

# SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. BADRIKIAN

**$\varepsilon$ -entropies ;  $\varepsilon$ -capacités ; épaisseurs (suite)**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1969-1970), exp. n° 19, p. 1-13

[http://www.numdam.org/item?id=SAF\\_1969-1970\\_\\_A20\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970__A20_0)

© Séminaire Laurent Schwartz  
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77  
(633)

S E M I N A I R E L. S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

$\varepsilon$ -ENTROPIES ;  $\varepsilon$ -CAPACITES ; EPAISSEURS (Suite)  
-----

par A. BADRIKIAN

Exposé N° 19

6 Avril 1970



Proposition 7 : Soit E un espace vectoriel normé dont la boule unité est désignée par U et soit  $A \subset E$ . A est contenue dans un sous-espace de dimension finie si et seulement si il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $d_n(A, U) = 0$ .

Démonstration : la nécessité est immédiate.

Supposons donc que  $d_n(A, U) = 0$  et supposons qu'il existe, dans A,  $n+1$  éléments linéairement indépendants  $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ . Il existe alors  $n+1$  éléments  $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1}$  de  $E'$  (dual de E) tels que

$$\langle x_i, x'_k \rangle = \delta_{ik} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

(pour tout  $i, k = 1, 2, \dots, n+1$ ).

Il existe en outre  $\sigma > 0$  tel que

$$" \alpha_{ik} \in \mathbb{C}, |\alpha_{ik}| \leq \sigma \quad (i, k = 1, 2, \dots, n+1) " \Rightarrow \det \{ \delta_{ik} - \alpha_{ik} \} \neq 0 .$$

Posons donc

$$\delta = \sigma \left( \sup_{1 \leq i \leq n+1} \|x'_i\| \right)^{-1} .$$

Puisque  $d_n(A, U) = 0$ , il existe un sous-espace F de E de dimension inférieure à n tel que

$$A \subset \delta U + F .$$

Par conséquent, chaque  $x_i$  peut se mettre sous la forme

$$x_i = \delta y_i + z_i \quad y_i \in U, z_i \in F .$$

Les éléments  $z_i (i=1, 2, \dots, n+1)$  étant linéairement dépendants, on a

$$\det \{ \langle z_i, x'_k \rangle \} = 0 .$$

En outre :

$$\delta |\langle y_i, x'_k \rangle| \leq \delta \|x'_k\| \leq \sigma .$$

Donc :

$$\det \{ \langle z_i, x'_k \rangle \} = \det \{ \langle x_i, x'_k \rangle - \delta \langle y_i, x'_k \rangle \} \neq 0 .$$

Ce qui est contradictoire et A ne peut donc contenir plus de n éléments linéairement indépendants. cqfd.

Proposition 8 : soient E et F deux espaces normés et T : E → F linéaire continue. Soit U (resp.V) la boule unité de E (resp.F). Pour tout A ⊂ E et tout (m,n) ∈ N × N, on a :

$$d_{m+n}(TA, V) \leq d_n(A, U) d_m(TU, V) .$$

Démonstration : c'est immédiat si  $d_n(A, U) = +\infty$  et  $d_m(TU, V) \neq 0$ .

Si  $d_n(A, U) = +\infty$  et  $d_m(TU, V) = 0$ , le résultat reste encore vrai (avec la convention  $0 \cdot \infty = 0$ ) car TU est contenu dans un sous-espace de F de dimension m, donc aussi TA ; et par conséquent  $d_{m+n}(TA, V) = 0$ .

Supposons donc  $d_m(A, U) < +\infty$ .

Si  $\rho > d_n(A, U)$  et  $\sigma > d_m(TU, V)$ , il existe un sous-espace  $E_1$  de E de dimension n et un sous-espace  $F_1$  de F de dimension m tels que :

$$A \subset E_1 + \rho U \text{ et } TU \subset F_1 + \sigma V .$$

Alors

$$TA \subset TE_1 + F_1 + \rho\sigma V \text{ et } \dim(TE_1 + F_1) \leq m+n .$$

D'où le résultat.

