Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

L. Schwartz

**Applications radonifiantes dans les espaces de distributions sur $\mathbb{R}^n$**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1969-1970), exp. nº 14, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A14_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E L. S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

# APPLICATIONS RADONIFIANTES DANS LES ESPACES DE DISTRIBUTIONS SUR $\mathbb{R}^n$

Exposé N° 14 16 Février 1970

## § 1. APPLICATIONS p-RADONIFIANTES DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

Soit $E$ un espace localement convexe, $\Phi$ un poids homogène (exposé IV, §4). Une probabilité cylindrique $\lambda$ sur $E$ sera dite de type $\Phi$, s'il existe un voisinage $V$ de $0$ dans $E'$, équilibré fermé, tel que $\lambda$ soit de type $(\Phi, j_V)$, $j_V$ étant la jauge de $V$ (exposé V, §1). Cela veut exactement dire que $\xi \mapsto \Phi(\xi(\lambda))$ est nulle et continue à l'origine de $E'$ ; ou que, si $f : E' \to L^0(\Omega,\mu)$ est une fonction aléatoire associée, $\xi \mapsto \Phi((f(\xi))(\mu))$ est nulle et continue à l'origine de $E'$. Pour $\Phi = \| \|_p$, $0 < p \leq +\infty$, cela veut dire que $f$ est continue $E' \to L^p(\Omega,\mu)$.

Une probabilité de Radon $\lambda$ sur $E$ sera dite d'ordre $\Phi$, s'il existe une partie $B$ bornée fermé équilibrée de $E$ telle que $\lambda$ soit d'ordre $(\Phi, j_B)$, $j_B$ étant la jauge de $B$ (qui, rappelons-le, vaut $+\infty$ en dehors du sous-espace vectoriel engendré par $B$). ~~Pour $\Phi = \| \|_p$ et $B$ convexe, cela veut dire que $\lambda$ est l'image, par l'injection $E_B \to E$, d'une probabilité de Radon d'ordre p sur l'espace vectoriel normé $E_B$~~. Enfin, si $E$ et $G$ sont localement convexes, une application linéaire faiblement continue $u$ de $E$ dans $G$ est dite p-radonifiante, $0 < p \leq +\infty$, si l'image par $u$ de toute probabilité cylindrique $\lambda$, de type $p$ sur $E$, est une probabilité de Radon $u(\lambda)$ d'ordre $p$ sur $G$.

<u>Proposition (XIV,1 ; 1)</u> : <u>Soit $G = \prod_{n \in \mathbb{N}} G_n$ un produit dénombrable d'espaces localement convexes. Soit $\lambda$ une probabilité cylindrique sur $G$. Si chacune de ses projections $\lambda_n = pr_n \lambda$ est de Radon sur $G_n$, $\lambda$ est de Radon ; si chaque $pr_n \lambda$ est de Radon d'ordre $p$, $\lambda$ est de Radon d'ordre $p$ (les réciproques étant triviales)</u>.

<u>Démonstration</u> : Supposons que toutes les $pr_n \lambda$ soient de Radon. D'après Prokhorov (I,3 ; 1), pour $\varepsilon$ donné, il existe un compact $K_n$ de $G_n$ tel que, pour toute application linéaire continue $\pi_n$ de $G_n$ dans un espace vectoriel de dimension finie, on ait $(\pi_n \, pr_n \lambda)(\pi_n K_n) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ .
Soit $K$ le compact $\prod_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Montrons que $K$ vérifie la condition de

Prokhorov pour $\lambda$ et $\varepsilon$. Soit donc $\pi$ une application linéaire continue de G dans un espace vectoriel de dimension finie H. Soit $N_n$ le noyau de la restriction de $\pi$ à $G_n$, $G_n$ étant identifié à un sous-espace de G. A cause de la continuité de $\pi$ et de la définition de la topologie produit, $N_n = G_n$ sauf pour un nombre fini de valeurs de n, et $\pi$ se factorise par

$$G \xrightarrow{\prod_{n\in\mathbb{N}} \pi_n} \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n/N_n \xrightarrow{\rho} H,$$ $\pi_n$ étant l'application canonique $G_n \to G_n/N_n$,

et $\rho$ linéaire continue.

Pour montrer que $(\pi\lambda)(\pi K) \geq 1-\varepsilon$, il suffit de montrer que $((\prod_{n\in\mathbb{N}} \pi_n)\lambda)(\prod_{n\in\mathbb{N}} (\pi_n(K_n))) \geq 1-\varepsilon$, ce qui s'écrit avec des produits finis:

$$((\prod_{n\leq n_o} \pi_n)(pr_{\{0,1,2,\dots,n_o\}}\lambda))(\prod_{n\leq n_o}(\pi_n(K_n))) \geq 1-\varepsilon .$$

Posons $\nu = (\prod_{n\leq n_o}\pi_n)(pr_{\{0,1,2,\dots,n_o\}}\lambda)$, probabilité de Radon sur l'espace vectoriel de dimension finie $\prod_{n\leq n_o} Z_n = \prod_{n\leq n_o}(G_n/N_n)$, et $\pi_n(K_n) = L_n \subset Z_n$.

