L. SCHWARTZ

Applications p-radonifiantes, $0 < p \leq +\infty$ (suite)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. nº 12, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A12_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE L. SCHWARTZ 1969-1970

APPLICATIONS p-RADONIFIANTES, $0 < p \leq +\infty$ (Suite)

Exposé N° 12

2 Février 1970

§ 1. ELIMINATION DES HYPOTHESES D'APPROXIMATION

Proposition (XII,1;1) : Soient E,G, des Banach, u une application linéaire continue p-sommante de E dans G.
Alors elle est p-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$ dans chacun des deux cas suivants :
1) le couple (E,E') a la propriété d'approximation métrique (exposé V, §4) ;
2) $p \geq 1$.
En outre, si les conditions de la proposition (XI,2;1) sont aussi réalisées, u est p-radonifiante de E dans G.

Démonstration :
1) Résulte de la proposition (V,4;1).

2) Soit d'abord $p < +\infty$. Si X est un espace topologique, ν une probabilité sur X, $L^\infty(X,\nu)$ est isométrique à $C(\widetilde{X})$, où $\widetilde{X}$ est le spectre de l'algèbre de Banach L^∞ ; or $(C(\widetilde{X}),C'(\widetilde{X}))$ (proposition (V,4;2)) a la propriété d'approximation métrique, donc aussi $(L^\infty,(L^\infty)')$. Donc l'injection canonique $L^\infty \to L^p$, d'après 1), est p-radonifiante de L^∞ dans $\sigma((L^p)'',(L^p)')$ (et dans L^p, réflexif, si $1 < p < +\infty$). Et alors un raisonnement analogue à celui du §5 de l'exposé 11, (en remplaçant, pour p = 1, S par son adhérence dans $\sigma((L^1)'',(L^1)')$, c'est-à-dire par $\sigma(S'',S')$, puis G par $\sigma(G'',G')$), conduit au résultat.

Pour le cas $p = +\infty$, $E \to \sigma(G'',G')$ se factorise en passant par l'application identique de $\sigma(G'',G')$. Il suffit donc de prouver :

Lemme : Si H est un Banach, l'application identique de $\sigma(H',H)$ est ∞-radonifiante et $\|\lambda\|_{+\infty} = \|\lambda\|^*_{+\infty}$.

Soit, en effet, λ une probabilité cylindrique sur $\sigma(H',H)$, de type $+\infty$, avec, par exemple $\|\lambda\|^*_{+\infty} = 1$. Cela veut dire que, pour tout $\xi \in H$, $\xi(\lambda)$ est portée par l'intervalle $[-\|\xi\|, +\|\xi\|]$ de $\mathbb{R}$, ou que λ est scalairement portée par la boule unité B' de H'. Mais alors, si w est une application linéaire continue de $\sigma(H',H)$ dans un espace vectoriel de dimension finie, w(B') (compact) est l'intersection filtrante des intersections finies de demi-espaces fermés qui le contiennent, donc $w(\lambda)$ est portée par $w(B')$; autrement dit, λ est cylindriquement portée par B'. Le théorème de Prokhorov (I,3;1) dit que λ est de Radon sur $\sigma(H',H)$, portée par $\bigcap_w w^{-1}(w(B')) = B'$ compact, donc d'ordre $+\infty$ sur $\sigma(H',H)$, avec $\|\lambda\|_{+\infty} = +1$.

<u>Exemples</u> : Un opérateur de Hilbert-Schmidt d'un Hilbert dans un autre est p-radonifiant pour tout $p > 0$.
L'application identique $\sigma(l^1, c^0) \to l^2$ est p-radonifiante pour tout $p > 0$. En effet, elle est p-sommante (exposé VIII) de l^1 dans l^2, faiblement continue de $\sigma(l^1, c^0)$ dans l^2 (voir remarque page XI,3), ensuite c^0 a la propriété d'approximation métrique et l^2 est réflexif. A fortiori, bien sûr, elle est p-radonifiante de l^1 dans l^2 pour tout $p > 0$.