Proposition 9 : Si E est un espace vectoriel normé de dimension au moins égale à n+1 et si U désigne sa boule unité fermée on a :

$$d_n(U, U) = 1 .$$

Démonstration : soit  $E_n$  un sous-espace de E de dimension égale à n et soit  $x \in E \setminus E_n$  ; on démontre facilement par un raisonnement de compacité qu'il existe  $y \in E_n$  tel que

$$\|x - y\| = d(x, E_n) = a > 0 .$$

Posons  $z = \frac{1}{a}(x-y)$ . Alors  $\|z\| = 1$  et  $d(z, E_n) = 1$ . Donc pour tout sous-espace  $E_n$  de dimension n, la "déviation" de U relativement à  $E_n$  est égale à un. cqfd.

Le résultat suivant est nettement plus difficile à démontrer. Aussi, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Lorentz "Approximation of functions" p.137-138.

Théorème 1 (Gokhberg-Krein) : si E est un Banach dont la boule unité fermée est U, pour tout sous-espace vectoriel  $E_{n+1}$  de dimension n+1, on a :

$$d_n(U \cap E_{n+1}, U) = 1 .$$

Ce théorème nous permettra de calculer des  $n^{\text{ièmes}}$  épaisseurs d'ellipsoïdes. Nous introduisons auparavant une définition.

Définition : Soit E un espace normé et  $A \subset C$  ; A est dite de pleine approximation s'il existe une suite  $(\delta_n)$  de réels  $> 0$  telle que  $\delta_n \downarrow 0$  et une suite croissante  $(E_n)$  de sous-espaces de E de dimension n, telles que :

$$x \in A \Leftrightarrow d(x, E_n) \leq \delta_n , \forall n \in \mathbb{N} .$$

Proposition 10 : Si E est un Banach et si  $A \subset E$  est de pleine approximation (relativement à la suite  $(\delta_n, E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , alors :

$$d_n(A, U) = \delta_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En outre :

$$\delta_n = \sup_{x \in A} d(x, E_n).$$

Démonstration : il est clair que

$$d_n(A, U) \leq d_n(x, E_n) \leq \delta_n.$$

Posons  $U_{n+1} = E_{n+1} \cap \{x; \|x\| \leq \delta_n\}$ .

Si  $x \in U_{n+1}$ , on a :

$$d(x, E_k) \leq \delta_n \leq \delta_k, \quad \text{si } k = 0, 1, \dots, n$$

et

$$d(x, E_k) = 0, \quad \text{si } k = n+1, n+2, \dots$$

Donc, d'après le théorème 1

$$d_n(A, U) \geq d_n(U_{n+1}, U) = \delta_n$$

(car  $U_{n+1} \subset A$ ). Donc :

$$d_n(A, U) = \delta_n.$$

Il est clair en outre que le sous-espace  $E_n$  est extrémal, c'est-à-dire

$$\delta_n = \sup_{x \in A} d(x, E_n) = d_n(A, U). \quad \text{cqfd.}$$

Remarque : dans la démonstration on a seulement utilisé deux propriétés :

- $x \in A \Rightarrow d(x, E_n) \leq \delta_n$
- $U_{n+1} = E_{n+1} \cap \{x; \|x\| \leq \delta_n\} \subset A, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$

Donc la proposition est vraie pour tout  $A \subset E$  satisfaisant à ces conditions relativement à  $(\delta_n, E_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

Comme application, qui sera fondamentale dans la suite, on a la situation suivante :

Soit  $E = l^p (1 \leq p < \infty)$  et soit  $(\delta_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de nombres réels telle que  $\delta_n > 0$  et  $\delta_n \downarrow 0$ . Soit  $E_n$  le sous-espace de  $l^p$  formé par les suites dont les coordonnées d'indices strictement supérieurs à  $n+1$  sont nulles.

Soit  $A = \{x; x \in l^p; \sum_{n \geq 0} \left| \frac{x_n}{\delta_n} \right|^p \leq 1\}$  (A est un "p-ellipsoïde").

Il est clair que A satisfait aux conditions de la remarque ci-dessus. Donc  $d_n(A, U) = \delta_n$ , pour tout  $n$ .

Donnons enfin une propriété qui lie les  $n^{\text{ièmes}}$  épaisseurs à l' $\varepsilon$ -entropie.