Nous avons à montrer l'inégalité

$$\nu(\prod_{n\leq n_o} L_n) \geq 1 - \varepsilon ;$$

mais $$\complement_{Z_n}(\prod_{n\leq n_o} L_n) = \bigcup_{n\leq n_o}((\complement_{Z_n} L_n) \times \prod_{\substack{m\leq n_o\\ m\neq n}} Z_m),$$

avec $$\nu((\complement_{Z_n} L_n) \times \prod_{\substack{m\leq n_o\\ m\neq n}} Z_m) = (pr_n\nu)(\complement_{Z_n} L_n)$$

$$= (\pi_n\, \lambda_n)(\complement_{Z_n}(\pi_n\, K_n)) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$ d'où le résultat ;

donc $\lambda$ est bien de Radon sur G.

Supposons maintenant qu'en outre chaque $\lambda_n = pr_n\lambda$ soit de Radon d'ordre p fini sur $G_n$. Soit $B_n$ une partie bornée équilibrée fermée de $G_n$ telle que $\int_G (j_{B_n}(x_n))^p d\lambda_n(x_n) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Posons, pour $x \in G$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in G_n$ : $j(x) = (\sum_{n\in\mathbb{N}} (j_{B_n}(x_n))^p)^{1/p}$. Alors j est $\geq 0$, positivement homogène, semi-continue inférieurement comme puissance $1/p$ d'une somme de fonctions s.c.i., donc elle est la jauge $j_B$ d'une partie $B = \{x \in G \ ; \ j(x) \leq 1\}$ équilibrée fermée ; B est bornée car contenue dans $\prod_{n\in\mathbb{N}} B_n$ ; et

$$\int_G (j(x))^p \, d\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{G_n} (j_{B_n}(x_n))^p \, d\lambda_n(x_n) \leq 1,$$

donc $\lambda$ est d'ordre $(\| \ \|_p, j)$, donc d'ordre p. Démonstration facile pour $p = +\infty$, avec des $B_n$ tels que $(\text{sup. ess.})_{\lambda_n} \, j_{B_n} \leq 1$, et $j(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} j_{B_n}(x_n)$.

c q f d.

<u>Corollaire</u> : <u>Soient E un espace localement convexe, G un Fréchet, u une application linéaire faiblement continue de E dans G. Pour que u soit p-radonifiante, il faut et il suffit que, pour toute application linéaire continue w de G dans un Banach H, w $\circ$ u soit p-radonifiante.</u>

<u>Démonstration</u> : C'est évidemment nécessaire, montrons que c'est suffisant. On peut identifier G à un sous-espace fermé d'un produit dénombrable de Banach, $\prod_{n\in\mathbb{N}} H_n$. Soit $\lambda$ une probabilité cylindrique de type p sur E, soit $u(\lambda)$ son image dans G. Il résulte des hypothèses que chaque $pr_n u(\lambda)$ est de radon d'ordre p sur $H_n$, donc l'image de $u(\lambda)$ dans $\prod_{n\in\mathbb{N}} H_n$ est de Radon d'ordre p, d'après le théorème précédent. Mais cette probabilité de Radon est cylindriquement portée par G, et la même démonstration que dans le §5 de l'exposé XI montre que $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre p sur G, c q f d.

## § 2. APPLICATIONS p-RADONIFIANTES DANS LES ESPACES NUCLEAIRES ET CONUCLEAIRES.

Rappelons qu'un espace localement convexe E est dit nucléaire, si toute application linéaire continue $E \to B$ de E dans un Banach se factorise par $E \to B_1 \to B$, où $B_1$ est un Banach et $B_1 \to B$ un opérateur nucléaire. Mais un opérateur nucléaire se factorise toujours en passant par un Hilbert : $B_1 \to H_1 \to B$, car il se factorise en passant par une application $l^\infty \to l^1$ diagonale, qui elle-même admet une factorisation $l^\infty \to l^2 \to l^1$ ; d'autre part $E \to B$, admet à son tour une factorisation analogue, de sorte que $E \to B$ admet une factorisation

$$E \to B_3 \to H_3 \to B_2 \to B_1 \to H_1 \to B,$$

où toutes les applications sont continues et $B_2 \to B_1$ nucléaire, d'où finalement une factorisation $E \to H_3 \to H_1 \to B$, où $H_1$ et $H_3$ sont des Hilbert, et $H_3 \to H_1$ est nucléaire et a fortiori Hilbert-Schmidt. Inversement, si E est un espace localement convexe, et si toute application linéaire continue $E \to B$ de E dans un Banach B admet une factorisation $E \to H_2 \to H_1 \to B$, où $H_1$ et $H_2$ sont des Hilbert et $H_2 \to H_1$ est de Hilbert-Schmidt, on en déduira une autre factorisation $E \to H_3 \to H_2 \to H_1 \to B$, où $H_3 \to H_2$ et $H_2 \to H_1$ sont de Hilbert-Schmidt donc $H_3 \to H_1$ nucléaire, et E est un espace nucléaire. Nous aurons besoin de savoir que les espaces de distributions $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{S}'$, sont nucléaires (voir Thèse de Grothendieck, petit livre à l'usage des débutants, Memoirs of the Amer. Math. Soc., 1955, chap.II, §2, page 54 ; ou Séminaire Schwartz, Institut Henri Poincaré, 1954, exposé 18).

