

STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

ALI GANNOUN

Prédiction non paramétrique : médianogramme et méthode du noyau en estimation de la médiane conditionnelle

Statistique et analyse des données, tome 16, n° 1 (1991), p. 23-42

http://www.numdam.org/item?id=SAD_1991__16_1_23_0

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**PREDICTION NON PARAMETRIQUE : MEDIANOGRAMME ET
METHODE DU NOYAU EN ESTIMATION DE LA MEDIANE
CONDITIONNELLE**

Ali GANNOUN

Laboratoire de Probabilités et Statistique
Département des Sciences Mathématiques
UNIVERSITE MONTPELLIER II
Place Eugène Bataillon
34095 MONTPELLIER CEDEX 5
(FRANCE)

Résumé : A partir de l'estimation non paramétrique de la médiane conditionnelle par les méthodes du médianogramme et du noyau, nous construisons deux prédicteurs non paramétriques pour des observations α -mélangeantes. Ces prédicteurs sont utilisés pour faire de la prévision à différents horizons sur des séries réelles et simulées. La performance de ces prédicteurs est comparée à celle des prédicteurs basés sur l'estimation de l'espérance conditionnelle et sur les méthodes paramétriques de BOX et JENKINS.

Mots Clés : médiane conditionnelle, prédicteurs non paramétriques, médianogramme, méthode du noyau.

Abstract : In order to establish two nonparametric predictors for α -mixing process, we use nonparametric conditional median estimation by medianogram and kernel method. Previsions at various horizons are performed by using these two predictors. Comparison between parametric and nonparametric predictors is given.

Keywords : conditional median, nonparametric predictors, medianogram, kernel method.

I. INTRODUCTION

Soit $(Z_i, i \in \mathbb{N})$ un processus dont l'espace d'états est une partie mesurable \mathcal{E} de \mathbb{R} . Ce processus est assujéti à des conditions très générales que vérifient, par exemple, des processus géométriquement mélangeants (paragraphe II, remarque).

On considère le problème de la prédiction de Z_{N+1} à partir de la suite $\{Z_i, i = 1, \dots, N\}$.

BOX et JENKINS (1970) ont proposé une démarche générale de prévision pour une série univariée ; cette démarche, de type paramétrique, est fondée sur la notion de processus ARIMA :

On suppose que le processus $(Z_i, i \in \mathbb{N})$ vérifie une équation du type

$$\phi(L) \Delta^d Z_i = \theta^* + \Theta(L) \varepsilon_i,$$

où : ϕ (resp. Θ) est un polynôme de degré p (resp. q), L est l'opérateur de retard ($LZ_i = Z_{i-1}$), Δ est l'opérateur différence ($\Delta Z_i = Z_i - Z_{i-1}$), d est le degré de différentiation, ε_i est un bruit blanc centré et θ^* est une constante.

La prévision théorique d'une valeur future Z_{N+1} est donnée par la régression linéaire affine de Z_{N+1} sur les valeurs passées.

Des détails sur cette méthode se trouvent notamment dans le récent livre de GOURIEROUX et MONFFORT (1990).

La plupart des prédicteurs non paramétriques sont basés sur des estimateurs non paramétriques de l'espérance conditionnelle $E(Z_{N+1} | Z_N, \dots, Z_1)$. Citons par exemple les travaux de COLLOMB (1984), (1985 a), et (1985 b), COLLOMB et HARDLE (1986), VIEU (1987), SARDA (1988), ROUSSAS (1988), BOSQ (1988), (1989) et (1990) et HARDLE (1990).

Nous avons proposé, GANNOUN (1989), (1990 a) et (1990 b), une nouvelle approche de ces prédicteurs par l'estimation non paramétrique de la médiane conditionnelle (m.c.) :

A partir du processus $\{Z_i, i = 1, \dots, N\}$ stationnaire et k -Markovien, on cherche à "estimer" $\mu(Z_N, \dots, Z_{N-k+1})$ où μ est la fonction définie sur \mathcal{C}^k par :

$$\mu(z_1, \dots, z_k) = \inf\{y | F(y | z_1, \dots, z_k) \geq 1/2\},$$

$F(y | z_1, \dots, z_k)$ représentant la valeur en y de la fonction de répartition de la loi conditionnelle (f. r. c.) de Z_{N+1} sachant que (Z_N, \dots, Z_{N-k+1}) vaut (z_1, \dots, z_k) (on suppose l'existence d'une version régulière de la loi), $\mu(z_1, \dots, z_k)$ est donc égale à la médiane de cette loi conditionnelle et, compte-tenu du caractère Markovien du processus $(Z_i, i \in \mathbb{N})$,

$\mu(Z_n, \dots, Z_{N-k+1})$ représente en fait la variable T qui minimise $E(|Z_{N+1} - T|)$ parmi toutes les variables T intégrables qui soient (Z_1, \dots, Z_N) mesurables.

