

# SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. SCHWARTZ

## Mouvement brownien

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1969-1970), exp. n° 15, p. 1-23

<[http://www.numdam.org/item?id=SAF\\_1969-1970\\_\\_A16\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970__A16_0)>

© Séminaire Laurent Schwartz  
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V  
Téléphone : MÉDICIS 11-77  
(633)

S E M I N A I R E L. S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

MOUVEMENT BROWNIEN

-----

Exposé N° 15

23 Février 1970



§ 1. DEFINITION DE LA FONCTION ALEATOIRE DU MOUVEMENT BROWNIEN

C'est une fonction aléatoire  $f$  sur  $\mathbf{R}$  à valeurs réelles :  
 $\mathbf{R} \rightarrow L^0(\Omega, \mu; \mathbf{R}) = L^0(\Omega, \mu)$ , ayant les 2 propriétés suivantes :

1) Pour  $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \dots \leq t_n$ , les variables aléatoires  $f(t_2) - f(t_1)$ ,  $f(t_3) - f(t_2), \dots, f(t_n) - f(t_{n-1})$ , sont indépendantes, et  $f(0) = 0$ .

2) Pour  $t \leq t'$ ,  $f(t') - f(t)$  est une variable aléatoire gaussienne, de paramètre  $\sqrt{t' - t}$ .

Cette définition demande quelques précisions. Des variables aléatoires  $f_i : (\Omega, \mu) \rightarrow X_i$ ,  $i \in I$  fini ou dénombrable, sont dites indépendantes, si la loi  $f(\mu)$  de la variable aléatoire  $f = \prod_{i \in I} f_i : (\Omega, \mu) \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ , est le produit tensoriel des lois des  $f_i : f(\mu) = \otimes_{i \in I} f_i(\mu)$ .

D'autre part, la loi de Gauss normale  $\gamma_1^{(\diamond)}$  est la probabilité  $e^{-\pi x^2} dx$  sur  $\mathbf{R}$ ; la loi de Gauss  $\gamma_\sigma$  de paramètre  $\sigma$  est son homothétique de rapport  $\sigma \geq 0$ , soit  $e^{-\pi x^2 / \sigma^2} \frac{dx}{\sigma}$ , pour  $\sigma > 0$ , et  $\delta$  pour  $\sigma = 0$ . Si une variable aléatoire  $f$  suit la loi de Gauss de paramètre  $\sigma$ , la variable aléatoire  $kf$  suit la loi de Gauss de paramètre  $|k|\sigma$ . La transformée de Fourier de  $\gamma_1$  est  $e^{-\pi \tau^2}$ , celle de  $\gamma_\sigma$  est  $e^{-\pi \sigma^2 \tau^2}$ . Il en résulte que, si des variables aléatoires sont indépendantes et suivent des lois de Gauss de paramètres  $\sigma_i$ ,  $i \in I$  fini, leur somme suit la loi produit de convolution (image, par l'addition, du produit tensoriel)  $\prod_{i \in I} \gamma_{\sigma_i}$ , d'image de Fourier  $\prod_{i \in I} e^{-\sigma_i^2 \tau^2}$ , donc la loi de Gauss de paramètre  $\sqrt{\sum_{i \in I} \sigma_i^2}$ .

( $\diamond$ )

Les constantes de normalisation ne sont pas les mêmes que celles qui sont normalement utilisées en probabilités, où  $\gamma_1$  est  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ .

De même, les probabilistes définissent usuellement  $\mathfrak{F}_\mu$  par  $\int e^{-i\tau x} d\mu(x)$ , et pour nous ce sera ici  $\int e^{-2i\pi\tau x} d\mu(x)$ .

Proposition (XV,1;1) : La fonction aléatoire du mouvement brownien existe, et est unique à une isonomie près.

Démonstration : Il suffit de montrer que, pour  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , la loi marginale  $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}$  de  $(f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_n))$  :

$(\Omega, \mu) \rightarrow \mathbb{R}^{\{t_1, t_2, \dots, t_n\}} = \mathbb{R}^n$  est bien déterminée, et que, pour  $t_i \leq t < t_{i+1}$ , (ou  $t < t_1$  ou  $t > t_n$ ), la loi marginale  $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_i, t, t_{i+1}, \dots, t_n}$ , probabilité sur  $\mathbb{R}^{\{t_1, \dots, t_i, t, t_{i+1}, \dots, t_n\}}$ , a pour image  $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}$  par l'application "oubli de t", projection canonique de  $\mathbb{R}^{\{t_1, \dots, t_i, t, t_{i+1}, \dots, t_n\}}$  sur  $\mathbb{R}^{\{t_1, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, t_n\}}$ . Car alors f sera unique à une isonomie près, ses lois marginales étant connues, et son existence sera donnée par la modèle suivant :  $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $\mu =$  limite projective des  $\pi_{t_1, t_2, \dots, t_n}$ ,  $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}$  ( $\mathbb{R}$  est un compactifié de  $\mathbb{R}$ ), et  $f(t) = \pi_t$  (voir prop. (VI,2;1)).

Or la loi marginale  $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}$  sur  $\mathbb{R}^n$  peut se décrire comme suit. On peut toujours se borner à un système cofinal et supposer que l'une des valeurs du temps, soit  $t_k$ , est nulle. Alors  $f(t_k) = 0$ , de sorte que  $f(t_2) - f(t_1), f(t_3) - f(t_2), \dots, f(t_n) - f(t_{n-1}), f(t_k) = 0$ , sont indépendantes et suivent les lois gaussiennes données ; l'image de  $\mu_{t_1, \dots, t_n}$ , par la bijection linéaire de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$  :  $(u_1, \dots, u_n) \mapsto (v_1 = u_2 - u_1, v_2 = u_3 - u_2, \dots, v_{n-1} = u_n - u_{n-1}, v_n = u_k)$ , est le produit tensoriel  $\gamma_{\sqrt{t_2-t_1}} \otimes \gamma_{\sqrt{t_3-t_2}} \otimes \dots \otimes \gamma_{\sqrt{t_n-t_{n-1}}} \otimes \delta$ ,  $\gamma_\sigma$  étant toujours la probabilité de Gauss de paramètre  $\sigma$ . Rajoutons une valeur t, entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$  par exemple. Cette fois, l'image de  $\mu_{t_1, \dots, t_i, t, t_{i+1}, \dots, t_n}$  par la bijection linéaire de  $\mathbb{R}^{n+1}$  sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  :

$$\begin{aligned}
 & (u_1, u_2, \dots, u_i, u, u_{i+1}, \dots, u_n) \longrightarrow \\
 & (w_1 = u_2 - u_1, \dots, w_i = u - u_i, w = u_{i+1} - u, w_{i+1} = u_{i+2} \\
 & - u_{i+1}, \dots, w_{n-1} = u_n - u_{n-1}, w_n = u_k) \quad \text{est} \\
 & \gamma_{\sqrt{t_2 - t_1}} \otimes \gamma_{\sqrt{t_3 - t_2}} \otimes \dots \otimes \gamma_{\sqrt{t - t_i}} \otimes \gamma_{\sqrt{t_{i+1} - t}} \otimes \dots \otimes \gamma_{\sqrt{t_n - t_{n-1}}} \otimes \delta .
 \end{aligned}$$

La projection "oubli du temps t" se traduit par l'application de  $\mathbf{R}^{n+1}$  sur  $\mathbf{R}^n$  :

$$\begin{aligned}
 & (w_1, w_2, \dots, w_i, w, w_{i+1}, \dots, w_n) \longrightarrow \\
 & (v_1 = w_1, v_2 = w_2, v_{i-1} = w_{i-1}, v_i = w_i + w, \\
 & v_{i+1} = w_{i+1}, \dots, v_n = w_n).
 \end{aligned}$$

Par cette application, l'image de

$$\gamma_{\sqrt{t_2 - t_1}} \otimes \gamma_{\sqrt{t_3 - t_2}} \otimes \dots \otimes \gamma_{\sqrt{t - t_i}} \otimes \gamma_{\sqrt{t_{i+1} - t}} \otimes \dots \otimes \gamma_{\sqrt{t_n - t_{n-1}}} \otimes \delta$$

est

$$\gamma_{\sqrt{t_2 - t_1}} \otimes \gamma_{\sqrt{t_3 - t_2}} \otimes \dots \otimes (\gamma_{\sqrt{t - t_i}} * \gamma_{\sqrt{t_{i+1} - t}}) \otimes \dots \otimes \gamma_{\sqrt{t_n - t_{n-1}}} \otimes \delta ;$$

comme

$$\gamma_{\sqrt{t - t_i}} * \gamma_{\sqrt{t_{i+1} - t}} = \gamma_{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} ,$$

la compatibilité cherchée est démontrée, c q f d.

