$

Donc

$$\text{card } A'_n = \text{card } A''_n \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{a_{i-1}}{\varepsilon i}$$

et

$$C(A,\varepsilon U) \geq \text{Log card } A'_n \geq \sum_{i=1}^{n} \text{Log } \frac{a_{i-1}}{\varepsilon i} \geq \sum_{i:\ \frac{a_{i-1}}{\varepsilon i} > 1} \text{Log } \frac{a_{i-1}}{\varepsilon i}$$

Mais

$$\sum_{i:\ \frac{a_{i-1}}{\varepsilon i} > 1} \text{Log } \frac{a_{i-1}}{\varepsilon i} \geq \int_{\frac{1}{a_o}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \text{Log } \frac{1}{t\varepsilon}\, dl(t)$$

et

$$\int_{1/a_o}^{1/\varepsilon} \text{Log } \frac{1}{t\varepsilon}\, dl(t) = [l(t) \text{ Log } \frac{1}{t\varepsilon}]_{1/a_o}^{1/\varepsilon} + \int_{1/a_o}^{1/\varepsilon} \frac{l(t)}{t}\, dt = \int_{o}^{1/\varepsilon} \frac{l(t)}{t}\, dt.$$

cqfd

<u>Corollaire</u> : <u>Si</u> $(d_n)_n$ <u>désigne la suite des $n^{\text{ièmes}}$ épaisseurs de</u> A, <u>on a</u> :

$$\lambda((\frac{d_n}{n})_n) \leq \lambda((\frac{a_n}{n})_n) \leq \rho(A,U)$$

<u>et</u>

$$\rho(A,U) < 1 \Rightarrow \lambda((d_n)_n) \leq \frac{\rho(A,U)}{1-\rho(A,U)}\ .$$

<u>Démonstration</u> : Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a

$$C(A,\varepsilon U) \geq \int_{1/\varepsilon e}^{1/\varepsilon} \frac{l(t)}{t}\, dt \geq l(\frac{1}{\varepsilon e}) \int_{1/\varepsilon e}^{1/\varepsilon} \frac{dt}{t} = l(\frac{1}{\varepsilon e})$$

et
$$\rho(A,U) \geq \limsup_{\varepsilon \to o} \frac{\operatorname{Log} 1(\frac{1}{\varepsilon})}{\operatorname{Log} \frac{1}{\varepsilon}} = \lambda((\frac{a_n}{n})_n)$$

La suite du corollaire résulte de

$$\frac{1}{\lambda((\frac{d_n}{n}))} = \frac{1}{\lambda((d_n)_n)} + 1 \qquad \text{cqfd}$$

<u>Théorème 2</u> : <u>Supposons que</u> E <u>soit un Banach et que le compact disqué</u> A <u>de</u> E <u>soit de pleine approximation relativement à la suite</u> (a_n, E_n). <u>Alors, pour tout</u> n, $d_n(A,U) = a_n$; <u>de plus, si l'on pose</u>

$$m(t) = \max\{n \,;\, n \geq 1,\ a_{n-1} > \frac{1}{t}\} \qquad (t > 0)$$

<u>On a</u> :
$$C(A,\varepsilon U) \geq \int_{d_o/2}^{1/\varepsilon} m(t)dt \quad \underline{\text{et}} \quad \rho(A,U) = \lambda((d_n)_n).$$

<u>Démonstration</u> : Soient $A_n = A \cap E_n$ et $U_n = U \cap E_n$; alors, pour tout entier, $n > 0$:

$$M(A,\varepsilon U) \geq M(A_n,\varepsilon U_n) \geq \frac{m_{E_n}(A_n)}{m_{E_n}(\varepsilon U_n)} .$$

Mais d'après le lemme suivant (Lorentz) :

<u>Lemme</u> : Soit $\{e_i,\ i=1,\dots,n\}$ une base de E_n telle que, pour tout $k \leq n$, l'espace vectoriel engendré par les e_i d'indice $i \leq k$ soit identique à l'espace E_k. Alors :

$$m_{E_n}(A_n) \geq m_{E_n}[\{x \,;\, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_{i-1}} e_i \in U\}] \qquad (\alpha)$$

On peut écrire

$$M(A,\varepsilon U) \geq \frac{\prod_{i=o}^{n-1} a_i}{\varepsilon^n} .$$

On raisonne alors comme dans le théorème précédent pour obtenir la première inégalité. En raisonnant comme dans le corollaire, on obtient

$$\rho(A,U) \geq \lambda((d_n)_n).$$

Mais on a vu que l'on a toujours $\rho(A,U) \leq \lambda((d_n)_n)$. D'où le second résultat du théorème 2. cqfd

<u>Preuve du lemme</u> (énoncé ci-dessus). Cette preuve est longue et nécessite beaucoup de notations.