Nous étudierons deux prédicteurs de Z_{N+1} , s'écrivant $\mu_n(Z_N, \dots, Z_{N-k+1})$ où μ_n est un estimateur non paramétrique de μ (méthodes du médianogramme et du noyau).

Pour $N > k$, posons

$$(1) \quad X_i = (Z_i, \dots, Z_{i+k-1}) \quad Y_i = Z_{i+k} \text{ et } n = N - k + 1$$

Un prédicteur de Y_n est alors donné par la v.a.r. $\mu_n(X_n)$.

Nous avons étudié ces estimateurs et nous avons démontré leur convergence uniforme presque complète vers la médiane conditionnelle théorique dans nos travaux cités ci-dessus.

Les prédicteurs seront étudiés ainsi que leur convergence dans les paragraphes III et IV.

Les simulations sont proposées dans le paragraphe V.

Grâce au calcul de deux types d'erreurs, nous comparons la méthode de prévision par la médiane conditionnelle à celle basée sur l'estimation de l'espérance conditionnelle et à la méthode paramétrique de BOX et JENKINS. Ces résultats sont présentés dans le paragraphe VI.

Pour améliorer la prévision, nous proposons, dans la conclusion, un moyen de réduire "le décalage" entre séries réelles et séries obtenues par estimation.

II. HYPOTHESES GENERALES.

$(Z_i, i \in \mathbb{N})$ est un processus stationnaire, α -mélangeant (cf. DOUKHAN, LEON et PORTAL (1984), BRADLEY (1986) et DOUKHAN et PORTAL (1988)) et k -Markovien à valeurs dans \mathbb{R} .

Soit $h(n)$ une suite positive de limite nulle qui vérifie conjointement avec le coefficient de mélangeance $\alpha(n)$

$$(H1) \quad nh^k(n) / \beta(n) \text{ Log } n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty.$$

$\beta(n)$ étant une suite entière croissante de limite infinie vérifiant :

$$(H2) \quad \alpha(\beta(n)) \stackrel{2\beta(n)}{3n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Soit \mathcal{C}^k un compact de \mathbb{R}^k , on suppose que

$$(H3) \quad \mu \text{ est unique et vérifie l'hypothèse d'unicité uniforme}$$

(cf. COLLOMB-HARDLE-HASSANI (1987)) :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0, \forall t : \mathcal{C}^k \rightarrow \mathbb{R},$

$$\sup_{x \in \mathcal{C}^k} |\mu(x) - t(x)| \geq \varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in \mathcal{C}^k} |F(\mu(x) | x) - F(t(x) | x)| \geq \lambda$$

(H4) $F(y | \cdot)$ est lipschitzienne sur \mathcal{C}^k en x uniformément par rapport à y .

Remarque :

Soit $(Z_i, i \in \mathbb{N})$ un processus géométriquement mélangeant ($\alpha(n) = a\rho^n, a > 0, 0 < \rho < 1$), les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées en choisissant $\beta(n) = \beta^* n^{(1+\tau)/2}$ ($1 \leq \beta^* < 2, \frac{1}{2} < \tau < 1$) et $h(n) = \mathcal{O} \left(\left[\frac{n^\gamma \text{Log } n}{n^{(1-\tau)/2}} \right]^{1/k} \right), \gamma \in]0, (1-\tau)/2[.$

III. PREDICTEUR EMPIRIQUE : MEDIANOGRAMME.

La définition du médianogramme est à rapprocher de celle de l'histogramme et du régressogramme notamment étudiés par TUKEY (1961), BOSQ (1970), GEFFROY (1976) et BOSQ et LECOUTRE (1987). La partition proposée ci-dessous est due à COLLOMB (1978) :

Soit $\mathcal{P}_n = \{J_{n,m}, m \in \mathbb{Z}^k\}$ le pavage de \mathcal{C}^k défini par

$$m = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}^k, J_{n,m} = \prod_{p=1}^k [m_p h(n), (m_p + 1)h(n)]$$

(Dans la pratique, pour $X_n = (Z_{N-k+1}, \dots, Z_{N-k+p}, \dots, Z_N)$, on choisira $m_p = \text{Pe}(Z_{N+k+p}/h(n)), \text{Pe} = \text{Partie entière}$).