**Remarque** : dans la condition 2, on pourrait remplacer la loi de Gauss  $\gamma_{\sqrt{t' - t}}$  par n'importe quelle probabilité  $\mu_{t, t'}$  sur  $\mathbf{R}$ , pourvu que, pour  $t < t' < t''$ , on ait  $\mu_{t, t'} * \mu_{t', t''} = \mu_{t, t''}$ .

**Proposition (XV,1; 2)** : si  $k \neq 0$ , si  $f$  est la fonction aléatoire du mouvement brownien, la fonction aléatoire  $g$  définie par  $g(t) = \frac{1}{\sqrt{|k|}} f(kt)$  est isonome à  $f$ .

En effet, elle satisfait à la condition 1 de la définition de  $f$ , et aussi à la condition 2, parce que  $f(kt') - f(kt)$  suit la loi de Gauss  $\gamma_{\frac{1}{\sqrt{|k|}}(t'-t)}$ , donc  $\frac{1}{\sqrt{|k|}}(f(kt') - f(kt))$  la loi de Gauss  $\gamma_{\frac{1}{\sqrt{|k|}}(t'-t)}$ , et il suffit d'appliquer l'unicité à une isonomie près de la proposition précédente.

## § 2. LA PROBABILITE CYLINDRIQUE DU MOUVEMENT BROWNIEN.

La fonction  $f : \mathbf{R} \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$  du mouvement brownien est continue de  $\mathbf{R}$  dans  $L^p(\Omega, \mu)$ , pour n'importe quel  $p$  fini  $\geq 0$ ; elle est même höldérienne d'ordre  $1/2$ , puisque, pour  $t \leq t'$ ,  $\frac{f(t') - f(t)}{\sqrt{t' - t}}$  suit la loi de Gauss normale, et que  $\|\gamma_1\|_p < +\infty$  pour tout  $p$  fini. Ne nous occupons que des valeurs  $p \geq 1$ ; alors  $L^p(\Omega, \mu)$  est un Banach. Une fonction continue  $f$  de  $\mathbf{R}$  dans  $L^p(\Omega, \mu)$  est alors un élément du produit tensoriel  $C(\mathbf{R}) \hat{\otimes}_{\mathbf{C}} L^p(\Omega, \mu)$  (voir, par exemple, Schwartz, Fonctions différentiables à valeurs vectorielles, Journal d'Analyse de Jérusalem, 1954/55, §1). En outre, si  $\nu$  est une mesure de Radon à support compact sur  $\mathbf{R}$ , c'est-à-dire, un élément du dual  $C'$  de  $C$ ,  $f$  est  $\nu$ -intégrable, et définit donc  $\int_{\mathbf{R}} f(t) d\nu(t) \in L^p(\Omega, \mu)$  comme une variable aléatoire; et on sait que  $C(\mathbf{R}) \hat{\otimes}_{\mathbf{C}} L^p(\Omega, \mu) \simeq \mathcal{L}(C'_c; L^p(\Omega, \mu))$ , autrement dit  $\nu \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(t) d\nu(t)$  est continue de  $C'_c$  dans  $L^p(\Omega, \mu)$ , où  $C'_c$  est le dual  $C'$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de  $C$ . A fortiori cette application est continue de  $C'$  fort dans  $L^p(\Omega, \mu)$ , donc définit une probabilité cylindrique sur l'espace  $C$  des fonctions réelles continues sur  $\mathbf{R}$ , et cette probabilité cylindrique est de type  $p$  pour tout  $p$  fini  $\geq 0$ . Mais il est préférable de tenir compte de ce que  $f(0) = 0$ . Appelons  $C_0$  le sous-espace de  $C$  formé des fonctions nulles à l'origine; son dual est le quotient  $C'/\mathbf{R}\delta$  de  $C'$  par le sous-espace vectoriel de  $C'$  engendré par  $\delta$ . Alors, bien évidemment,  $\nu \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(t) d\nu(t)$  est continue de  $C'_c$  dans  $L^p(\Omega, \mu)$  et nulle sur  $\mathbf{R}\delta$ , donc continue de  $C'_c/\mathbf{R}\delta = (C_0)'_c$  dans  $L^p(\Omega, \mu)$ , donc  $f$  définit une probabilité cylindrique  $\lambda_{C_0}$  de type  $p$  sur  $C_0$ .

L'image de cette probabilité cylindrique par l'injection  $C_0 \rightarrow \mathcal{D}'$  est une probabilité cylindrique de type  $p$ ,  $\lambda_{\mathcal{D}'}$ , sur l'espace  $\mathcal{D}'$  des dis-

tributions ; et celle-ci, par la proposition (XIV,2 ; 2), est une probabilité de Radon d'ordre  $p$  sur  $\mathfrak{D}$ . Le théorème (XIV,2 ; 2) dit plus, l'application identique de  $\mathfrak{D}$  est  $p$ -radonifiante et l'application identique de  $\mathfrak{E}$  est  $p$ -décomposable : autrement dit, la fonction aléatoire  $\varphi \mapsto \int_{\mathbf{R}} \varphi(t)f(t)dt$ , linéaire continue de  $\mathfrak{D}$  dans  $L^p(\Omega, \mu)$ , est décomposée, et la distribution aléatoire  $T$  ainsi définie est  $p$ -presque sûrement une distribution. On peut donc définir une application  $\mu$ -mesurable  $T : \omega \mapsto T(\omega)$  de  $\Omega$  dans  $\mathfrak{D}$ , telle que, pour toute  $\varphi \in \mathfrak{D}$ ,  $\omega \mapsto \langle T(\omega), \varphi \rangle$  soit la variable aléatoire  $\int_{\mathbf{R}} \varphi(t)f(t)dt$ .  $T$  désignera indistinctement les applications  $\mathfrak{D} \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$  et  $\Omega \rightarrow \mathfrak{D}$ , on écrira  $\langle T, \varphi \rangle$  et  $T(\omega)$ , et par suite  $\langle T(\omega), \varphi \rangle$ .

### § 3. DERIVEE DE LA FONCTION DU MOUVEMENT BROWNIEN : LE BRUIT BLANC

La fonction aléatoire  $f$  n'est pas dérivable de  $\mathbf{R}$  dans  $L^p(\Omega, \mu)$ , puisqu'elle est höldérienne d'ordre exactement  $1/2$ . Mais la distribution associée  $T$  admet une dérivée  $T'$ , définie comme toujours, par  $\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$  ; pour tout  $\omega$ ,  $T'(\omega)$  est la dérivée de la distribution  $T(\omega)$ .

Proposition (XV,3 ; 1) : Pour toute  $\varphi \in \mathfrak{D}$ ,  $\langle T', \varphi \rangle$  est une variable aléatoire gaussienne, de paramètre  $\|\varphi\|_{L^2}^2$ .

Démonstration :

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle = - \int_{\mathbf{R}} \varphi'(t)f(t)dt = - \lim_{\Delta} \sum_i \varphi'(t_i)f(t_i)(t_{i+1} - t_i),$$

limite suivant les décompositions  $\Delta$ , suivant la méthode habituelle dans l'intégrale de Riemann. Mais  $|\varphi'(t_i)(t_{i+1} - t_i) - (\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))| \leq \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_i)^2 \text{Max}|\varphi''|$ , et  $\sum f(t_i)(t_{i+1} - t_i)^2$  tend vers 0 lorsque le plus grand des  $t_{i+1} - t_i$  tend vers 0. Donc on a aussi :

$$\langle T', \varphi \rangle = - \lim_{\Delta} \sum_i f(t_i)(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)) = \lim_{\Delta} \sum_i \varphi(t_i)(f(t_i) - f(t_{i-1}))$$

Mais les variables aléatoires  $\varphi(t_i)(f(t_i) - f(t_{i-1}))$  sont indépendantes, et suivent des lois de Gauss de paramètres  $|\varphi(t_i)|\sqrt{t_i - t_{i-1}}$  ; donc leur somme est gaussienne, de paramètre  $(\sum_i |\varphi(t_i)|^2 (t_i - t_{i-1}))^{1/2}$ .