D'autre part, toute partie bornée d'une espace nucléaire est précompacte, donc un espace quasi-complet nucléaire est semi-réflexif.

Soit maintenant $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées convexes équilibrées fermées de E, stable par homothéties, filtrant pour l'inclusion et engendrant E. On dit que E est $\mathfrak{S}$-conucléaire, si, pour toute $A \in \mathfrak{S}$, il existe $B \in \mathfrak{S}$, $B \supset A$, tel que l'injection canonique $\hat{E}_A \to \hat{E}_B$ soit un opérateur nucléaire. Si $\mathfrak{S}$ n'est pas mentionné, il est entendu que c'est l'ensemble de toutes les parties bornées convexes équilibrées fermées ; dans ce cas, et si E est quasi-complet, cela revient à dire que toute application linéaire continue d'un Banach B dans E admet une factorisation $B \to B_1 \to E$, où $B_1$ est un Banach et $B \to B_1$ est un opérateur nucléaire ; par les mêmes méthodes qu'antérieurement, cela équivaut à dire qu'elle admet une factorisation $B \to H_1 \to H_2 \to E$, où $H_1$ et $H_2$ sont hilbertiens et $H_1 \to H_2$ est de Hilbert-Schmidt.

Les parties bornées d'un espace conucléaire sont précompactes ; un espace quasi-complet conucléaire est semi-réflexif.

Proposition (XIV,2 ; 1) : Soit E un espace localement convexe quasi-complet ; il est conucléaire si et seulement si son dual fort E' est nucléaire.

Démonstration :

1) Soit E quasi-complet et conucléaire. Soit $E' \to B$ une application linéaire continue dans un Banach. Sa transposée $B' \to E''$ est continue, et comme E'' est E avec une topologie plus fine, elle est une application continue $B' \to E$. Donc elle admet une factorisation $B' \to H_1 \to H_2 \to E$ par un Hilbert-Schmidt entre deux Hilbert.
Par transposition, on voit que $E' \to B \to B''$ admet la factorisation $E' \to H_2 \to H_1 \to B''$. Soit $L_2$ l'image de E' dans $H_2$, $L_1$ l'image de $L_2$ dans $H_1$ ; alors l'image de $L_1$ dans B'' est l'image de E', donc est dans B ; d'où une factorisation $E' \to \overline{L}_2 \to \overline{L}_1 \to B$, où $\overline{L}_2 \to \overline{L}_1$ est de Hilbert-Schmidt ; donc E' est nucléaire.

2) Inversement, soient E quasi-complet et E' nucléaire.
Soit $B \to E$ une application linéaire continue d'un Banach dans E. Alors $E' \to B'$ admet une factorisation $E' \to H_1 \to H_2 \to B'$ par un Hilbert-Schmidt entre deux Hilbert. Par transposition, on en déduit une factorisation $B \to H_2 \to H_1 \to E''$ ; en définissant ici encore l'image $L_2$ de B dans $H_2$, l'image $L_1$ de $L_2$ dans $H_1$, on voit que l'image de $L_1$ dans E'' est dans E ; $H_1 \to E''$ étant continue, $L_1 \to E$ l'est a fortiori ; comme E est quasi-complet, on a une factorisation $B \to \overline{L}_2 \to \overline{L}_1 \to E$, où

$\overline{L}_2 \to \overline{L}_1$ est Hilbert-Schmidt, donc E est conucléaire.

Remarques : Avec quelques difficultés supplémentaires, on démontre de même que, si les parties $A \in \mathfrak{S}$ sont complètes, E est $\mathfrak{S}$-conucléaire si et seulement si $E'_{\mathfrak{S}}$ est nucléaire. On voit de même que E est nucléaire si et seulement si E' est $\mathfrak{S}$-conucléaire, où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties équicontinues convexes équilibrées *-faiblement compactes.

Corollaire : Les espaces de distributions sur $\mathbf{R}^n$ : $\mathfrak{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathcal{E}'$, $\mathfrak{s}'$, sont conucléaires.

Proposition (XIV,2 ; 2) (Théorème de Minlos pour $p > 0$)
Si E est un espace localement convexe, quasi-complet et conucléaire, l'application identique de E est p-radonifiante pour tout $p > 0$, et l'application identique de E' est p-décomposante. En conséquence, toute application linéaire continue de E dans un espace localement convexe, toute application linéaire faiblement continue d'un espace localement convexe dans E, est p-radonifiante.