Considérons tout d'abord l'isomorphisme $J : (x_1,\dots,x_n) \to \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ de $\mathbb{R}^n$ sur E_n et posons $T = J^{-1}$. Notons TU_n par U'_n, TA_n par A'_n, TE_i par E'_i. Soit

$$E' = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; x = (x_1,\dots,x_n), \quad (\frac{x_i}{a_{i-1}})_{1 \leq i \leq n} \in U'_n\}.$$

De plus, F'_k désignera l'espace vectoriel engendré par les vecteurs Te_i avec $i > k$, P_k (resp. Q_k) la projection de $\mathbb{R}^n$ sur F'_k (resp E'_k) avec $k = 0,\dots,n-1$ (resp. $k = 1,\dots,n$), λ_k (resp. μ_k) la mesure de Lebesgue sur F'_k (resp. E'_k) et S_k l'opérateur $(x_i)_{i>k} \to (\frac{x_i}{a_{i-1}})_{i>k}$ de F'_k sur F'_k.

Commençons par montrer le résultat suivant :
"Si $a \in F'_k$ et si $E'(a)$ désigne la section de E' en a, on a pour tout $\lambda \in [-1,1]$

$$\mu_k[E'(a)] \leq \mu_k[E'(\lambda a)]" \tag{1}$$

Posons pour cela $C_\rho = \rho E'(a) + (1-\rho)\, E'(-a)$. Comme E' est convexe, on a, pour tout ρ de $[0,1]$,

$$C_\rho \subset E'(\rho\, a + (1-\rho)(-a)) = E'((2\rho-1)a).$$

Mais par un théorème de Brun-Minkowski

$$(\mu_k(C_\rho))^{\frac{1}{k}} \geq \rho(\mu_k(C_o))^{\frac{1}{k}} + (1-\rho)(\mu_k(C_1))^{\frac{1}{k}}$$

si $0 \leq \rho \leq 1$; et comme

$$C_o = E'(-a),\ C_1 = E'(a),\quad \mu_k[E'(a)] = \mu_k[E'(-a)]$$

c'est donc que

$$\mu_k[E'(\lambda a)] \geq \mu_k(C_\rho) \geq \mu_k[E'(a)]$$

avec $\lambda = 2\rho - 1$. (1) est donc établi.

Revenons à la démonstration du lemme. On veut montrer que

$$\mu_n(E') \leq \mu_n(A'_n) \quad . \tag{2}$$

On a, si E_o désigne l'ensemble $\{0\}$,

$$A_n = \bigcap_{i=o}^{n-1} (E_i + a_i U_n) \ ,$$

donc

$$A'_n = \bigcap_{i=o}^{n-1} a_i P_i^{-1} P_i U'_n .$$

Posons alors

$$D_k = \bigcap_{i=k}^{n-1} a_i P_i^{-1} P_i U'_n \ , \quad (k = 0,\dots,n-1)$$

$$C_k = \{x \ ; \ x \in \mathbb{R}^n,\ Q_k x + \frac{1}{a_{k-1}} S_k \circ P_k\ x \in E' \}$$

$$(k=1,\dots,n-1)$$

et

$$M_k = D_k \cap C_k \quad (k=1,\dots,n-1).$$

Bien entendu

$$E' \subset D_{n-1}, \qquad A'_n \subset M_1 \qquad (C_1 = a_o U).$$

Pour montrer (2), nous allons montrer que :

$$\mu_n(E') \leq \mu_n(M_{n-1}) \quad \text{et} \quad \mu_n(M_k) \leq \mu_n(M_{k-1}) \quad (k=n-1,\dots,2). \tag{3}$$

On a

$$\mu_n(E') = \int_{P_{n-1}D_{n-1}} \mu_{n-1}[E'(x_n)]dx_n$$

et par (1)

$$\mu_n(E') \leq \int_{P_{n-1}D_{n-1}} \mu_{n-1}[E'(\frac{S_{n-1}^{-1}x_n}{a_{n-2}})]\lambda_n\ (dx_n) \tag{4}$$

D'autre part, si $k = 1,\dots,n-1$

$$\mu_n(M_k) = \mu_k \otimes \lambda_k(M_k) = \int_{x\in F'_k} \mu_k[M_k(x)]\lambda_k(dx)$$

où $M_k(x)$ est la section de M_k en x.