Suivant le filtre des décompositions  $\Delta$ , cette somme de Riemann converge, dans  $L^p(\Omega, \mu)$ , vers  $\langle \mathbb{T}', \varphi \rangle$  ; donc les lois de probabilités convergent étroitement, et par suite  $\langle \mathbb{T}', \varphi \rangle$  est gaussienne, de paramètre

$$\lim_{\Delta} (\sum_i |\varphi(t_i)|^2 (t_i - t_{i-1}))^{1/2} = (\int_{\mathbf{R}} |\varphi(t)|^2 dt)^{1/2} = \|\varphi\|_{L^2}, \quad \text{c q f d .}$$

### Probabilité cylindrique de Gauss.

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension finie  $n$  sur  $\mathbf{R}$ . La probabilité qui, dans une base orthonormée, s'écrit

$$e^{-\pi x_1^2} dx_1 \otimes e^{-\pi x_2^2} dx_2 \otimes \dots \otimes e^{-\pi x_n^2} dx_n \quad \text{s'écrit de la même manière dans}$$

toute autre base orthonormée et, par conséquent, ne dépend que de la structure euclidienne de  $E$  ; en effet, elle s'écrit

$$e^{-\pi |x|^2} dx, \quad \text{où } dx \text{ est la mesure de Lebesgue de } E. \text{ Son image de Fourier est}$$

$$e^{-\pi(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2)} = e^{-\pi |\xi|^2} \quad \text{sur le dual, muni de la structure euclidienne duale.}$$

On l'appelle la probabilité de Gauss de  $E$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  ; en choisissant une base orthonormée de  $E$  prolongeant une base orthonormée de  $F$ , on voit que l'image de la probabilité de Gauss de  $E$  par la projection orthogonale  $E \rightarrow F$  est la probabilité de Gauss de  $F$  (en appelant  $\delta$  la probabilité de Gauss de  $F$  si  $F = \{0\}$ ).

Soit maintenant  $E$  un espace hilbertien sur  $\mathbf{R}$ . Si  $G$  est un sous-espace vectoriel fermé de codimension finie, on peut identifier  $E/G$  à  $G^+$  ; et, si  $G_1 \subset G_2$ , l'application canonique  $E/G_1 \rightarrow E/G_2$  est alors identifiée à la projection orthogonale de  $G_1^+$  sur  $G_2^+$ . On peut donc définir une probabilité cylindrique  $\lambda$  sur  $E$ , en définissant une famille  $(\lambda_F)_{F \in \mathfrak{J}}$  de probabilités sur les sous-espaces  $F$  de dimension finie de  $E$ , de manière que, si  $F_1 \supset F_2$ ,  $\lambda_{F_2}$  soit l'image de  $\lambda_{F_1}$  par la projection orthogonale de  $F_1$  sur  $F_2$ .

En particulier, prenons pour  $\lambda_F$  la probabilité de Gauss de  $F$ . Alors la probabilité cylindrique  $\gamma$  ainsi définie s'appelle probabilité cylindrique de Gauss sur  $E$ . Son image de Fourier (exposé II, page 5) est

$\xi \mapsto e^{-\pi \|\xi\|^2}$ . Cette fonction est continue sur  $E'$ , donc  $\gamma$  est scalairement concentrée sur la famille des boules (exposé II, théorème page 6). En outre, elle est de type  $p$  pour tout  $p$  fini  $\geq 0$ ; en effet, la probabilité  $\xi(\mu)$ , d'image de Fourier  $\tau \rightarrow e^{-\pi \|\tau \xi\|^2}$ , est la loi de Gauss  $\gamma_{\|\xi\|}$  de paramètre  $\|\xi\|$ , de sorte que

$$\|\gamma\|_p^* = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|\gamma_{\|\xi\|}\|_p = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^p e^{-\pi \tau^2} d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour  $p > 0$  fini.

Soit  $g$  une fonction aléatoire  $E' \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$  telle que  $\lambda_g = \gamma$ . Alors, pour tout  $\xi \in E'$ ,  $g(\xi)$  est gaussienne de paramètre  $\|\xi\|$ . En outre, si  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  sont des éléments deux à deux orthogonaux de  $E'$  et qu'on peut supposer de norme 1, les variables aléatoires  $g(\xi_1), g(\xi_2), \dots, g(\xi_n)$ , sont indépendantes. En effet, l'application  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}^n$  se factorise par une projection orthogonale  $E \rightarrow F$ , où  $F$  est un sous-espace de dimension  $n$  de  $E$  (à savoir l'orthogonal de l'intersection des noyaux de  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ), suivie d'une isométrie de  $F$  sur  $\mathbb{R}^n$ ; alors  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)(\gamma)$  est l'image de la loi de Gauss de  $F$  par cette isométrie, et c'est donc la loi de Gauss de  $\mathbb{R}^n$ , soit

$$\bigotimes_{i=1}^n e^{-\pi x_i^2} dx_i = \bigotimes_{i=1}^n \xi_i(\gamma), \quad \text{d'où l'indépendance.}$$

Si  $E = L^2(\mathbb{R}; dx)$ , une fonction aléatoire sur  $E' = L^2$ , associée à la loi de Gauss de  $E$ , s'appelle le bruit blanc (white noise) (défini à une isonomie près). En restreignant à  $\mathfrak{D} \subset L^2$  cette fonction aléatoire, on définit le bruit blanc comme distribution aléatoire, de type  $p \geq 0$  fini arbitraire, donc comme  $p$ -presque sûrement une distribution  $S : \varphi \mapsto \langle S, \varphi \rangle$ , ou  $\omega \mapsto S(\omega)$ , d'où  $(\varphi, \omega) \mapsto \langle S(\omega), \varphi \rangle$  (prop. (XIV, 2; 2)). Cette distribution aléatoire possède de remarquables propriétés. Par exemple :

Proposition (XV, 3; 2) : Le bruit blanc  $S$  est isonome à ses transformés par les translations de  $\mathbb{R}$ , et à  $\sqrt{|k|}$  fois son transformé par une homothétie de rapport  $k \neq 0$  de  $\mathbb{R}$ ; il est tempéré, et son image de Fourier  $\omega \rightarrow \mathfrak{J}(S(\omega))$  lui est isonome.

Démonstration : Les translations de  $\mathbf{R}$  définissent des opérateurs unitaires de  $L^2$ , donc conservent sa probabilité cylindrique de Gauss.

Soit maintenant  $\theta_k$  l'homothétie de  $\mathbf{R}$ , de centre origine, de rapport  $k$  ; alors l'image  $\theta_k(\varphi)$  de  $\varphi \in L^2$  est la fonction  $x \mapsto \varphi\left(\frac{x}{k}\right)$ , et alors  $\|\theta_k(\varphi)\|_{L^2} = \sqrt{|k|} \|\varphi\|_{L^2}$ , de sorte que  $\frac{1}{\sqrt{|k|}} \theta_k$  est un opérateur unitaire de  $L^2$ , donc il conserve sa probabilité cylindrique de Gauss.

Enfin,  $L^2 \subset \mathfrak{S}'$ , qui est conucleaire comme  $\mathfrak{D}'$ , de sorte que, pour  $\mu$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $S(\omega) \in \mathfrak{S}'$ ,  $S$  est  $p$ -presque sûrement dans  $\mathfrak{S}'$  pour tout  $p$  fini  $\geq 0$ . Comme  $\mathfrak{U}$  est une isométrie de  $L^2$ , il laisse invariante sa probabilité cylindrique de Gauss, c q f d.

Remarque : Ce sont, semble-t-il, ces propriétés qui justifient le nom de bruit blanc. L'image de Fourier  $\hat{S}$  est isonorme elle aussi à ses translattées, ce qui signifie que, dans  $S$ , le spectre des fréquences est homogène.

Proposition (XV,3 ; 3) : La dérivée de la fonction aléatoire brownienne est le bruit blanc (tous deux sont définis à une isonomie près) ; autrement dit, l'image par  $D = d/dx$  de la probabilité brownienne  $\lambda_{\mathfrak{D}'}$  est l'image par l'injection  $L^2 \rightarrow \mathfrak{D}'$  de la probabilité cylindrique de Gauss de  $L^2$ .

Démonstration : La dérivée  $f' = T$  de la fonction brownienne est telle en effet que, pour  $\varphi \in \mathfrak{D}$ ,  $\langle T, \varphi \rangle$  soit gaussienne de paramètre  $\|\varphi\|_{L^2}$ , d'après la prop. (XV,3 ; 1), et le bruit blanc  $S$  a la même propriété. Or deux probabilités cylindriques sur  $\mathfrak{D}'$  coïncident si elles ont même image par toute  $\varphi \in \mathfrak{D}$  (exposé V, lemme 1 page 5), c q f d.

Ceci va nous permettre d'avoir une autre représentation de la probabilité cylindrique du mouvement brownien.