§ 2. <u>CAS DES OPERATEURS NUCLEAIRES</u>

<u>Proposition (XII,2;1)</u> : <u>Un opérateur p-nucléaire à gauche d'un Banach E dans un Banach G est p-radonifiant.</u>

D'après la définition du §3 de l'exposé IX, u est p-nucléaire à gauche si et seulement si elle se factorise par

$$E \to l^\infty \overset{\alpha}{\to} l^p \to G,$$

où α est une application diagonale $(c_n)_{n\in\mathbf{N}} \to (\alpha_n c_n)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $\sum_{n\in\mathbf{N}} |\alpha_n|^p < +\infty$ pour $p < +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ pour $p = +\infty$ (en écrivant $u = \sum_n e'_n \otimes g_n$, $E \to l^\infty$ est définie par

$$e \to \left(< e, \frac{e'_n}{\|e'_n\|} >\right)_{n\in\mathbf{N}}, \quad l^p \to G$$

par $(c_n)_{n\in\mathbf{N}} \to \sum_{n\in\mathbf{N}} c_n g_n$, et $\alpha_n = \|e'_n\|$). Il suffit donc de montrer que $l^\infty \overset{\alpha}{\to} l^p$ est p-radonifiante. Or, étant p-nucléaire, elle est p-sommante (prop. 12 de l'exposé IX). Puis $(l^\infty, l^\infty)'$ a la propriété d'approximation métrique ; l^p est réflexif pour $1 < p < +\infty$, dual séparable de Banach pour $p = 1$, donc l'application est bien p-radonifiante pour $1 \le p < +\infty$. Pour $p = +\infty$, avec $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}} \in c^0$, on peut écrire $\alpha_n = \beta_n \gamma_n$, avec $(\beta_n)_{n\in\mathbf{N}} \in c^0$,

$(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}} \in c^o$; donc α se factorise par :

$$l^\infty \xrightarrow{\beta} \sigma(l^\infty, l^1) \xrightarrow{\gamma} \sigma(c^o, l^1),$$

donc elle est ∞-radonifiante de l^∞ dans $\sigma(c^o, l^1)$, donc dans c^o par Philipps.

En fait, on aurait pu, aussi pour $p = 1$, écrire $\alpha_n = \beta_n\gamma_n$, avec $(\beta_n)_{n\in\mathbf{N}} \in l^1$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}} \in c^o$, et utiliser le même raisonnement avec une factorisation

$$l^\infty \xrightarrow{\beta} \sigma((l^1)'', (l^1)') \xrightarrow{\gamma} \sigma(l^1, (l^1)') ,$$

donc α est 1-radonifiante de l^∞ dans $\sigma(l^1, l^\infty)$, donc dans l^1 par Philipps ; le fait que l^1 est dual séparable de Banach n'a pas à intervenir. On pourrait même n'utiliser Philipps nulle part : si λ est cylindrique de type p sur l^∞, $\beta(\lambda)$ est de Radon d'ordre p sur $\sigma((l^p)'', (l^p)')$, donc cylindriquement concentrée sur les boules de $(l^p)''$; mais γ envoie les boules de $(l^p)''$ sur des compacts de l^p, donc $\alpha(\lambda)$ est cylindriquement concentrée sur les compacts de l^p, donc de Radon d'ordre p sur l^p par Prokhorov ; et ceci vaut d'un coup pour tout $p \geq 1$).

On peut perfectionner, car α est même faiblement continue de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans l^p (dans c^o pour $p = +\infty$), on peut alors appliquer la remarque qui suit le théorème (XI,1;1), et comme l^1 a la propriété d'approximation métrique, <u>α est p-radonifiante de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans l^p, dans c^o pour $p = +\infty$</u>.

<u>Proposition (XII,2;2)</u> (complément à (XI,2;1) et (XII,1;1)).
<u>Soit u une application linéaire continue 1-sommante d'un Banach E dans un Banach G. Si E est réflexif, ou si son dual fort est séparable, alors u est 1-radonifiante de E dans G.</u>

<u>Démonstration</u> : Reprenons la factorisation :

$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & L^\infty & \longrightarrow & L^1 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & S & \longrightarrow & G \end{array}$$

L'application canonique $L^\infty \to L^1$ est intégrale ; alors, avec les hypothèses indiquées sur E, la composée $E \to (L^1)''$ est nucléaire (Grothendieck, thèse, chap. I, §4, corollaire du théorème 9, et théorème 10, page 132) ; donc elle est 1-radonifiante d'après la proposition précédente. Mais l'image de E est dans le sous-espace vectoriel fermé $S \subset L^1$ de $(L^1)''$, donc (bien que l'application $E \to S$ ne soit pas forcément nucléaire) elle est 1-radonifiante de E dans S (§5 de l'exposé XI), donc $u : E \to G$ l'est aussi.