Démonstration : Soit $\lambda$ une probabilité cylindrique de type p sur E. On peut lui associer une fonction aléatoire linéaire continue $f : E' \to L^p(\Omega,\mu)$. Il existe un voisinage V de 0 de E' dont l'image par f vient dans la boule ou quasi-boule unité de $L^p$ ; comme E' est localement convexe, on peut supposer V convexe équilibré. Alors f se factorise par $E' \to \hat{E}'_V \to L^p(\Omega,\mu)$, et $\hat{E}'_V$ est un Banach. Comme E' est nucléaire d'après la proposition précédente, on peut factoriser f par $E' \to H_1 \to H_2 \xrightarrow{g} L^p(\Omega,\mu)$, avec un Hilbert-Schmidt entre deux Hilbert. Mais alors $H_2 \xrightarrow{g} L^p(\Omega,\mu)$ est une fonction aléatoire linéaire continue, définissant une probabilité cylindrique $\nu$ de type p sur $H_2$ ; la transposée de $E' \to H_1 \to H_2$ est $H_2 \to H_1 \to E''$, donc a fortiori $H_2 \to H_1 \to E$, puisque E est semi-réflexif et que E'' est E avec une topologie plus fine ; l'image de $\nu$ dans E par $H_2 \to H_1 \xrightarrow{w} E$ est associée à $E' \xrightarrow{{}^t w} H_1 \to H_2 \xrightarrow{g} L^p(\Omega,\mu)$, donc à f, donc c'est $\lambda$ ; mais $H_2 \to H_1$, Hilbert-Schmidt, est p-radonifiante, donc $\lambda$ est de Radon d'ordre p.

D'après la prop. (XIII,3 ; 1), $H_1 \to H_2 \to L^p(\Omega,\mu)$ est décomposée, par une application $\psi : \Omega \to H_1$, appartenant à $L^p(\Omega,\mu\,;H_1)$. Alors a fortiori f est décomposée, par une application $w \circ \psi = \varphi : \Omega \to E$, appartenant à $L^p(\Omega,\mu\,;E)$ au sens le plus fort : elle appartient à $L^p(\Omega,\mu\,;E_A)$, où A est une partie bornée convexe équilibrée compacte de E (l'image par $H_1 \xrightarrow{w} E$ de la boule unité de $H_1$). Donc l'application identique de E' est p-décomposante. c q f d

Proposition (XIV,2 ; 3) : Soient E un espace nucléaire, G un Fréchet ; toute application linéaire continue u de E dans G est p-radonifiante pour tout $p > 0$.

Démonstration : D'après le corollaire de la prop. (XIV,1 ; 1), on peut supposer G Banach. Mais alors, E étant nucléaire, u se factorise par $E \to H_1 \to H_2 \to G$, où $H_1 \to H_2$ est de Hilbert-Schmidt, donc elle est bien p-radonifiante.

Application : Soit T une "distribution aléatoire" sur $\mathbb{R}^n$, de type p, c'est-à-dire une fonction aléatoire linéaire continue $\mathcal{D} \xrightarrow{T} L^p(\Omega,\mu)$, $p > 0$. La probabilité cylindrique correspondante $\lambda$ sur $\mathcal{D}'$ est une probabilité cylindrique de type p, et $\mathcal{D}'$ est conucléaire. Donc c'est une probabilité de Radon d'ordre p sur $\mathcal{D}'$, par la prop. (XIV,2 ; 2).

En outre, T est décomposée, par $\tilde{T} : \Omega \to \mathcal{D}'$, appartenant à $L^p(\Omega,\mu\,;\mathcal{D}')$ et même à un $L^p(\Omega,\mu\,;\mathcal{D}'_A)$, A partie convexe équilibrée compacte de $\mathcal{D}'$ ; pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, la variable aléatoire $T(\varphi) \in L^p(\Omega,\mu)$ n'est autre que $\omega \to \langle \tilde{T}(\omega),\varphi\rangle$. En ce sens, on dira que toute distribution aléatoire de type p est p-presque sûrement une distribution.

## § 3. DÉRIVATIONS D'ORDRE NON ENTIER SUR $\mathbb{R}^n$

Nous aurons besoin de pouvoir dire d'une distribution que "sa dérivée d'ordre $\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, est dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$". Il faut donc définir des intégrations et dérivations d'ordre réel.

Posons $H_\alpha = \mathcal{F}((1+|\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}})$ ; c'est une distribution, définie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, et qui, pour $\alpha > 0$, s'exprime à l'aide de la fonction de Kelvin :

$$H_\alpha = 2\,\frac{\pi^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)}\,|x|^{\frac{\alpha-n}{2}}\,K_{\frac{n-\alpha}{2}}(2\pi|x|)$$

(Théorie des distributions, formules (II,3 ; 20) et (VII,7 ; 23)) ;

$$\text{et} \qquad H_{-2k} = \left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k \delta \quad \text{pour } k \text{ entier} \geq 0.$$