L'opération  $D = d/dx$  est injective de  $C_0$  dans  $\mathfrak{D}'$  ; l'image réciproque de  $L^2$  est l'espace  $(L^2)_0^1$  des fonctions sur  $\mathbf{R}$ , à dérivée  $\in L^2$ , et nulles à l'origine. Donc  $D$  est une bijection de  $(L^2)_0^1$  sur  $L^2$ . La bijection

réciproque  $D^{-1}$  est  $\varphi \mapsto D^{-1}\varphi$ ,  $(D^{-1}\varphi)(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$ . Elle permet de transporter la structure hilbertienne de  $L^2$  sur  $(L^2)_\bullet^1$  : pour  $\phi_1, \phi_2 \in (L^2)_\bullet^1$ , leur produit scalaire sera  $(\phi_1 | \phi_2)_{(L^2)_\bullet^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1'(t) \phi_2'(t)dt$ .

Alors  $D^{-1}$  transporte la probabilité de Gauss sur  $(L^2)_\bullet^1$ . Mais  $(L^2)_\bullet^1$  s'injecte continuellement dans  $C_\bullet$  ; d'où une probabilité cylindrique de type p, que nous appellerons encore  $D^{-1}\gamma$ , sur  $C_\bullet$ , et dont l'image, par  $D : C_\bullet \rightarrow \mathfrak{D}'$ , est aussi l'image de  $\gamma$  par l'injection  $L^2 \rightarrow \mathfrak{D}'$ , c'est-à-dire la même que l'image par  $D$  de la probabilité cylindrique brownienne sur  $C_\bullet$ . Donc  $\lambda_{C_\bullet}$ , probabilité cylindrique brownienne sur  $C_\bullet$ , et  $D^{-1}\gamma$ , sont deux probabilités cylindriques sur  $C_\bullet$ , de même image par l'injection  $D : C_\bullet \rightarrow \mathfrak{D}'$ . Donc elles coïncideront, d'après la prop. (XI,4 ; 1), si elles sont toutes deux scalairement concentrées sur les parties faiblement compactes convexes de  $C_\bullet$ . Or  $\lambda_{C_\bullet}$  est scalairement concentrée sur les compacts de  $C_\bullet$  (voir §2) ;  $D^{-1}\gamma$  est scalairement concentrée sur les boules de  $(L^2)_\bullet^1$ , faiblement compactes convexes, donc aussi son image dans  $C_\bullet$ , d'où le résultat. Ainsi :

Proposition (XV,3 ; 4) : La probabilité cylindrique brownienne  $\lambda_{C_\bullet}$  sur  $C_\bullet$  est l'image par l'injection  $(L^2)_\bullet^1 \rightarrow C_\bullet$  de la probabilité cylindrique de Gauss de l'espace hilbertien  $(L^2)_\bullet^1$ .

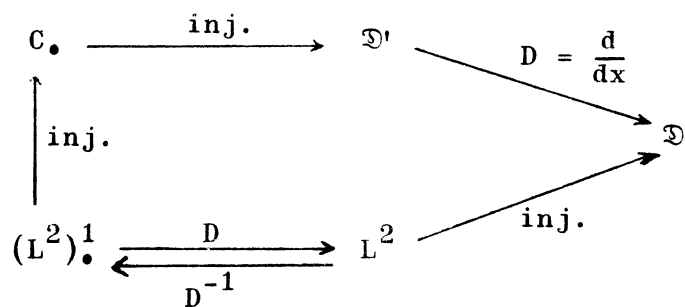


Diagramme commutatif

Remarque : il est généralement commode d'identifier un objet et son image par une application injective ; et aussi d'identifier une fonction aléatoire  $E' \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$ , définie à une isonomie près, à la probabilité cylin-

drique qu'elle définit sur  $E$ . Aussi appelle-t-on bruit blanc, indifféremment :

la probabilité cylindrique de Gauss sur  $L^2(\mathbf{R}; dx)$ , ou son image (de Radon) dans  $\mathfrak{S}'$  ou  $\mathfrak{D}'$  ; ou la fonction aléatoire linéaire qu'elle définit sur  $L^2$ , ou la restriction de celle-ci à  $\mathfrak{S}$  ou  $\mathfrak{D}$ , c'est-à-dire la distribution tempérée presque sûre notée antérieurement  $S$ . De même, le mouvement brownien sera indifféremment la probabilité cylindrique brownienne  $D^{-1}\gamma$  sur  $(L^2)^\bullet$  ou  $\lambda_{C_\bullet}$  ou son image (de Radon) dans  $\mathfrak{S}'$  ou  $\mathfrak{D}'$  ; ou la fonction aléatoire  $f$  du § 1, ou la distribution tempérée presque sûre, notée antérieurement  $T$ , qu'elle définit. Et on aura  $T' = S$  (toutes deux définies à une isonomie près).

§ 4. CONTINUITÉ PRESQUE SURE ET PROPRIÉTÉS HÖLDERIENNES DU MOUVEMENT BROWNIEN.

Proposition (XV,4;1) : la probabilité cylindrique brownienne est de Radon sur l'espace  $C$ . Bien plus, pour tout  $\beta < \frac{1}{2}$ , et tout  $p$  fini, elle est d'ordre  $p$  sur l'espace  $C^\beta$  (voir les espaces  $W^\beta$  de l'exposé XIV, § 3).

Démonstration : l'espace  $(L^2)_\bullet^1$  est contenu dans  $(L_{loc}^2)^1 = W^{2,1}$ , avec injection continue. Or l'injection  $(L^2)_\bullet^1 \rightarrow C^\beta$  est  $p$ -radonifiante dès que  $1 - \beta > \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$  (corollaire de prop. (XIV,4;1)), ou  $\beta < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ . Soit donc  $\beta < \frac{1}{2}$ ; il existe  $p_0$  tel que  $\beta < \frac{1}{2} - \frac{1}{p_0}$ ; pour tout  $p$  fini  $\geq p_0$ ,  $(L_{loc}^2)^1 \rightarrow C^\beta$  est  $p$ -radonifiante, et comme la probabilité cylindrique brownienne est de type  $p$  pour tout  $p$  fini, elle est de Radon d'ordre  $p \geq p_0$  sur  $C^\beta$ , et naturellement a fortiori pour  $p < p_0$ .

Ainsi elle est de Radon sur  $C$ ; comme elle est cylindriquement portée par le sous-espace faiblement fermé  $C_\bullet$ , elle est de Radon sur  $C_\bullet$  (voir § 5 de l'exposé 11).

Corollaire : pour tout  $p$  fini, la fonction aléatoire brownienne  $f$  est  $p$ -presque sûrement une fonction continue localement höldérienne de tout ordre  $\beta < \frac{1}{2}$ .

Démonstration : comme il a été dit à la prop. (XIV,3;1), à la note ( $\diamond$ ),  $C^\beta$  est identifiable à un sous-espace fermé de  $\mathcal{D}' \times C$ ; donc ses parties compactes sont métrisables. Alors la prop. (XIII,3;1) montre que toute fonction aléatoire  $(C^\beta)' \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$  associée à la probabilité brownienne est décomposée, par une application  $p$ -intégrable  $\Omega \rightarrow C^\beta$ . Notons encore  $f$  cette application; désormais, pour  $\mu$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $f(\omega)$  sera un élément de  $C^\beta$ , et son image par l'injection  $C^\beta \rightarrow \mathcal{D}'$  est la distribution brownienne  $T(\omega)$  du § 2; les masses ponctuelles  $\delta_{(t)}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , sont dans  $(C^\beta)'$ , et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \mapsto (f(\omega))(t)$  sera un représentant de la variable aléatoire  $f(t)$  du § 1.

On sait aussi que toute fonction de  $C^\beta$  est localement höldérienne de tout ordre  $< \beta$  (voir Zygmund, Trigonometrical series, nouvelle édition, 1955, 9.82, ii, page 227), ce qui prouve le théorème.