Pour tout X de \mathcal{C} , on désigne par $J_n(X)$ le pavé de \mathcal{P}_n qui contient X .

Un estimateur de la f.r.c. $F_n(.|x)$ de Y_n sachant que $(X_n = x)$ est défini par la moyenen des $1_{\{Y_i \leq y\}}$, $i = 1, \dots, n$, tels que X_i appartiennent à l'élément $J_n(x)$ de \mathcal{P}_n et vaut 0 si aucun des X_i n'appartient à ce pavé. La valeur de $F_n(.|x)$ vaut donc, au point y :

$$F_n(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1_n(x)} \sum_{i=1}^n 1_{\{Y_i \leq y\}} 1_{\{X_i \in J_n(x)\}} & \text{si } 1_n(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $1_n(x) = \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \in J_n(x)\}}$.

$\mu_n(x)$ estimateur de $\mu(x)$, sera alors défini comme une médiane de la fonction de répartition $F_n(.|x)$, et le prédicteur \hat{Z}_{N+1} de Z_{N+1} comme $\mu_n(X_n)$.

Dès lors si $q(n) = 1_n(X_n)$ et que $Z_{J_1}, Z_{J_2}, \dots, Z_{J_{q(n)}}$ sont les valeurs des variables Y_i tels que $X_i \in J_n(X_n)$, $Z_{(J_1)} \leq Z_{(J_2)} \leq \dots \leq Z_{(J_{q(n)})}$, ces mêmes valeurs ordonnées, on aura :

$$\hat{Z}_{N+1} = \mu_n(X_n) = \begin{cases} Z_{(Pe(Jq(n)/2)+1)} & \text{si } q(n) \text{ est impair} \\ (Z_{(Jq(n)/2)} + Z_{((Jq(n)/2)+1)})/2 & \text{si } q(n) \text{ est pair.} \end{cases}$$

On pose $J_n(X_n) = J_n$ et on suppose que :

(M1) La fonction de répartition $F(.,.)$ de (X_i, Y_i) est absolument continue et sa densité est bornée et lipschitzienne sur $J_n \times \mathbb{R}$.

(M2) La fonction de répartition conditionnelle $F(.|x)$ est absolument continue.

(M3) La loi des variables X_i est une loi continue par rapport à la mesure de Lebesgue dont la densité est lipschitzienne et strictement minorée sur \mathcal{C}^k .

On a alors :

THEOREME 1 :

Sous (M1), (M2), (M3), (H1), (H2), (H3) et (H4), on a :

$$\boxed{| \hat{Z}_{N+1} - \mu(X_n) | 1_{\{X_n \in \mathcal{C}^k\}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0 .}$$

Démonstration : (Idée)

La condition de α -mélangeance sur $(Z_i, i \in \mathbb{N})$ implique que le processus $((X_i, Y_i), i \in \mathbb{N})$, défini en (1), l'est aussi.

Les conditions (M1), (M2), (M3), (H1), (H2) et (H4) permettent de démontrer que

$$\sup_{x \in \mathcal{C}^k} \sup_{y \in \mathbb{R}} |F_n(y | x) - F(y | x)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.co.}} 0.$$

En utilisant ce résultat et l'hypothèse d'unicité uniforme de la médiane conditionnelle (H3), on obtient

$$\sup_{x \in \mathcal{C}^k} |\mu_n(x) - \mu(x)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.co.}} 0.$$

La démonstration du théorème s'obtient en remarquant que

$$|\hat{Z}_{N+1} - \mu(X_n)| 1_{\{X_n \in \mathcal{C}^k\}} \leq \sup_{x \in \mathcal{C}^k} |\mu_n(x) - \mu(x)|.$$

Remarque :

La démonstration explicite de ce théorème se trouve dans notre thèse (1989).