Soit U un disque équilibré absorbant de l'espace vectoriel E. On écrira  $d_n$  au lieu de  $d_n(A, U)$ . Si  $t > 0$ , on pose

$$m(t) = \sup \{n; n \in \mathbf{N}^+, d_{n-1} \geq t\}$$

(avec la convention  $\sup \emptyset = 1$  !). On a alors la :

Proposition 11 : pour tout  $\varepsilon > 0$

$$H(A, \varepsilon U) \leq m\left(\frac{3}{\varepsilon}\right) \text{Log} \frac{4(d_0 + \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Démonstration : c'est trivial si  $m\left(\frac{3}{\varepsilon}\right) = +\infty$ .

Supposons donc  $m(t) < +\infty$ . Puisque  $d_{m(t)} < \frac{1}{t}$ , si  $m(t) < \infty$ , il existe un sous-espace  $E_m$  de E de dimension  $m = m(t)$  tel que

$$A \subset E_m + \frac{1}{t} U.$$



En outre  $A \subset (d_0 + \frac{1}{t})U$  ; donc,  $A \subset E_m \cap (d_0 + \frac{1}{t})U + \frac{1}{t}U$  .  
 Or on a l'inégalité :

$$N(B + U', U + 2U') \leq N(B, U)$$

valable pour tout disque absorbant  $U$  de  $E$ , tout disque  $U'$  de  $E$  et tout  $B \subset E$ .

Donc :

$$\begin{aligned} N(A, \frac{3}{t}U) &\leq N(E_m \cap (d_0 + \frac{1}{t})U + \frac{1}{t}U; \frac{3}{t}U) \\ &\leq N(E_m \cap (d_0 + \frac{1}{t})U; \frac{1}{t}U) \end{aligned}$$

(car, en vertu du fait que  $U$  est convexe équilibré,  $\frac{1}{t}U + \frac{2}{t}U = \frac{3}{t}U$ ).

On a

$$N(E_m \cap (d_0 + \frac{1}{t})U; \frac{1}{t}U) = N(E_m \cap (d_0 + \frac{1}{t})U; \frac{1}{t}U \cap E_m).$$

Or,

$$N(E_m \cap (d_0 + \frac{1}{t})U; \frac{1}{t}U \cap E_m) \leq M(E_m \cap (d_0 + \frac{1}{t})U; \frac{1}{2t}U \cap E_m)$$

(en vertu de la proposition 1 de l'exposé 18 et de la convexité de  $U$ ).

En outre, d'après la proposition 6 de l'exposé 18

$$M(E_m \cap (d_0 + \frac{1}{t})U; \frac{1}{2t}U \cap E_m) \leq \left[ \frac{2(d_0 + \frac{1}{t})}{1/2t} \right]^m .$$

Il suffit alors de prendre le logarithme et de prendre  $\varepsilon = \frac{1}{t}$  . cqfd.

§ 3. INDICE DE CONVERGENCE D'UNE SUITE

Définition : Soit  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombre réels positifs telle que  $b_n \downarrow 0$ . On appelle indice de convergence de cette suite et on note  $\lambda((b_n)_n)$  le nombre

$$\inf\{\alpha ; \alpha > 0, \alpha < \infty, N_\alpha(b_n) < \infty\},$$

où  $N_\alpha(b_n)$  a la signification usuelle.

Si  $b_n \downarrow a > 0$ , il est commode de définir  $\lambda((b_n)_n)$  par  $\lambda((b_n)_n) = +\infty$ .

Quand aucune confusion ne sera possible, on notera  $\lambda$  au lieu de  $\lambda((b_n)_n)$ .

Proposition 12 : On a, si  $b_n \downarrow 0$

$$\lambda((b_n)_n) = \limsup_n \frac{\text{Log } n}{\text{Log } \frac{1}{b_n}} = \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\text{Log } n(\varepsilon)}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon}}$$

où  $n(\varepsilon) = \sup\{n ; n \in \mathbb{N}, b_n \geq \varepsilon\}$ .

Démonstration :

$$1) \quad \lambda((b_n)_n) \leq \limsup_n \frac{\text{Log } n}{\text{Log } \frac{1}{b_n}} = s$$

C'est trivial, si  $s = +\infty$ . Sinon, soit  $\alpha > s$  ; il existe alors  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $\alpha - \varepsilon_0 > s$  et alors

$$b_n^\alpha \leq \frac{1}{\frac{\alpha}{\alpha - \varepsilon_0} n} \quad (\text{si } n \text{ suffisamment grand}) ;$$

donc :

$$\sum b_n^\alpha < +\infty .$$

2) Démontrons maintenant que  $s \leq \lambda((b_n)_n)$ .