On peut préciser. Considérons seulement un intervalle borné  $[-A, +A]$  de  $\mathbb{R}$ . Alors, pour  $\varphi \in C^\beta$ , la quantité

$$\sup_{t', t'' \in [-A, +A]} \frac{|\varphi(t') - \varphi(t'')|}{|t' - t''|^\beta}$$

est une semi-norme continue sur  $C^{\bar{\beta}}$ , pour tout  $\bar{\beta} > \beta$ . Comme, pour tout  $\beta < \frac{1}{2}$ , il existe  $\bar{\beta}$  avec  $\beta < \bar{\beta} < \frac{1}{2}$ , la distinction entre  $\beta$  et  $\bar{\beta}$  sera sans importance. Alors : pour  $\mu$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ ,

$$\sup_{t', t'' \in [-A, +A]} \frac{|(f(\omega))(t') - (f(\omega))(t'')|}{|t' - t''|^\beta} < +\infty ;$$

je dirai même plus, pour tout  $A$  fini, tout  $\beta < \frac{1}{2}$ , tout  $p$  fini :

$$\int_{\Omega} \left( \sup_{t', t'' \in [-A, +A]} \frac{|(f(\omega))(t') - (f(\omega))(t'')|}{|t' - t''|^\beta} \right)^p d_\mu(\omega) < +\infty$$

Remarque 1 Au § 1, nous avons défini un modèle particulier de  $f$ , avec  $\Omega = \prod_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ ,  $\mu =$  limite projective des  $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}$ ,

$$f(t) = \pi_t : \prod_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \rightarrow \prod_{\mathbb{R}} \{t\} \simeq \mathbb{R}.$$

Pour ce modèle (comme pour tout autre), si  $f$  est la fonction presque sûre du corollaire de la prop. XV, alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \mapsto (f(\omega))(t)$  est la même variable aléatoire que  $\pi_t$ . Mais, dans ce modèle,  $\pi_t$  n'est pas seulement une variable aléatoire, c-à-d. une  $\mu$ -classe de fonctions. C'est une application vraie de  $\Omega$  dans  $\prod_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = \prod_{\mathbb{R}} \{t\}$ . On peut alors dire plus : pour  $\mu$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $f(\omega)$  est exactement la fonction  $t \mapsto \pi_t(\omega)$ . Autrement dit, non seulement : "pour tout  $t$ , pour  $\mu$ -presque tout  $\omega$ ,

$(f(\omega))(t) = \pi_t(\omega)$  ", mais : "pour  $\mu$ -presque tout  $\omega$ , pour tout  $t$ ,  
 $(f(\omega))(t) = \pi_t(\omega)$  ", ce qui est plus fort.

En effet, la première affirmation entraîne la deuxième si on se borne à  $t$  parcourant un ensemble dénombrable dense de  $\mathbb{R}$ . Mais la probabilité brownienne sur  $C$ , qui est de Radon, a les mêmes lois marginales  $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}$  que  $\mu$ , donc elle a pour image  $\mu$  dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , autrement dit  $\mu$  est portée par  $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ; donc, pour  $\mu$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\omega$  est dans  $C$ ,  $t \mapsto \pi_t(\omega)$  est une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ; si elle coïncide avec  $f(\omega)$ , aussi continue, sur un ensemble dénombrable dense, elle lui est identique.

Remarque 2 : La probabilité brownienne ne provient même pas d'une probabilité cylindrique de type  $p \geq 0$  sur  $C^\beta$  si  $\beta > 1/2$ ; en effet, pour  $1/2 < \beta_1 < \beta$ ,  $(\delta_{(t')} - \delta_{(t'')}) |t' - t''|^{\beta_1}$  tend vers 0 dans  $(C^\beta)'$  quand  $t' - t''$  tend vers 0, avec  $t', t'' \in [-A, +A]$ ; donc, si la probabilité était de type  $p$  sur  $C^\beta$ , la fonction aléatoire brownienne  $f$  vérifierait, pour  $t', t'' \in [-A, +A]$ ,

$$\lim_{|t'' - t'| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(t'') - f(t')}{|t'' - t'|^{\beta_1}} \right\|_{L^p(\Omega, \mu)} = 0, \text{ ce qui n'est pas.}$$

Par ailleurs, on remarquera que, en tant que fonction aléatoire  $\mathbb{R} \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$ ,  $f$  est holdérienne d'ordre exactement  $1/2$ ; mais on peut montrer que, presque sûrement,  $f$  n'est pas holdérienne d'ordre  $1/2$ .

Remarque 3 : Le passage par l'intermédiaire de  $L^2$  et du bruit blanc est important pour bien d'autres raisons. Mais il n'était pas nécessaire pour donner la prop. (XV,4;1) ou son corollaire.

En effet, directement,  $f : \mathbb{R} \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$ ,  $p \geq 1$  fini, est holdérienne d'ordre  $1/2$ ; cela suffit à prouver qu'elle définit un élément de  $C^\alpha \hat{\otimes}_\varepsilon L^p(\Omega, \mu)$ , pour tout  $\alpha < 1/2$ ; donc une fonction aléatoire

$(C^\alpha)'_c \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$ , et par suite une probabilité cylindrique de type  $p$  sur  $C^\alpha$ . Or, si  $\beta < \alpha < 1/2$ , il existe  $p_0$  tel que  $\alpha - \beta > \frac{1}{p_0}$ ; pour tout  $p \geq p_0$ ,  $C^\alpha \rightarrow C^\beta$  est  $p$ -radonifiante, et comme la probabilité cylindrique est de type  $p$  sur  $C^\alpha$ , elle est de Radon d'ordre  $p$  sur  $C^\beta$ , c q f d.



Remarque 4 : Nous avons utilisé le fait que  $(L_{loc}^2)^1 \rightarrow C^\beta$  était p-radonifiante, toujours pour des  $p > 2$  (car  $\beta < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ ). On peut voir que

$(L_{loc}^2)^1 \rightarrow C$  ( $\beta = 0$ ) n'est pas 2-radonifiante. Si en effet il en était ainsi, en raisonnant sur le tore  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , on voit que  $(L^2)^1 \rightarrow C$  serait 2-radonifiante ; mais  $C \rightarrow L^2$  est 2-radonifiante ; et un théorème de Pietsch dit que le produit de 2 applications 2-sommantes est nucléaire ; or  $(L^2)^1 \rightarrow L^2$  n'est pas nucléaire (alors que  $(L^2)^{1+\varepsilon} \rightarrow L^2$  est nucléaire).

### § 5. LES LOIS STABLES D'EXPOSANT $s, 0 < s < 2$ , ET LES FONCTIONS ALEATOIRES ASSOCIEES.

Nous admettrons que la fonction  $\tau \rightarrow e^{-|\tau|^s}$ ,  $0 < s < 2$ , est de type positif sur  $\mathbb{R}$ . Elle est donc l'image de Fourier d'une probabilité, appelée probabilité stable d'indice  $s$ . On sait aussi que celle-ci est de la forme  $\theta_s(x)dx$ , et que  $\theta_s(x)$ , pour  $x$  infini, est comparable à  $\frac{\text{constante}}{|x|^{s+1}}$  ; donc  $\int_{\mathbb{R}} |x|^p \theta_s(x)dx < +\infty$  pour tout  $p < s$ , ce qui distingue nettement le cas  $s < 2$  du cas gaussien  $s = 2$  où l'intégrale est finie pour tout  $p$  fini. La probabilité stable d'indice  $s$  et de paramètre  $c$  est alors  $\delta$  pour  $c = 0$ , et pour  $c \neq 0$ , l'image par l'homothétie de rapport  $c$  sur  $\mathbb{R}$  ; son image de Fourier est  $\tau \mapsto E^{-|c\tau|^s}$ . Si  $n$  variables aléatoires sont indépendantes et suivent des lois d'indice  $s$ , de paramètres  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , leur somme suit la loi d'indice  $s$  et de paramètre  $(\sum_{i=1}^n |c_i|^s)^{1/s}$ . ( $\diamond$ )

On appelle alors fonction aléatoire s-brownienne une fonction aléatoire  $f : \mathbb{R} \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$ , vérifiant les 2 propriétés :

- 1) Pour  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , les variables aléatoires  $f(t_2) - f(t_1)$ ,  $f(t_3) - f(t_2), \dots, f(t_n) - f(t_{n-1})$ , sont indépendantes, et  $f(0) = 0$  ;
- 2) Pour  $t < t'$ ,  $f(t') - f(t)$  suit la loi stable d'indice  $s$ , et de paramètre  $(t' - t)^{1/s}$ .

( $\diamond$ ) On pourra consulter Paul Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien, chap. V.

On démontre, comme au §1, l'existence d'une telle fonction, et son unicité à une isonomie près.

On a ensuite des résultats analogues à ceux du §2, pourvu que  $s > 1$ ; on doit en effet prendre  $p \geq 1$  pour que  $L^p(\Omega, \mu)$  soit un Banach, or  $p < s$ ; [si  $s \leq 1$ , on a  $p < 1$ , et je ne sais plus si  $f : \mathbf{R} \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$ , continue et même holdérienne d'ordre  $1/s$  exactement  $(\frac{f(t') - f(t)}{|t' - t|^{1/s}}$ , suivant la loi stable d'indice  $s$  et de paramètre 1, est de quasi-norme fixe dans  $L^p(\Omega, \mu)$ ), définit encore une distribution aléatoire].