Les propriétés des fonctions de Kelvin montrent que $H_\alpha$ est, dans l'ouvert complémentaire de l'origine, une fonction analytique, décroissant exponentiellement à l'infini ainsi que chacune de ses dérivées. Mais de toute façon on voit que, pour $\alpha$ fixé, pour tout $p \in \mathbb{N}^n$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour $k \geq k_o$, $\left(-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k((2i\pi\xi)^p(1+|\xi|^2)^{-\alpha/2}) \in L^1$, donc $|x|^{2k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p H_\alpha$ est continue bornée ; donc $H_\alpha$ est bien, dans le complémentaire de l'origine, une fonction $C^\infty$, rapidement décroissante à l'infini ainsi que chacune de ses dérivées. En particulier $H_\alpha \in \mathcal{O}'_C$ est un convoluteur de $\mathcal{S}'$. Posons $G_\alpha = \theta H_\alpha$, où $\theta \in \mathcal{D}$ est égale à 1 au voisinage de l'origine ; d'après ce que nous venons de dire, $G_\alpha - H_\alpha$ est dans $\mathcal{S}$, nulle au voisinage de l'origine, et $G_\alpha$ est à support compact donc convoluteur de $\mathcal{D}'$.

$$\text{On a} \qquad H_\alpha * H_\beta = H_{\alpha+\beta},$$

$$\text{donc} \qquad G_\alpha * G_\beta = G_{\alpha+\beta} + \rho_{\alpha,\beta}, \quad \rho_{\alpha,\beta} \in \mathcal{D}.$$

Compte tenu de ce que $H_{-2k} = \left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k$, nous dirons que $G_\alpha * T$, $T \in \mathcal{D}'$, est une primitive $J^\alpha T$ d'ordre $\alpha$ de $T$, et que $G_{-\alpha} * T$ est une dérivée $D^\alpha T$ d'ordre $\alpha$ de $T$. On n'a pas $D^\alpha D^\beta T = D^{\alpha+\beta}T$, mais

$D^\alpha D^\beta T = D^{\alpha+\beta}T + \rho * T$, $\rho \in \mathfrak{D}$, ce qui n'est pas gênant pour l'étude de la régularité locale. De même la fonction $\theta \in \mathfrak{D}$ choisie n'a aucune importance, car un changement de $\theta$ aboutit seulement à un changement sur les $\rho_{\alpha,\beta}$, ce qui n'est pas gênant pour l'étude de la régularité locale. Par contre le choix de $H_\alpha$ est arbitraire ; on pourrait remplacer $H_\alpha$ par une autre distribution du même type, par exemple en remplaçant $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$ par une autre forme quadratique, ou de mille autres manières ; pour écrire que $D^\alpha T$ est dans $L^2_{loc}$ ou même dans $L^p_{loc}$, $1 < p < +\infty$, les differents choix donneront en général le même résultat, mais pas pour $C$ ou $L^1_{loc}$. Nous supposons fait un choix une fois pour toutes. D'autre part, le comportement de $H_\alpha$ au voisinage de l'origine est connu : $H_\alpha$ est une fonction pour $\alpha > 0$, et égal à $\delta$ pour $\alpha = 0$, et $|H_\alpha(x)| \leq \text{constante} \times |x|^{\alpha-n}$ pour $0 < \alpha < n$. Tout autre choix ayant ces propriétés sera valable pour la suite.

<u>Définition</u> : <u>Soit $W$ un espace de distributions sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{E} \subset W \subset \mathfrak{D}'$, les injections étant continues. On suppose de plus que, pour toute mesure à support compact sur $\mathbb{R}^n$, $T \mapsto \mu * T$ est continue de $W$ dans $W$.</u>

<u>On appelle alors $W^\alpha$ l'espace des distributions $T$ telles que $D^\alpha T$ soit dans $W$ ; on le munit de la topologie la moins fine rendant continues l'injection de $W$ dans $\mathfrak{D}'$ et la dérivation $D^\alpha : W^\alpha \to W$.</u>

<u>Proposition (XIV,3 ; 1)</u> : <u>Pour $\beta \leq \alpha$, $W^\alpha \subset W^\beta$ avec une injection continue : $D^\gamma$ est un opérateur linéaire continu de $W^\alpha$ dans $W^{\alpha-\gamma}$ ; en outre, $T \in W^\alpha$ équivaut à $D^\gamma T \in W^{\alpha-\gamma}$, et, si $T$ converge vers 0 dans $\mathfrak{D}'$ et $D^\gamma T$ dans $W^{\alpha-\gamma}$, $T$ converge vers 0 dans $W^\alpha$.</u> (•)

<u>Démonstration</u> : Supposons que $T$ converge vers 0 dans $W^\alpha$. Alors $D^\beta T = D^{\beta-\alpha} D^\alpha T + \rho * T$, $\rho \in \mathfrak{D}$ ; comme $T$ converge vers 0 dans $\mathcal{E}$ donc dans $W$, comme $D^\alpha T$ converge vers 0 dans $W$ et que $D^{\beta-\alpha}$ est la convolution avec une mesure $G^{\beta-\alpha}$, $\beta - \alpha \leq 0$, $D^{\beta-\alpha} D^\alpha T$ converge aussi vers 0 dans $W$, donc $D^\beta T$ vers 0 dans $W$, donc $T$ dans $W^\beta$ ; donc $W^\alpha \subset W^\beta$ avec une injection continue.