<u>Remarque</u> : Si u est p-sommante, et si G est réflexif, u est p-radonifiante de E dans G pour $p \geq 1$, approximativement p-radonifiante de E dans G pour $0 < p < 1$, d'après (XI,2;1) et (XII,1;1). Si c'est E qui est réflexif, la présente proposition nous prouve que u est p-radonifiante de E dans G pour $p = 1$, et c'est vrai pour $1 < p < +\infty$ par (XI,2;1) et (XII,1;1), et pour $p = +\infty$ par le lemme du §1 (l'application identique de E est ∞-radonifiante) ; mais pour $p < 1$, il n'y a aucun autre résultat que celui du théorème (XI,1;1), u est approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$. Même remarque pour la condition relative à E, avec $p < +\infty$.

§ 3. <u>RECAPITULATION DES RESULTATS OBTENUS</u>

<u>Soit $u : E \to G$ p-sommante, E, G, Banach.</u>

1) <u>Si $p = +\infty$ (ce qui signifie simplement que u est continue), elle est p-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$, dans G si E ou G est réflexif</u> ;

2) <u>Si $1 < p < +\infty$, elle est p-radonifiante de E dans G</u> ;

3) <u>Si $p = 1$, elle est 1-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$, dans G si E ou G est réflexif, ou si G est dual séparable de Banach, ou si E est un Banach de dual fort séparable, ou si u est nucléaire</u> ;

4) <u>Si $p < 1$, elle est approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$; on peut remplacer $\sigma(G'',G')$ par G si G est réflexif ou dual séparable de Banach, et supprimer approximativement si le couple (E,E') a la propriété d'approximation métrique.</u>

§ 4. PASSAGE DE p à $q \geq p$

On sait que, si $u : E \to G$ est p-sommante, elle est q-sommante pour $q \geq p$ (prop. (VII,2;1)). On a donc un énoncé analogue pour les applications approximativement radonifiantes de E dans $\sigma(G'',G')$. Qu'en est-il si on veut remplacer G" par G, ou supprimer approximativement ?

Proposition (XII,4;1) :

1) Si u est approximativement p-radonifiante de E dans G, elle est approximativement q-radonifiante de E dans G pour $q \geq p$;

2) si u est p-radonifiante de E dans G, elle est aussi q-radonifiante de E dans G pour $q \geq p$.

Démonstration :

Nous ne pourrons démontrer 2) que plus tard ; montrons 1). Soit donc λ cylindrique de type q approximable sur E. Alors $u(\lambda)$ a une image de Radon d'ordre q sur $\sigma(G'',G')$. Mais λ est a fortiori de type p approximable, donc $u(\lambda)$ est déjà de Radon (et d'ordre p) sur G. Mais dire qu'une probabilité de Radon $\nu = u(\lambda)$ sur G a une image $\bar{\nu}$ d'ordre q dans $\sigma(G'',G')$, cela veut exactement dire qu'elle est déjà d'ordre q sur G (car, pour q fini par exemple,

$$\int_{G''} \|x''\|^q \, d\bar{\nu}(x'') = \int_G \|x\|^q \, d\nu(x))$$

Remarque : Si u est p-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$, j'ignore si elle est q-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$ pour $q \geq p$.

§ 5. QUELQUES PROBLEMES OUVERTS

1) Peut-on supprimer toutes les hypothèses d'approximation ? Même dans des cas particuliers comme la remarque suit (XII,4;1), je l'ignore.

2) Pour tout $p_0 \geq 1$, on connaît des applications qui sont p-radonifiante pour $p > 1$ et ne le sont pas pour $p < 1$ (elles peuvent l'être ou ne pas

l'être pour $p = p_0$). Rien de tel n'est connu pour $p_0 < 1$: si une application est p-radonifiante pour un $p < 1$, dans tous les cas connus, elle l'est pour tout $p > 0$ (et même pour $p = 0$, suivant ce qui sera vu plus tard). Avec des quasi-Banach au lieu de Banach on a, au contraire, des exemples de coupure pour tout $p_0 > 0$.

3) Soit u approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$; si $p \geq 1$, elle est toujours, pour $q > p$, approximativement q-radonifiante de E dans G lui-même. (Car, pour q fini ≥ 1, c'est automatiquement vrai, donc pour q infini d'après 1) de (XII,4;1)). Ceci subsiste-t-il pour $p < 1$? Toute application approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$ est-elle approximativement q-radonifiante de E dans G pour tout $q > 0$? Dans tous les exemples connus une application approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$ l'est en fait de E dans G lui-même.

4) Dans tous les cas connus, une application 1-radonifiante de E dans G réflexif est 0-radonifiante. Est-ce un théorème ?