Passons aux propriétés du §3. La proposition (XIV,3; 1) s'étend sans modification : la dérivée  $T'$  est telle que, pour  $\varphi \in \mathfrak{D}$ ,  $\langle T', \varphi \rangle$  ait pour probabilité la loi stable d'indice  $s$ , de paramètre  $\|\varphi\|_{L^s}$ .

Ceci permet d'introduire un  $s$ -bruit blanc,  $1 < s < 2$ , dont l'existence résulte de l'existence de  $f = T$  et du calcul de sa dérivée  $T'$ . En effet,  $\varphi \mapsto \langle T', \varphi \rangle$ ,  $\mathfrak{D} \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$ , nécessairement s'étend en une fonction aléatoire linéaire continue  $L^s \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$ , puisque  $\|\langle T', \varphi \rangle\|_{L^p(\Omega, \mu)} = \|\int \theta_x(x) dx\|_p \|\varphi\|_{L^s}$ .

Le  $s$ -bruit blanc est une fonction aléatoire  $g : L^s(\mathbf{R}; dx) \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$ ,  $1 < s < 2$ ,  $0 \leq p < s$ , linéaire continue, telle que, pour  $\varphi \in L^s$ , son image  $g(\varphi)$  suive la loi stable d'indice  $s$ , de paramètre  $\|\varphi\|_{L^s}$ ; sa probabilité cylindrique associée est l'unique probabilité cylindrique  $\gamma$  (de type  $p < s$ ) sur  $L^{s'}$  ( $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ ), telle que, pour toute  $\varphi \in L^s$ ,  $\varphi(\gamma)$  soit la probabilité stable d'indice  $s$  et de paramètre  $\|\varphi\|_{L^s}$ .

L'image de Fourier  $\tilde{\mathcal{C}}\gamma$  de  $\gamma$  est donc, sur  $L^s$ , la fonction  $\varphi \rightarrow e^{-\|\varphi\|_{L^s}}$ . Alors la dérivée de la fonction  $s$ -brownienne, prise dans  $\mathfrak{D}'$ , est le  $s$ -bruit blanc. L'espace  $(L^2)_\bullet^1$  du §3 peut donc être remplacé par  $(L^{s'})_\bullet^1$ .

Mais ici, une différence essentielle apparaît. On démontre que  $f$  est presque sûrement une fonction (au sens de  $\mathfrak{D}'$ , c'est-à-dire une fonction localement Lebesgue-intégrable sur  $\mathbf{R}$ ), mais que presque sûrement elle n'est pas une fonction continue. Nous voyons en tout cas immédiatement que la méthode du cas  $s = 2$  échouerait : l'application  $(L_{loc}^{s'})^1 \rightarrow C^\beta$  ne serait

p-radonifiante par application du corollaire de la prop. (XIV,4; 1), que pour  $1 - \beta > \frac{1}{s} + \frac{1}{p}$ , ou  $\beta < \frac{1}{s} - \frac{1}{p}$ , qui est  $< 0$  pour  $p < s$ . Mais :

Proposition (XV,5; 1) : La probabilité cylindrique du mouvement s-brownien est de Radon d'ordre p, pour tout  $p < s$ , sur l'espace  $(L_{loc}^s)^\beta$ , pour tout  $\beta < 1/s$ .

Démonstration : Il suffit de montrer que l'injection  $(L_{loc}^{s'})^1 \rightarrow (L_{loc}^s)^\beta$  est p-radonifiante pour p assez grand  $< s$ , puisque la probabilité cylindrique est de type p  $< s$  sur  $(L_{loc}^{s'})^1$  ; or elle l'est pour  $1 - \beta > \frac{1}{s} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{s})$  ou pour  $\frac{1}{s} < \frac{1}{p} < \frac{1}{s} + (\frac{1}{s} - \beta)$ .

Remarque : On peut aussi trouver que la probabilité est de Radon d'ordre  $p < s$  sur des  $(L_{loc}^b)^\beta$ , avec des  $b \neq s$  ; mais ce n'est pas plus avantageux, c'est avec  $b = s$  qu'on a le meilleur résultat.

En effet, prenons d'abord  $b < s$ . De toute façon on a  $p < s$ , et alors  $1 - \beta > \frac{1}{s} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{b})^+$  donc  $\beta < \frac{1}{s} - (\frac{1}{p} - \frac{1}{b})^+$  donc  $< \frac{1}{s}$ , et le résultat est moins bon qu'avec  $b = s$ . Prenons maintenant  $b$  fini  $> s$ . Alors effectivement on obtient une probabilité de Radon d'ordre p dans  $(L_{loc}^b)^\gamma$ , avec  $1 - \gamma > \frac{1}{s} + \frac{1}{p} - \frac{1}{b}$  ou  $\gamma < (\frac{1}{s} - \frac{1}{p}) + \frac{1}{b}$  donc  $\gamma < \frac{1}{b}$  arbitraire puisque p peut être pris arbitrairement proche de s. Mais c'est une conséquence du résultat relatif à s, puisque l'injection  $(L_{loc}^s)^\beta \rightarrow (L_{loc}^b)^\gamma$  a lieu dès que  $\beta - \gamma > \frac{1}{s} - \frac{1}{b}$ .

Corollaire : La fonction s-brownienne,  $1 < s < 2$ , est p-presque sûrement dans  $(L_{loc}^s)^\beta$  pour tout  $p < s$  et tout  $\beta < \frac{1}{s}$  (donc p-presque sûrement dans  $(L_{loc}^b)^\gamma$ ,  $s \leq b < +\infty$ ,  $\gamma < \frac{1}{b}$ ).

En effet  $(L_{loc}^s)^\beta$  est isomorphe à un sous-espace fermé de  $L_{loc}^s \times \mathcal{L}^1$  (note (♦) page (XIV,9)), donc a ses parties compactes métrisables, et il suffit d'appliquer la prop. (XIII,3; 1).

Remarque 0 : L'appartenance à  $(L^b_{loc})^\gamma$  donne des conditions de Hölder locales de tout ordre  $< \gamma$  dans  $L^b$ . Donc : pour tout  $b \geq s$  fini, pour tout  $p < s$ , pour tout  $\gamma < \frac{1}{b}$ , pour tout A fini :

$$\int_{\Omega} \sup_{|h| \leq A} \left( \int_{-A}^{+A} \frac{|f(\omega, t+h) - f(\omega, t)|}{|h|^\gamma} dt \right)^b d_\mu(\omega) < +\infty.$$

Remarque 1 : Dans la définition initiale de la fonction aléatoire s-brownienne f, f(t) était défini pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , mais seulement comme une  $\mu$ -classe de fonctions réelles  $\mu$ -mesurables sur  $\Omega$ . Maintenant, c'est f( $\omega$ ) qui est défini pour tout  $\omega$  ou  $\mu$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ ; mais c'est seulement un élément de  $L^b_{loc}$ , fini, donc une  $d_t$ -classe de fonctions  $d_t$ -mesurables sur  $\mathbb{R}$ . La jonction est facile à faire entre les deux : la première est dans  $C(\mathbb{R}; L^p(\Omega, \mu))$ , la deuxième dans  $L^p(\Omega, \mu; L^b_{loc}(\mathbb{R}; dt))$ , donc toutes les deux dans  $L^p_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}, \mu \otimes dt)$  (isomorphe à  $L^p(\Omega, \mu; L^p_{loc}(\mathbb{R}, dt))$  comme à  $L^p_{loc}(\mathbb{R}, dt; L^p(\Omega, \mu))$ ), et elles sont alors égales (parce que, pour toute  $\varphi \in \mathcal{D}$ , leur intégrales en  $\varphi(t)dt$  coïncident pour  $\mu$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ ). On peut donc en fait trouver f : ( $\omega, t$ )  $\mapsto$  f( $\omega, t$ ), fonction réelle sur  $\Omega \times \mathbb{R}$ , ( $\mu \otimes dt$ )-mesurable et même dans  $L^p_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}, \mu \otimes dt)$ ,  $p < s$ , telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \mapsto f(\omega, t)$  soit dans la classe de f(t)  $\in L^p(\Omega, \mu)$ , et que, pour  $\mu$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $t \mapsto f(\omega, t)$  soit dans la classe de f( $\omega$ )  $\in L^b_{loc}(\mathbb{R}, dt)$ .