(•) Cette dernière affirmation peut s'énoncer : l'application $T \mapsto (T, D^\gamma T)$ de $W^\alpha$ dans $\mathfrak{D}' \times W^{\alpha-\gamma}$ est un morphisme strict.

De même, si T converge vers 0 dans $W^{\alpha}$, $D^{\alpha-\gamma} D^{\gamma} T = D^{\alpha}T + \rho_1 * T$, par un raisonnement analogue, converge vers 0 dans W, donc $D^{\gamma}T$ dans $W^{\alpha-\gamma}$, et $D^{\gamma} : W^{\alpha} \to W^{\alpha-\gamma}$ est continue. Inversement, supposons que T converge vers 0 dans $\mathfrak{D}'$ et $D^{\gamma}T$ vers 0 dans $W^{\alpha-\gamma}$ ; alors, par le même raisonnement, $D^{\alpha}T = D^{\alpha-\gamma} D^{\gamma} T - \rho_1 * T$ converge vers 0 dans W, donc T dans $W^{\alpha}$.

<u>Proposition (XIV,3 ; 2) (Sobolev-Krylov)</u> : <u>Appelons $W^{p,\alpha}$ l'espace $(L^p_{loc})^{\alpha}$ pour $1 < p < +\infty$, $W^{1,\alpha}$ l'espace $M^{\alpha}$ ou $(L^1_{loc})^{\alpha}$, $W^{\infty,\alpha}$ l'espace $C^{\alpha}$ ou $(L^{\infty}_{loc})^{\alpha}$, où C est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ et M l'espace des mesures.</u>

<u>Alors, si $\frac{\alpha - \beta}{n} > (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^+$, $1 \leq a,b \leq +\infty$, on a $W^{a,\alpha} \subset W^{b,\beta}$.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit d'abord $\beta = 0$, $0 < \alpha < n$. Alors $|x|^{\alpha-n}$ est, au voisinage de l'origine, dans $L^r$, dès que $\frac{1}{r} > 1 - \frac{\alpha}{n}$ ; alors $G_{\alpha}$, qui est à support compact et dont nous connaissons une majoration à l'origine, est dans $L^r_{comp}$.

Mais on sait que $\quad L^a_{loc} * L^r_{comp} \subset L_{loc}^{1/(\frac{1}{a} + \frac{1}{r} - 1)^+}$ ;

donc $$G_{\alpha} * L^a_{loc} \subset L^{1/(\frac{1}{a} - \frac{\alpha}{n} + \varepsilon)^+}, \quad \varepsilon > 0 \text{ arbitraire.}$$

Si $T \in (L^a_{loc})^{\alpha}$, c'est que $D^{\alpha}T \in L^a_{loc}$, donc $T = G_{\alpha} * D^{\alpha}T + \rho * T$ est dans $L_{loc}^{1/(\frac{1}{a} - \frac{\alpha}{n} + \varepsilon)^+}$, donc dans $L^b_{loc}$ si $(\frac{1}{a} - \frac{\alpha}{n} + \varepsilon)^+ \leq \frac{1}{b}$, ce qui est possible pour $\varepsilon > 0$ assez petit si $\frac{\alpha}{n} > (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^+$. Pour a = 1, on peut même remplacer $(L^1_{loc})^{\alpha}$ par $M^{\alpha}$, et, pour $b = +\infty$, $L^{\infty}_{loc}$ par C (dans le cas où nous nous sommes placés, $0 < \alpha < n$, on a $\frac{1}{r} > 0$, donc, pour a = 1, $\frac{1}{a} + \frac{1}{r} - 1 = \frac{1}{r} > 0$, et le cas a = 1, $b = +\infty$, ne peuvent donc pas se présenter ensemble).

Soit maintenant $\alpha, \beta$ quelconques, avec toutefois $0 < \alpha - \beta < n$. En vertu de la prop. (XIV,3 ; 1), $W^{a,\alpha} \subset W^{b,\beta}$ si et seulement si $W^{a,\alpha-\beta} \subset W^b$;

ce sera donc vérifié si $\frac{\alpha - \beta}{n} > (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^{+}$.

Reste à lever la restriction $0 < \frac{\alpha - \beta}{n} < 1$. Comme $(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^{+} \geq 0$, on a forcément $\frac{\alpha - \beta}{n} > 0$. Comme $(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^{+} \leq 1$, on peut toujours, quitte à remplacer $\beta$ par un nombre plus grand, supposer que $\frac{\alpha - \beta}{n} = (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^{+} + \varepsilon$, où $\varepsilon$ peut être choisi $> 0$ aussi petit qu'on veut. Le seul cas non traité est donc $a = 1$, $b = +\infty$. Il faut donc simplement montrer que $M^{\alpha} \subset C^{\beta}$ pour $\frac{\alpha - \beta}{n} > 1$. Or il suffit d'appliquer 2 fois les résultats précédents : $M^{\alpha} \subset (L^2_{loc})^{\alpha - \frac{n}{2} - \varepsilon}$, et $(L^2_{loc})^{\alpha - \frac{n}{2} - \varepsilon} \subset C^{\alpha - n - 2\varepsilon}$, d'où le résultat, c q f d.