IV. PREDICTEUR A NOYAU :

Soit K un noyau de \mathbb{R}^k (cf. ROSENBLAT (1956) vérifiant :

(N1) $0 < K(\cdot) < K1$ et $\int K(x) d(x) = 1$, $K1$ est une constante positive. On suppose qu'il existe une fonction $F(y | \cdot)$ définie sur \mathcal{C}^k telle que :

$$(N2) \quad F(y | X_i) = E(1_{\{Y_i \leq y\}} | X_i)$$

On considère l'estimateur non paramétrique $\hat{F}_n(y | \cdot)$ de $F(y | \cdot)$, défini pour tout $t \in \mathcal{C}^k$, par :

$$\hat{F}_n(y | t) = \frac{\sum_{i=1}^n 1_{\{Y_i \leq y\}} K((t - X_i) / h(n))}{\sum_{i=1}^n K((t - X_i) / h(n))}$$

et l'estimateur :

$$Z_{N+1}^* = \hat{\mu}_n(X_n) = \inf\{y \text{ tel que } \hat{F}_n(y | X_n) \geq 1/2\}.$$

h_n est une suite réelle strictement positive de limite nulle. On suppose que la loi marginale de X_i vérifie avec la mesure (λ) de Lebesgue :

$$N3 \left\{ \begin{array}{l} \exists 0 < \Gamma < \infty : P(X_i \in B) \leq \Gamma \lambda(B), \forall i \in \mathbb{N}, \forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^k} \\ \exists 0 < \gamma < \infty : P(X_i \in B) \leq \gamma \lambda(B), \forall i \in \mathbb{N}, \forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{C}^k} \end{array} \right.$$

THEOREME 2 :

Sous (N1), (N2), (N3), (H1), (H2), (H3) et (H4), on a :

$$\boxed{|Z_{N+1}^* - \mu(X_n)| \underset{\{X_n \in \mathbb{C}^k\}}{1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 0.}$$

La démonstration est similaire à celle du théorème 1.

V. APPLICATION NUMERIQUE :

Nous disposons de deux types de séries (Tableau 1) : séries réelles, séries simulées.

Ces séries ont été utilisées par CARBON et DELECROIX (1990) pour comparer deux méthodes de prévision : l'une, paramétrique du type BOX et JENKINS est basée sur des modèles ARIMA et l'autre, non paramétrique est basée sur l'estimation de l'espérance conditionnelle.

Tableau 1

N° de série	TYPE	TITRE ou MODELE	Nbre OBS.,N	HORIZ. de PREV.
1	Réelle	PROCESSUS CHIMIQUE DE CONCENTRATION	187	10
2	Réelle	PROCESSUS CHIMIQUE	70	5
3	Simulée	$Z(t) = 0.9Z(t-1) + E(t)$, $E(t) \sim U[-49,49]$	100	5
4	Simulée	$Z(t) = 0.2Z(t-1) + Z(t-2) - 0.3Z(t-3) + E(t)$	100	5
5	Simulée	$Z(t) = 3000 \sin(\pi/15)t + E(t)$, $E(t) \sim \exp(1/300)$	200	5
6	Simulée	$Z(t) = 0.8Z(t-1) + 1000 + E(t)$	100	5
7	Simulée	$Z(t) = 0.8Z(t-1) + E(t) + 0.2E(t-1) + 1000$	100	5
8	Simulée	$E(t) \sim N(0,1)$ $Z(t) = E(t) - 2.848E(t-1) + 2.6885E(t-2) -$ $1.64645E(t-3) + 2.972E(t-4) -$ $2.1492E(t-5) + 0.67716E(t-6)$	100	5
9	Simulée	$Z(t) = 1000 + Z(t-1) + 0.2Z(t-2) + E(t)$	100	5
10	Simulée	$Z(t) = 0.9Z(t-1) + 1000 + E(t)$	100	5
11	Simulée	$Z(t) = 0.99Z(t-1) + 1000 + E(t)$	100	5
12	Réelle	MARGE BENEFICIAIRE	80	5
13	Réelle	CONSOMMATION DE CIGARES	96	6
14	Réelle	CHANGE IN BUSINESS INVENTORIES	60	10
15	Réelle	PRODUCTION DE CHARBON	90	10

SOURCE : PANKRATZ (1983) pour les séries réelles et KENDALL and STUART (1976) pour les séries simulées).

Choix des paramètres :

(*) Le choix de la "fenêtre" $h(n)$ est primordial. Pour nos simulations nous l'avons choisie de la façon suivante :

$$h(n) = S_n n^{-(1/k+1)}, S_n \text{ étant l'écart type empirique.}$$

Ce choix paraît le plus raisonnable pour l'estimation non paramétrique de la densité et limite l'influence du noyau sur les résultats (DEHEUVELS (1977) et DEVROYE and WAGNER (1977)).