C'est trivial si  $\lambda((b_n)_n) = +\infty$ . Sinon, soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tel que  $\alpha > \lambda((b_n)_n)$ . Alors  $nb_n^\alpha \rightarrow 0$ , et par conséquent

$\text{Log } n + \alpha \text{Log } b_n < 0$ , à partir d'un certain  $n_0$ .

Donc

$$\sup_{n \geq n_0} \frac{\text{Log } n}{-\text{Log } b_n} \leq \alpha \quad \text{et} \quad s \leq \alpha.$$

Il reste donc à démontrer que  $s = \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\text{Log } n(\varepsilon)}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon}}$ . Or

$$\frac{\text{Log } n}{\text{Log } \frac{1}{b_n}} \leq \frac{\text{Log } n(b_n)}{\text{Log } \frac{1}{b_n}} \leq \frac{\text{Log } m}{\text{Log } \frac{1}{b_m}}$$

avec  $m = n(b_n)$ . Donc

$$\lambda(b_n) = \limsup_n \frac{\text{Log } n(b_n)}{\text{Log } \frac{1}{b_n}} = \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\text{Log } n(\varepsilon)}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon}}$$

Proposition 13 : 1) Soit  $0 < \alpha < \infty$  et  $b_n \downarrow 0$ . Alors

$$\frac{1}{\lambda\left(\left(\frac{b_n}{\alpha}\right)_n\right)} = \frac{1}{\lambda\left((b_n)_n\right)} + \alpha \quad (\text{avec la convention } \frac{1}{\infty} = 0 \text{ et } \frac{1}{0} = \infty)$$

Plus généralement, si  $b_n \downarrow 0$ ,  $a_n \downarrow 0$  et si

$$\lim \frac{\text{Log } \frac{1}{a_n}}{\text{Log } n} \text{ existe,}$$

alors

$$\frac{1}{\lambda\left((a_n b_n)_n\right)} = \frac{1}{\lambda\left((a_n)_n\right)} + \frac{1}{\lambda\left((b_n)_n\right)}$$

2) Si  $\sum b_n^\alpha < +\infty$  ( $\alpha \geq 0$ ) et si l'on pose  
 $v_n = \left(\sum_{k \geq n} b_k^\alpha\right)^{1/\alpha}$ , alors

$$\frac{1}{\lambda\left((b_n)_n\right)} = \frac{1}{\lambda\left((v_n)_n\right)} + \frac{1}{\alpha}.$$

Démonstration : 1) est trivial si  $\lambda((b_n)_n) = +\infty$  ou si  $\lambda((b_n)_n) = 0$ . Dans le cas contraire, il suffit d'utiliser la formule

$$\lambda((c_n)_n) = \limsup_n \frac{\text{Log } n}{-\text{Log } c_n} \quad (\text{si } c_n \downarrow 0).$$

Pour démontrer 2), remarquons d'abord que  $n^{1/\alpha} b_{2n} < v_n$ . Donc

$$\lambda((b_n)_n) = \lambda((b_{2n})_n) \leq \lambda\left(\left(\frac{v_n}{n^{1/\alpha}}\right)_n\right)$$

et

$$\frac{1}{\lambda((b_n)_n)} \geq \frac{1}{\lambda((v_n)_n)} + \frac{1}{\alpha}.$$

Il reste à démontrer l'inégalité inverse.

Supposons que  $\lambda((b_n)_n) < \alpha$  et soit  $\gamma$  tel que

$$\lambda((b_n)_n) < \gamma < \alpha.$$

Alors,  $b_n < n^{-1/\gamma}$  à partir d'un certain  $n_0$  ; donc

$$v_n^\alpha = \sum_{k \geq n} \frac{1}{k^{\alpha/\gamma}} \leq \int_{n-1}^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha/\gamma}} \leq K n^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}$$

et

$$\frac{1}{\lambda((b_n)_n)} \leq \frac{1}{\lambda((v_n)_n)} + \frac{1}{\alpha}. \quad \text{cqfd.}$$

Théorème : On a  $\lambda((b_n)_n) = - \frac{1}{\limsup_n \frac{\sum_1^n \text{Log } b_k}{n \text{Log } n}}$ .