Nous allons maintenant chercher quand l'injection de $W^{a,\alpha}$ dans $W^{b,\beta}$ est p-radonifiante, $1 \leq p \leq +\infty$.

## § 4. INJECTIONS p-RADONIFIANTES ENTRE ESPACES DE SOBOLEV.

Soit H le support de $G_{\alpha}$. Pour tout ouvert relativement compact $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$, la convolée $G_{\alpha} * T$, dans $\mathcal{O}$, ne dépend que des valeurs de T dans $\mathcal{O} - H$. On pourra donc parler de la convolution avec $G_{\alpha}$ comme opérateur de $\mathcal{D}'(\mathcal{O} - H)$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

<u>Lemme 1</u> : <u>Pour que la convolution avec $G_{\alpha}$, $\alpha \geq 0$, soit p-radonifiante de $W^{a,o}$ dans $W^{b,o}$ (notations du §3), il faut et il suffit que, pour tout $\mathcal{O}$ ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^n$, elle soit p-radonifiante de $L^a(\mathcal{O} - H)$ dans $L^b(\mathcal{O})$ ($L^1$ pouvant être remplacé par M, $L^{\infty}$ par C).</u>

Ceci nous ramène toujours à des Banach.

<u>Démonstration</u> : Si $W^{a,} \xrightarrow{G_{\alpha}} W^{b,o}$ est p-radonifiante, a fortiori $W^{a,o} \xrightarrow{G_{\alpha}} W^{b,o} \longrightarrow L^b(\mathcal{O})$. Mais alors, comme $L^a(\mathcal{O} - H)$ (éventuellement M si a = 1) s'envoie dans $W^{a,o}$, on en déduit bien que $G_{\chi} *$ : $L^a(\mathcal{O} - H) \to L^b(\mathcal{O})$ est p-radonifiante.

Inversement, supposons $G_\alpha *$ : $L^a(\mathcal{O}-H) \to L^b(\mathcal{O})$ p-radonifiante pour tout $\mathcal{O}$.

Alors $L^a_{loc} \to L^a(\mathcal{O}-H) \xrightarrow{G_\alpha *} L^b(\mathcal{O})$ (la 1ère opération étant la restriction à $\mathcal{O}-H$) est p-radonifiante ; comme $L^b_{loc}$ est limite projective des projections $L^b_{loc} \to L^b(\mathcal{O})$, le corollaire de la prop. (XIV,1 ; 1) prouve que $G_\alpha *$ : $L^a_{loc} \to L^b_{loc}$ est p-radonifiante.

<u>Lemme 2</u> : Pour que $D^\theta$ soit p-radonifiante de $W^{\alpha,\beta}$ dans $W^{b,\beta}$, il faut et il suffit que $D^{\theta+\sigma}$ le soit de $W^{a,\alpha+\gamma}$ dans $W^{b,\beta+\gamma-\sigma}$.

<u>Démonstration</u> : Supposons $D^\theta$ p-radonifiante : $W^{a,\alpha} \to W^{b,\beta}$. Alors $D^{\sigma-\gamma} \circ D^\theta \circ D^\gamma : W^{a,\alpha+\gamma} \xrightarrow{D^\gamma} W^{a,\alpha} \xrightarrow{D^\theta} W^{b,\beta} \xrightarrow{D^{\sigma-\gamma}} W^{b,\beta+\gamma-\sigma}$ l'est aussi. Or elle diffère de $D^{\theta+\sigma}$ par la convolution avec une fonction $\rho \in \mathcal{D}$. Une telle convolution est p-radonifiante, puisqu'elle l'est déjà de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{E}$ (prop. (XIV,2 ; 2)).

On saura donc que $D^{\theta+\sigma}$ est p-radonifiante $W^{a,\alpha+\gamma} \to W^{b,\beta+\gamma-\sigma}$ si on sait qu'une somme $w_1 + w_2$ d'applications p-radonifiantes $E \to G$ l'est aussi. Or elle est composée du produit $(w_1,w_2)$ : $E \to G \times G$, p-radonifiante par la proposition (XIV,1 ; 1), et de l'addition $G \times G \to G$. L'implication réciproque se démontre de la même manière.