Remarques :

Dans le cas de la régression non paramétrique, HARDLE et KELLY (1987) ont proposé un autre choix de h basé sur la minimisation de l'erreur quadratique intégrée (E.Q.I.),

$$E.Q.I.(n,h) = \int ((m_{nh}(x) - m(x))^2 f^2(x) dx,$$

$m(x)$ étant $E(Y|X = x)$ et $m_{nh}(x)$ son estimateur par la méthode du noyau, f est la densité marginale de X . Ce choix limite la variance de l'estimateur et réduit le biais.

(**) Le noyau choisi est gaussien, c'est-à-dire :

$$K(x_1, x_2, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^k ((2\pi)^{-1/2} \cdot \exp(-x_i^2 / 2)).$$

(**) Après différenciation, nous supposons que les processus traités sont strictement stationnaires et qu'on peut les approcher par des processus markoviens d'ordre k . Nous utiliserons plusieurs valeurs arbitraires de k allant de 1 à 40.

Pour réaliser les prévisions à l'horizon s , $s > 1$, on effectue des prévisions successives à l'horizon 1 en intégrant à chaque fois la valeur trouvée dans la série.

Remarques :

1) En minimisant l'erreur quadratique moyenne, CARBON et DELECROIX (1990) ont proposé un choix optimal (empirique) de k pour le prédicteur basé sur l'estimation de l'espérance conditionnelle.

2) Au contraire des méthodes de BOX et JENKINS, on peut réaliser des prévisions à l'horizon s ($s > 1$) sans faire des prévisions successives à l'horizon 1. Pour cela, il suffit de poser

$$X_i = (Z_i, \dots, Z_{i+k-1}), Y_i = Z_{i+k+s-1} \text{ et } n = N - (k+s) + 1.$$

INDICATIONS POUR LA LECTURE DES GRAPHIQUES :

Les graphiques qui vont suivre comportent chacun deux courbes : l'une représente la série initiale et l'autre la série obtenue par "prévision".

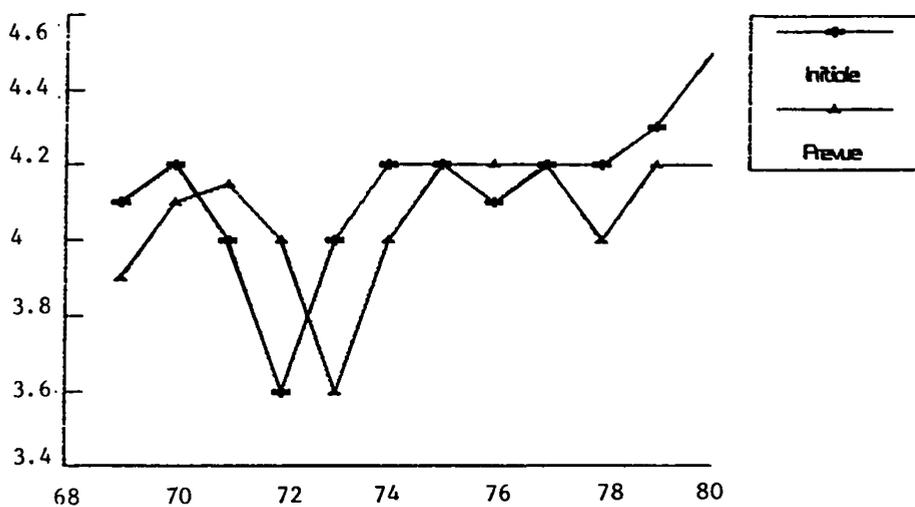
Pour une meilleure lecture de ces graphiques, nous n'avons représenté que les dernières observations des séries ainsi que les valeurs prévues correspondantes.

L'axe horizontal est le support des instants i alors que l'axe vertical représente les valeurs initiales et les valeurs prévues des séries. Enfin tous ces graphiques sont obtenus par le logiciel QUATTRO.

QUELQUES RESULTATS DE SIMULATION :