Par contre, une chose qui se produisait pour  $s = 2$  n'est plus valable pour  $s < 2$ . Dans le modèle canonique de la fonction aléatoire s-brownienne,  $\Omega$  est  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $\mu$  est la limite projective des  $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}$ , et f(t) est la projection  $\pi_t : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\{t\}} = \mathbb{R}$ . Ici, pour  $s < 2$ , il n'y a plus aucune raison d'imaginer que, pour  $\mu$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ , f( $\omega$ ) soit la classe (de Lebesgue) de la fonction  $t \mapsto \pi_t(\omega)$ . En d'autres termes, si nous reprenons la fonction ci-dessus  $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}; \mu \otimes dt)$ , rien ne dit qu'elle puisse être prise égale à  $\pi : (\omega, t) \mapsto \pi_t(\omega)$ ; la fonction  $\pi$  ainsi définie n'est sans doute pas ( $\mu \otimes dt$ )-mesurable.

Remarque 2 : En utilisant les martingales, on montre que f est presque sûrement une fonction réglée (n'ayant que des discontinuités de 1ère espèce).

et continue à droite, donc appartenant à  $L_{loc}^\infty$ . On ne peut pas le démontrer par les méthodes précédentes, qui ne distinguent jamais  $L_{loc}^\infty$  de  $C$ , puisque presque sûrement  $f$  n'est pas continue ; Par contre, bien sûr, il n'y a aucune propriété höldérienne dans  $L_{loc}^\infty$ , sans quoi il y aurait continuité.

Remarque 3 : Comme pour  $s = 2$ , le bruit blanc n'est pas nécessaire pour trouver les propriétés höldériennes. Du seul fait que la fonction aléatoire  $f : \mathbb{R} \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$ ,  $p < s$ , est höldérienne d'ordre  $1/s$ , on déduit qu'elle est dans  $C^\gamma \otimes_\varepsilon L^p(\Omega, \mu)$ , donc définit une probabilité cylindrique de type  $p$  sur  $C^\gamma$ , pour tout  $\gamma < 1/s$ . Alors elle sera  $p$ -presque sûrement dans  $(L_{loc}^s)^\beta$ , si  $C^\gamma \rightarrow (L_{loc}^s)^\beta$  est  $p$ -radonifiante pour  $p$  assez grand  $< s$ , ce qui est vrai si  $\gamma - \beta > (1/p - 1/s)$  pour  $p$  assez grand  $< s$ , donc si  $\gamma - \beta > 0$ , donc si  $\beta < 1/s$ .

## § 6. LES BRUITS BLANCS ET LES IMMERSIONS DES ESPACES $L^p$ .

Proposition (XV,6 ; 1) : Soient  $X$  un espace topologique,  $\nu$  une mesure de Radon  $\geq 0$  sur  $X$ . Pour tout  $s$ ,  $1 < s \leq 2$ , il existe une probabilité cylindrique  $\gamma_s = \lambda$  sur  $L^{s'}(X, \nu)$ , dont l'image de Fourier est, sur  $L^s(X, \nu)$ , la fonction de type positif  $\varphi \mapsto e^{-\|\varphi\|_{L^s}^s}$ . Cette probabilité cylindrique est de type  $p$ , pour tout  $p$  fini si  $s = 2$ , pour tout  $p < s$  si  $s < 2$ .

Si  $\varphi \xrightarrow{g} g(\varphi)$  est une fonction aléatoire  $g = g_s : L^s(X, \nu) \xrightarrow{g} L^0(\Omega, \mu)$ , qui la réalise,  $g$  est un morphisme strict de  $L^s(X, \nu)$  dans  $L^0(\Omega, \mu)$ , et même une isométrie à un facteur près de  $L^s(X, \nu)$  dans  $L^p(\Omega, \mu)$ , pour tout  $p$  fini  $> 0$  si  $s = 2$ , pour  $0 < p < s$  si  $s < 2$ . Les mêmes résultats subsistent pour  $s \leq 1$ , en remplaçant  $L^{s'}(X, \nu)$  par  $L^\infty(X, \nu)$  muni de la topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$  si  $s = 1$ , et par le dual algébrique  $(L^s(X, \nu))^*$  muni de la topologie  $\sigma((L^s)^*, L^s)$  si  $s < 1$  ; le type est toujours relatif au dual normé  $L^s(X, \nu)$ .

C'est le  $s$ -bruit blanc généralisé, où  $(\mathbb{R}; dt)$  est remplacé par  $(X, \nu)$ .

Démonstration : Montrons d'abord que  $\Gamma : \varphi \mapsto e^{-\|\varphi\|_{L^s}^s}$  est une fonction de type positif sur  $L^s(X, \nu)$ . Il faut montrer que, si  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  sont des

éléments de  $L^s(X, \nu)$ , et  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , des nombres complexes, on a :

$$\sum_{i,j=1}^n e^{-\|\varphi_i - \varphi_j\|_{L^s}^s} z_i \bar{z}_j \geq 0 .$$

Comme  $\Gamma$  est continue sur  $L^s(X, \nu)$ , il suffit de le montrer pour des  $\varphi_i$  d'un sous-ensemble dense, on peut donc supposer les  $\varphi_i$  étagées. Mais alors cela revient à montrer la propriété lorsque  $\mu$  est combinaison d'un nombre fini de masses ponctuelles, ou encore pour  $X = \mathbf{R}$ ,  $\mu = dx$ , les  $\varphi_i$  étant étagées ; cela résulte alors des résultats du §5, donc du résultat admis antérieurement :  $\tau \mapsto e^{-|\tau|^s}$  est de type positif sur  $\mathbf{R}$  (ceci est d'ailleurs valable pour  $0 < s \leq 2$ ).

Alors cette fonction continue de type positif est bien l'image de Fourier d'une probabilité cylindrique  $\lambda_s$  sur  $L^{s'}(X, \nu)$ . Elle est de type  $p$  dans les conditions indiquées, car, pour  $\varphi \in L^s(X, \nu)$ ,  $\varphi(\lambda_s)$  est la loi stable d'indice  $s$  et de paramètre  $\|\varphi\|_{L^s}$ , puisque son image de Fourier est  $\tau \mapsto e^{-\|\tau\varphi\|_{L^s}^s}$ , et qu'alors  $\|\varphi(\lambda_s)\|_p = \|\theta_s(x)dx\|_p \|\varphi\|_{L^s}$ , donc  $\|\lambda_s\|_p^* = \|\theta_s(x)dx\|_p$ . Si  $g$  est une fonction aléatoire :  $L^s(X, \nu) \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$ , réalisant  $\lambda_s$ , elle est continue et en outre, si  $g(\varphi)$  converge vers  $g(0) = 0$  dans  $L^0(\Omega, \mu)$ , la loi de  $g(\varphi)$ , qui est la loi stable d'indice  $s$  et de paramètre  $\|\varphi\|_{L^s}$ , tend vers  $\delta$  dans  $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ , donc  $\varphi$  converge vers 0 dans  $L^s$  :  $g$  est un morphisme strict. En outre, pour  $0 < p < +\infty$  si  $s = 2$ , pour  $0 < p < s$  si  $s < 2$ ,  $\|g(\varphi)\|_{L^p(\Omega, \mu)} = \|\varphi(\lambda_s)\|_p = \|\varphi\|_{L^s} \|\theta_s(x)dx\|_p$ , donc  $g$  est une isométrie, au facteur  $\|\theta_s(x)dx\|_p$  près.

Corollaire : Tout espace hilbertien est plongéable dans un espace  $L^0$  (avec la topologie induite), et plongéable isométriquement dans un espace  $L^p$ , pour tout  $p$  fini  $> 0$  ; tout espace  $L^s(X, \nu)$ ,  $0 < s < 2$ , est plongéable dans un espace  $L^0$  (avec la topologie induite), et plongéable isométriquement dans un espace  $L^p$ , dès que  $0 < p < s$ .

On trouvera des compléments sur les immersions des espaces  $L^p$  dans les travaux de Bretagnolles et Dacunha -Castelle.

Proposition : Si  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  sont  $n$  éléments de  $L^s(X, \nu)$ , portées par des parties 2 à 2 disjointes de  $X$ , alors les variables aléatoires  $g(\varphi_1), g(\varphi_2), \dots, g(\varphi_n)$ , sont indépendantes.

Nous devons pour cela montrer que l'image de  $\mu$  par  $(g(\varphi_1), \dots, g(\varphi_n))$  est le produit tensoriel de ses images par les  $g(\varphi_i)$ , ou encore que

$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(\lambda_s) = \bigotimes_{i=1}^n \varphi_i(\lambda_s)$ ,  $\varphi_i \in L^s(X, \nu)$ . Or  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(\lambda_s)$  est une probabilité sur  $\mathbb{R}^n$ , dont l'image de Fourier est  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \rightarrow e^{-\|\tau_1 \varphi_1 + \dots + \tau_n \varphi_n\|_{L^s}^s}$ , et  $\bigotimes_{i=1}^n \varphi_i(\lambda_s)$  est une probabilité sur  $\mathbb{R}^n$ , dont l'image de Fourier est  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \rightarrow \prod_{i=1}^n e^{-\|\tau_i \varphi_i\|_{L^s}^s}$ ; et ces 2 fonctions sont bien égales si les  $\varphi_i$  sont portées par des ensembles disjoints.