Démonstration : Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme : Pour tout entier  $p$

$$\sum_{k=p+1}^{p+m} \frac{\text{Log } k}{(p+m) \text{Log}(p+m)} \rightarrow 1, \text{ quand } m \rightarrow \infty.$$

En effet,  $\sum_{k=p+1}^{p+m} \text{Log } k = \text{Log} \frac{(m+p)!}{p!}$ , et d'autre part, d'après la formule de Stirling

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + \varepsilon(n)),$$

on a :

$$\text{Log}(m+p)! = (m+p)\text{Log}(m+p) + (m+p) \text{Log} \frac{1}{e} + \frac{1}{2} \text{Log}[2\pi(m+p)] + \text{Log}(1 + \varepsilon(m+p)).$$

Par conséquent,

$$\frac{\text{Log}(m+p)!}{(m+p)\text{Log}(m+p)} = 1 + \frac{\text{Log} \frac{1}{e}}{\text{Log}(m+p)} + \frac{1}{2} \frac{\text{Log}[2\pi(m+p)]}{(m+p)(\text{Log}(m+p))} + \frac{\text{Log}(1 + \varepsilon(m+p))}{(m+p)\text{Log}(m+p)}$$

tend vers 1, quand  $m \rightarrow \infty$ . cqfd.

Démontrons maintenant le théorème : Puisque  $(b_n)$  est décroissante, il est clair que

$$-\frac{1}{\lambda} \leq \limsup_n \frac{\sum_1^n \text{Log } b_k}{n \text{Log } n} \leq 0.$$

Donc le résultat est démontré si  $\lambda = +\infty$ . Supposons  $\lambda < +\infty$  et soit  $\alpha$  tel que  $\lambda < \alpha$  ; alors  $\sum b_n^\alpha < +\infty$  et par conséquent  $n b_n^\alpha < 1$ , à partir d'un certain  $n_0$  ; ou encore

$$\text{Log } b_n \leq \text{Log}(n^{-1/\alpha}).$$

$$\limsup \frac{\sum_1^n \text{Log } b_k}{n \text{Log } n} = \limsup \frac{\sum_{n_0}^n \text{Log } b_k}{n \text{Log } n} \leq -\frac{1}{\alpha} \limsup \frac{\sum_{n_0}^n \text{Log } k}{n \text{Log } n} = \frac{-1}{\alpha}$$

Puisque ceci est vrai pour tout  $\alpha > \lambda$ , donc  $-\frac{1}{\alpha} > -\frac{1}{\lambda}$ , on a le résultat.

Application : Si  $A \in E$ , on a  $\rho(A, U) \leq \lambda((d_n(A, U))_n)$ .

En effet, on a vu (proposition 11) que

$$H(A, \varepsilon U) \leq m\left(\frac{3}{\varepsilon}\right) \text{Log} \frac{4(d_0 + \varepsilon)}{\varepsilon} ;$$

donc

$$\frac{\text{Log} H(A, \varepsilon U)}{\text{Log} \frac{1}{\varepsilon}} \leq \frac{\text{Log} m\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)}{\text{Log} \frac{1}{\varepsilon}} + \frac{\text{Log} \text{Log} 4 \frac{d_0 + \varepsilon}{\varepsilon}}{\text{Log} \varepsilon}$$

Par conséquent

$$\rho(A, U) = \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\text{Log} H(A, \varepsilon U)}{\text{Log} \frac{1}{\varepsilon}} \leq \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{m\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)}{\text{Log} \frac{1}{\varepsilon}}$$

Or,  $m\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = n(\varepsilon) + 1$  ; donc

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{m\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)}{\text{Log} \frac{1}{\varepsilon}} = \lambda((d_n)_n) .$$

#### § 4. PROPRIETES DES EXPOSANTS DE VOLUME

1.  $EV(\lambda A, \mu U) = EV(A, U)$ ,  $\forall \lambda, \mu > 0$   
et  $EW(\lambda A, \mu U) = EW(A, U)$ .