<u>Proposition (XIV,4 ; 1)</u> : <u>Soient $\alpha,\beta,\gamma$ réels, $\delta$ réel $\geq 0$, et $1 \leq a,b,c,d \leq +\infty$. Supposons que, pour tout ouvert $\mathcal{O}$ relativement compact, la convolution avec $G_\delta$ soit un opérateur p-radonifiant de $W^{c,o}(\mathcal{O}-H)$ dans $W^{d,o}(\mathcal{O})$, $0 < p \leq +\infty$ ($H$ = support de $G_\delta$). Alors la dérivation $D^{\gamma-\delta}$ est p-radonifiante de $W^{a,\alpha}$ dans $W^{b,\beta}$, si l'on a l'inégalité</u> :

$$\frac{\alpha-\beta-\gamma}{n} > \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)^+ + \left(\frac{1}{d}-\frac{1}{b}\right)^+$$

<u>Démonstration</u> : L'inégalité exprime qu'il existe un $\sigma$ réel tel que

$$\frac{\alpha-\sigma}{n} > \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)^+ , \quad \frac{\sigma-\beta-\gamma}{n} > \left(\frac{1}{d}-\frac{1}{b}\right)^+$$

Alors la prop. (XIV,3 ; 2) montre l'existence d'injections continues $W^{a,\alpha} \to W^{c,\sigma}$, et $W^{d,\sigma} \to W^{b,\beta+\gamma}$. Le lemme 1 montre que $D^{-\delta}$ : $W^{c,o} \to W^{d,o}$ est p-radonifiante ; le lemme 2 montre alors que $D^{-\delta}$ : $W^{c,\sigma} \to W^{d,\sigma}$ est aussi p-radonifiante.

Alors $D^{-\delta}$ : $W^{a,\alpha} \longrightarrow W^{c,\sigma} \xrightarrow{D^{-\delta}} W^{d,\sigma} \longrightarrow W^{b,\beta+\gamma}$ est p-radonifiante, et encore le lemme 2 montre que $D^{\gamma-\delta}$ est p-radonifiante de $W^{a,\alpha}$ dans $W^{b,\beta}$,

c q f d

__Remarque__ : Le résultat final ne concerne que a,b, $\alpha,\beta,\theta = \gamma - \delta$. On pourra donc dire que, pour que $D^{\theta}$ soit p-radonifiante de $W^{a,\alpha}$ dans $W^{b,\beta}$, il suffit qu'il existe un $\delta \geq 0$, puis $1 \leq c,d \leq +\infty$, tels que, pour tout $\mathfrak{O}$, la convolution avec $G_\delta$ soit p-radonifiante de $W^{c,o}(\mathfrak{O}-H)$ dans $W^{d,o}(\mathfrak{O})$, et que, si l'on pose $\gamma = \theta + \delta$, on ait $\frac{\alpha-\beta-\gamma}{n} > (\frac{1}{a} - \frac{1}{c})^{+} + (\frac{1}{d} - \frac{1}{b})^{+}$.

__Corollaire 1__ : __Si $\frac{\alpha-\beta}{n} > \frac{1}{a} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{b})^{+}$, $1 \leq p \leq +\infty$, l'injection canonique de $W^{a,\alpha}$ dans $W^{b,\beta}$ est p-radonifiante.__

__Démonstration__ : Prenons $\delta = 0$, donc $G_o$ = distribution de Dirac (qui s'appelle aussi malencontreusement $\delta$ !). Ici $H = \{0\}$. Alors $L^{\infty}(\mathfrak{O}) \to L^{p}(\mathfrak{O})$ est p-radonifiante, au moins si $1 < p < +\infty$ ; pour $p = 1$ ou $p = +\infty$, on voit sans peine que la convolution avec $G_\delta$ est p-radonifiante $L^{\infty}(\mathfrak{O}-H) \to L^{p}(\mathfrak{O})$ pour tout $\delta > 0$, ce qui aboutit aux mêmes conclusions ; ici $\gamma = 0$, $c = +\infty$, $d = p$.

__Corollaire 2__ : __L'injection canonique $(L^2_{loc})^{\alpha} \to (L^2_{loc})^{\beta}$ est $\beta$-radonifiante pour tout $p > 0$, si $\frac{\alpha-\beta}{n} > \frac{1}{2}$.__

__Démonstration__ : La convolution avec $G_\delta$ est de Hilbert-Schmidt de $L^2(\mathfrak{O}-H)$ dans $L^2(\mathfrak{O})$ si $\delta > \frac{n}{2}$, parce qu'alors $G_\delta$ est localement $L^2$ ; donc elle est p-radonifiante pour tout p. On prend ensuite $c = d = 2$, $\gamma = \delta$.

<u>Remarque</u> : Dans ce cas particulier, le résultat du corollaire 2 est bien meilleur que celui du corollaire 1 ; il exige $\frac{\alpha - \beta}{n} > \frac{1}{2}$ au lieu de $\frac{\alpha - \beta}{n} > \frac{1}{2} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{2})^{+}$ qui est $> \frac{1}{2}$ si $p < 2$ .

Nous montrerons plus tard un résultat encore meilleur : <u>l'injection $M^{\alpha} \longrightarrow (L^2_{loc})^{\beta}$ est p-radonifiante, pour tout $p \geq 0$, si</u> $\frac{\alpha - \beta}{n} > \frac{1}{2}$ .

---