Mais :

$$x \in F'_k,\quad x \notin P_k\ D_k \Rightarrow M_k(x) \neq \emptyset,$$

$$x \in F'_k,\quad x \in P_k\ D_k \Rightarrow M_k(x) = E'(\frac{S_k^{-1}x}{a_{k-1}}) \quad ;$$

d'où

$$\mu_n(M_k) = \int_{x\in P_kD_k} \mu_k[E'(\frac{S_k^{-1}x}{a_{k-1}})]\ \lambda_k(dx)\ . \tag{5}$$

En outre, pour tout x de P_kD_k et pour tout k tel que $2 \leq k \leq n-1$

$$\mu_k[E'(\frac{S_k^{-1}x}{a_{k-1}})] = \int_{S_k} \mu_{k-1}[E'((x_k, \frac{S_k^{-1}x}{a_{k-1}}))]$$

avec $S_k = \{x_k\ ;\ x_k \in \mathbb{R},\ (x_k,x) \in a_{k-1}\ P_{k-1}\ U'_n\}$; par conséquent

$$\mu_n(M_k) = \int_{(x_k,x)\in P_{k-1}D_{k-1}} \mu_{k-1}[E'((x_k,\frac{S_k^{-1}x}{a_{k-1}}))]dx_k \otimes \mu_k(dx).$$

D'où, par (1)

$$\mu_n(M_k) \leq \mu_n(M_{k-1}) \qquad (k = 2,\dots,n-1)$$

et par (4) et (5)

$$\mu_n(E') \leq \mu_n(M_{n-1})$$

On a donc obtenu (3), qui implique (2). cqfd

<u>Théorème 3</u> : <u>Si</u> E <u>est un Hilbert et si</u> A <u>est un compact disqué on a</u> :

$$EV(A) \geq -\frac{1}{\lambda\left(\left(\frac{a_n}{n}\right)\right)} + \frac{1}{2} .$$

<u>Démonstration</u> : Reprenons la démonstration du théorème 1, A_n désignant toujours l'enveloppe convexe équilibrée des x_i, $i \leq n$. Notons m'_{E_n} la mesure de Haar sur E_n telle que

$$m'_{E_n}[\{x \,;\, x \in E_n,\ \|x\| \leq 1\}] = c_n,$$

où c_n est le volume de la boule euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Comme E est un Hilbert, on a :

$$m'_{E_n}(A_n) \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{2a_{i-1}}{i} \;;$$

d'où

$$\frac{\operatorname{Log} m'_{E_n}(A_n)}{n \operatorname{Log} n} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{Log} \frac{2a_{i-1}}{i}}{n \operatorname{Log} n} ,$$

et par conséquent

$$-\frac{1}{2} + EV(A) \geq \limsup_n \frac{\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Log} \frac{2a_{i-1}}{i}}{n \operatorname{Log} n}$$

Le deuxième membre de cette inégalité est égal à $-1/\lambda\left(\left(\frac{a_i}{i}\right)\right)$ d'après le théorème du §3 de l'exposé N° 19. D'où le théorème.

Si de plus, <u>$a_i \downarrow 0$</u>, alors

$$\frac{1}{\lambda(\frac{a_i}{i})} = \frac{1}{\lambda(a_i)} + 1$$

et

$$EV(A) \geq - \frac{1}{\lambda(a_i)} - \frac{1}{2} \quad . \qquad (\beta)$$

<u>Corollaire</u> : <u>Sous les hypothèses du théorème 5, on a</u>

$$\frac{1}{\rho(A,U)} \geq - EV(A) - \frac{1}{2} \quad .$$

<u>Démonstration</u> : On a

$$- \frac{1}{2} + EV(A) \geq - \frac{1}{\lambda(\frac{d_i}{i})} = \frac{-1}{\lambda(d_i)} - 1 \geq \frac{-1}{r(A)} - 1 \; .$$

cqfd

<u>Lemme</u> : Soit A un compact disqué de l'<u>Hilbert</u> E, soit la suite $(x_n, E_n)_n$ définie comme dans le lemme 1. Soit $\{e_i\}$ une famille orthonormée de E telle que l'espace vectoriel engendré par les e_i, $i \leq n$ soit identique à E_n. Soit H_1 le sous espace vectoriel fermé de H engendré par les e_i et soit

$$A_1 = \{x \; ; \; x \in H_1, \; d(x, E_n) \leq a_n, \; \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Alors

$$A_1 \supset \{x \; ; \; x \in H_1, \; \sum_n [<x, e_n>]^2 \frac{1}{a_n^2} \leq 1\} \; .$$