2. Si  $E$  est un espace vectoriel normé et si  $U$  désigne sa boule unité et si  $A$  est borné

$$EV(A, U) \leq 0 .$$

Proposition 14 : Si  $E$  est un e.v. normé,  $U$  sa boule unité et si  $A$  est précompact, alors

$$\rho(A, U) \geq - \frac{1}{EV(A, U)} \quad \underline{\text{et}} \quad \rho(A, U) \geq - \frac{1}{EW(A, U)} .$$

Preuve : Soit  $T : E \rightarrow E$ , linéaire continue de rang  $m$

$$M(A, \varepsilon U) \geq M(TA, \varepsilon TU) \geq \frac{m_{TE}(\overline{TA})}{m_{TE}(\overline{TU})} \times \frac{1}{\varepsilon^m} .$$

Donc :

$$M(A, \varepsilon U) \geq v_m(A, U) \times \frac{1}{\varepsilon^m}, \quad \forall m \in \mathbf{N}^+.$$

Posons  $EV(A, U) = a$  ; si  $EV(A, U) > -d$  ( $d > 0$ ), il existe donc une suite extraite  $\{m_k\}$  telle que :

$$v_{m_k}(A, U) \geq \left(\frac{1}{d}\right)^{m_k}, \quad m_k \uparrow \infty ;$$

et par conséquent

$$M(A, \varepsilon U) \geq \left(\frac{1}{\varepsilon d}\right)^{m_k}.$$

Posons  $\varepsilon_k = \frac{1}{\varepsilon d^{m_k}}$  ; alors  $\varepsilon_k \downarrow 0$ , et, en remplaçant, dans la formule ci-dessus,

$$\varepsilon \text{ par } \varepsilon_k : \quad \text{Log } M(A, \varepsilon_k U) \geq m_k \text{Log } \frac{1}{\varepsilon}$$

Par suite

$$\rho(A, U) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } m_k}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon_k}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } m_k}{\text{Log } \varepsilon d^{m_k}} = \frac{1}{d}$$

Si  $d \uparrow -a \neq 0$ , on en déduit  $\rho(A, U) \geq -\frac{1}{a}$

Si  $d \uparrow 0$ , on en déduit  $\rho(A, U) = 0$ . cqfd

De même,  $M(A, \varepsilon U) \geq M(A \cap E_n, \varepsilon U \cap E_n)$ ,  $E_n \in \mathcal{E}_n$  ;

soit  $M(A, \varepsilon U) \geq \frac{m_{E_n}(A \cap E_n)}{m_{E_n}(U \cap E_n)} \times \frac{1}{\varepsilon^n}$  et on continue le raisonnement comme

ci-dessus.

Application : Soit  $E = 1^q$  ( $1 \leq q \leq \infty$ ) et  $U$  sa boule unité. Soit  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$  telle que  $b_n \downarrow 0$ ,  $b_n > 0$  pour tout  $n$ . Posons

$$A = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} ; (x_n)_n \in l^q, N_p \left( \frac{x}{b_n} \right) \leq 1 \right\}$$

( $1 \leq p \leq \infty$ ). Si  $p > q$ , on supposera que  $\sum b_n^\alpha < \infty$ , avec  $\alpha = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ .

Alors

$$EV(A, U) \geq - \frac{1}{\lambda(b_n)} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \quad , \quad (1)$$

$$EW(A, U) \geq - \frac{1}{\lambda(b_n)} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \quad . \quad (2)$$

En effet,

$$v_n(A, U) \geq b_n^n \frac{c_{n,p}}{c_{n,q}}$$

où

$$c_{n,r} = \left( \frac{2}{r} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right) \right)^n \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{r} + 1\right)} = \int_{\sum_{i=1}^n |x_i|^r \leq 1} dx_1 \dots dx_n \quad .$$

Or,  $\Gamma\left(\frac{n}{r} + 1\right) \sim \left(\frac{n}{re}\right)^{n/r} \sqrt{2\pi \frac{n}{r}}$  (quand  $n \rightarrow \infty$ ). Donc

$$\frac{c_{n,p}}{c_{n,q}} \geq \left[ C_n \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right]^n$$

et on a gagné.

On procède de même pour l'estimation (2).