(Suite et fin de l'exposé 15).

§ 7. LE MOUVEMENT BROWNIEN A PLUSIEURS PARAMETRES.

Définition : on appelle fonction aléatoire du mouvement brownien à  $n$  paramètres de temps, un fonction aléatoire :  $\mathbb{R}^n \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$ , ayant les propriétés suivantes :

1) Quels que soient  $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}^n$ , et quelles que soient les constantes  $C_1, C_2, \dots, C_k$  réelles,  $C_1 f(t_1) + \dots + C_k f(t_k)$  est une variable aléatoire gaussienne ; et  $f(0) = 0$  ;

2) Quels que soient  $t, t' \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(t') - f(t)$  est gaussienne de paramètre  $|t' - t|^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n (t'_i - t_i)^2 \right)^{1/4}$ .

Proposition (XV, 7; 1) : la fonction aléatoire brownienne sur  $\mathbb{R}^n$  existe, et est unique à une isonomie près ; elle coïncide pour  $n=1$ , avec celle du § 1.

Démonstration :

1) Soit  $K$  un noyau réel de type positif sur  $\mathbb{R}^n$  c-à-d. une fonction  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que, pour  $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $C_1, C_2, \dots, C_k \in \mathbb{R}$ , on ait l'égalité  $\sum_{i,j=1, \dots, k} C_i C_j K(t_i, t_j) \geq 0$ .  $K$  est alors symétrique,

$K(t, t') = K(t', t)$ . La théorie des noyaux reproduisants d'Aronszajn-Bergman (voir L. Schwartz, sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés, Journal d'Analyse de Jérusalem, 1964, p.188) dit qu'on peut associer à  $K$  un sous-espace hilbertien  $\mathcal{K}$  de l'espace  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}$ , à injection continue ; pour tout  $t \in \mathbb{R}^n$ ,  $K(\bullet, t)$  est dans  $\mathcal{K}$ , et  $(K(\bullet, t) | K(\bullet, \tau))_{\mathcal{K}} = K(t, \tau)$ . Si alors  $g$  est une fonction aléatoire  $\mathcal{K} \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$  associée à la probabilité de Gauss sur  $\mathcal{K}$ , et si on pose  $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{K} \mathcal{K} \xrightarrow{g} L^0(\Omega, \mu)$ , où  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}$  est la fonction  $t \mapsto K(\bullet, t)$ , on voit que  $f$  est une fonction aléatoire sur  $\mathbb{R}^n$  ; pour  $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $C_1, C_2, \dots, C_k \in \mathbb{R}$ ,  $C_1 f(t_1) + \dots + C_k f(t_k) = g(C_1 K(\bullet, t_1) + \dots + C_k K(\bullet, t_k))$



est gaussienne, de paramètre  $\left\| \sum_{i=1}^n C_i K(\bullet, t_i) \right\| = \left( \sum_{i,j=1, \dots, k} C_i C_j K(t_i, t_j) \right)^{1/2}$ .

Pour  $K$  donné, la fonction aléatoire  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$  est la seule, à une isonomie près, pour laquelle on ait cette propriété ; car alors  $\sum_{i=1}^n C_i f(t_i)$  a une loi de probabilité connue, donc la variable aléatoire  $(f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_k)) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  a une loi scalairement connue, donc connue par son image de Fourier (lemme p. (V,5)), et  $f$  a ses lois marginales connues.

2) Prenons  $K(t, \tau) = |t| + |\tau| - |t - \tau|$ , où  $| \cdot |$  est la longueur euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ , et montrons que  $K$  est de type positif. Si c'est vrai, cela entraîne que, pour  $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}^n$  et  $C_1, C_2, \dots, C_k \in \mathbb{R}$  avec  $C_1 + C_2 + \dots + C_k = 0$ , on ait  $-\sum_{i,j} C_i C_j |t_i - t_j| \geq 0$ . Inversement, supposons cette propriété

démontrée, et soient  $C_1, C_2, \dots, C_k \in \mathbb{R}$  avec  $C_1 + C_2 + \dots + C_k = s$  quelconque ; alors on peut rajouter un  $t_1$  supplémentaire, avec  $C_1 = -s$ , la somme des coefficients est maintenant nulle, et on aura donc

$$-\sum_{i,j} C_i C_j |t_i - t_j| + 2s \sum_j C_j |t_j - t_1| \geq 0 ; \text{ en faisant tendre } t_1 \text{ vers } 0, \text{ on}$$

$$\text{aura } 2s \sum_j C_j |t_j| - \sum_{i,j} C_i C_j |t_i - t_j| \geq 0, \text{ ou } \sum_{i,j} C_i C_j (|t_i| + |t_j| - |t_i - t_j|) \geq 0.$$

Nous devons donc montrer que, pour tout  $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}^n$  de somme nulle,  $-\sum_{i,j} C_i C_j |t_i - t_j| \geq 0$ . Il suffit pour cela que, quel que

soit  $\varepsilon > 0$ , et quels que soient les  $C_i$ , de somme nulle ou non, on ait  $\sum_{i,j} C_i C_j e^{-\varepsilon |t_i - t_j|} \geq 0$ , comme on le voit en développant suivant les puissances de  $\varepsilon$ . Autrement dit, il faut montrer que la fonction  $t \rightarrow e^{-\varepsilon |t|}$

est de type positif au sens de Bochner, ou que son image de Fourier est  $\geq 0$ . Or, si nous reprenons les fonctions  $H_\alpha$  du § 3 de l'exposé XIV, la fonction de Kelvin  $K_{-1/2}(u)$  est proportionnelle à  $\frac{e^{-|u|}}{\sqrt{|u|}}$ , donc

$\mathfrak{F} \left( (1 + |\tau|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \right)$  ( $\alpha = n+1$ ) est proportionnelle à  $e^{-2\pi |t|}$ , qui est donc de type positif comme cherché.

3) Il existe donc une fonction aléatoire, unique à une isonomie près, sur  $\mathbf{R}^n$ , telle que, pour  $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbf{R}^n$ ,  $C_1, C_2, \dots, C_k \in \mathbf{R}$ ,  $\sum_{i=1}^k C_i f(t_i)$  soit gaussienne, de paramètre  $\left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} C_i C_j (|t_i| + |t_j| - |t_i - t_j|)\right)^{1/2}$ . Alors

$f(0) = 0$ , et  $f(t') - f(t)$  est gaussienne de paramètre (ici  $c' + c = 0$ ) égal à  $|t' - t|^{1/2}$ . Et il suffit, pour caractériser  $f$ , d'écrire que toutes les  $C_1 f(t_1) + \dots + C_k f(t_k)$  sont gaussiennes (sans préciser leurs paramètres), que  $f(0) = 0$ , et que  $f(t') - f(t)$  est gaussienne de paramètre  $|t' - t|^{1/2}$ ; car alors  $f(t)$  est de paramètre  $|t|^{1/2}$  et

$$\text{Esp. } \left| \sum C_i f(t_i) \right|^2 = \sum_{i,j} C_i C_j \text{Esp. } (f(t_i) f(t_j)) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_i C_j \text{Esp. } (|f(t_i)|^2 + |f(t_j)|^2 - |f(t_i) - f(t_j)|^2), \text{ donc}$$

$\sum_{i=1}^k C_i f(t_i)$  est forcément de paramètre  $\left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} C_i C_j (|t_i| + |t_j| - |t_i - t_j|)\right)^{1/2}$ .

Proposition (XV,7;2) : la fonction aléatoire brownienne est p-presque sûrement une fonction continue, höldérienne d'ordre  $\beta$ , pour tout p fini et tout  $\beta < \frac{1}{2}$ .

Démonstration : la variable  $\frac{f(t') - f(t)}{|t' - t|^{1/2}}$  est gaussienne normale, donc

sa norme dans  $L^p(\Omega, \mu)$  est fixe ; la remarque 3 de la page (XV.13) est encore valable, en remplaçant  $\alpha - \beta > \frac{1}{p_0}$  par  $\frac{\alpha - \beta}{n} > \frac{1}{p_0}$ , et donne la

même conclusion. Des généralisations ont été obtenues par Dacunha-Castelle.