Si en outre $\lambda((a_n)_n) < 2$, il existe $(b_n)_n$, $b_n \downarrow o$, telle que $\sum_n b_n^2 < +\infty$ et

$$A_1 \subset \{x \; ; \; x \in H_1, \; \sum_n [<x, e_n>]^2 \frac{1}{b_n^2} \leq 1\} \; .$$

<u>Démonstration</u> : Posons $<x, e_n> = x_n$. Par hypothèse, si $x \in A_1$ on a

$$\sum_{i \geq n} x_i^2 \leq a_n^2 \; .$$

Si l'on suppose $\lambda((a_n)_n) < 2$, il existe un $\varepsilon > 0$, tel que

$$\sum_n a_n^{2-\varepsilon} < +\infty .$$

Posons

$$\frac{1}{b_n^2} = \sum_{i \leq n} \frac{1}{a_i^{\varepsilon}} \leq \frac{n}{a_n^{\varepsilon}} .$$

Je dis que $\sum_n b_n^2 < +\infty$; en effet, puisque $\sum_n a_n^{2-\varepsilon} < +\infty$, on a $n\, a_n^{2-\varepsilon} < 1$, pour n assez grand $(n \geq m)$; donc pour ces n

$$\frac{1}{b_n^2} \geq \frac{m}{a_1^{\varepsilon}} + \sum_{j=m+1}^{n} j^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}$$

et

$$\sum_{j=m+1}^{n} j^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} \geq \int_m^n x^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}\, dx = \left[\frac{x^{\frac{2}{2-\varepsilon}}}{\frac{2}{2-\varepsilon}} \right]_m^n .$$

Donc, si $n \geq m$, $\frac{1}{b_n^2} \geq \alpha + \beta\, n^{\frac{2}{2-\varepsilon}}$ (avec α et β constantes indépendantes de n) et

$$b_n^2 \leq \frac{1}{\alpha + \beta n^{\frac{2}{2-\varepsilon}}} \Rightarrow \sum_n b_n^2 < +\infty .$$

Il reste à montrer qu'il existe $M < +\infty$ tel que

$$\text{"} \sum_{i \geq n} x_i^2 \leq a_n^2 , \ \forall n \text{"} \Rightarrow \sum_n \frac{x_n^2}{b_n^2} \leq M.$$

or

$$\sum_{k \leq n} \frac{x_k^2}{b_k^2} = \frac{1}{a_o^{\varepsilon}} \Big(\sum_{o \leq k \leq n} x_k^2 \Big) + \dots + \frac{1}{a_i^{\varepsilon}} \sum_{i \leq k \leq n} x_k^2 + \dots + \frac{1}{a_n^{\varepsilon}} x_n^2$$

$$\leq \frac{1}{a_o^{\varepsilon}} a_o^2 + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{a_i^{\varepsilon}} a_i^2 + \dots\dots\dots + \frac{a_n^2}{a_n^{\varepsilon}}$$

$$\leq \sum_{i \leq n} a_i^{2-\varepsilon}$$

et

$$\sum_k \frac{x_k^2}{b_k^2} \leq \sum_k a_k^{2-\varepsilon} , \qquad \text{cqfd}$$

Corollaire : Si H est un Hilbert séparable et A un compact disqué tel que $EV(A) < -1$, alors l'application $H_A \to H$ est d'Hilbert-Schmidt.
Il en sera ainsi en particulier si $\rho(A,U) < 1$.
Si A est en outre de pleine approximation, $H_A \to H$ est d'Hilbert-Schmidt dès que $\rho(A,U) < 2$.

Preuve : En effet, on a vu que

$$-\frac{1}{2} + EV(A) \geq -\frac{1}{\lambda(\frac{a_i}{i})} \quad \text{et} \quad \rho(A,U) \geq -\frac{1}{EV(A)} .$$

Mais

$$EV(A) < -1 \Rightarrow -\frac{1}{\lambda(\frac{a_i}{i})} < -1 \Rightarrow a_i \downarrow o .$$

Donc, par (β)

$$EV(A) < -1 \Rightarrow \lambda((a_i)) < 2 .$$

et puisque

$$A \subset \{x \; ; \; x \in H \; ; \; \sum_n |<x,e_n>|^2 \frac{1}{b_n^2} \leq 1\}$$

avec $\sum_n b_n^2 < +\infty$, $H_A \to H$ est d'Hilbert-Schmidt.

Maintenant, si A est de pleine approximation, on a vu que

$$\rho(A,U) = \lambda((a_n)_n) .$$

Remarque : Si A est un disque compact d'un Hilbert, on a :

$$\rho(A,U) < 1 \Rightarrow \lambda((d_n)_n) < 2 .$$