Série 12, $K = 4$

Médianogramme



Méthode du Noyau

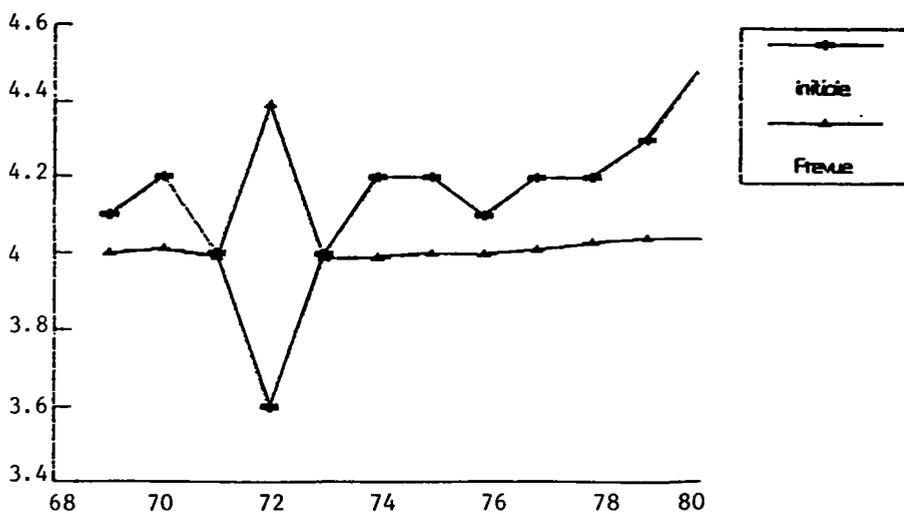
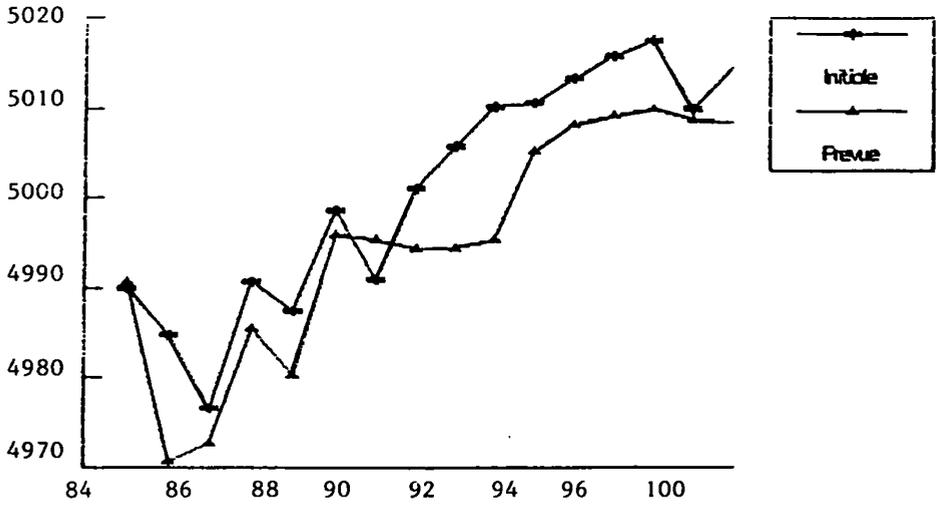


Figure 1

Série 7, K = 30

Medianogramme



Méthode du Noyau

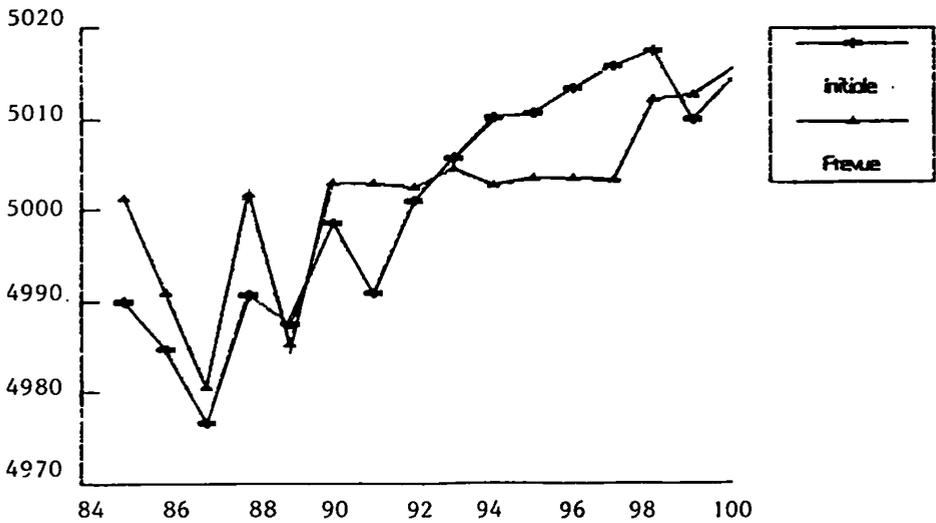


Figure 2

Série 1, K = 3

Médianogramme



Méthode du Noyau

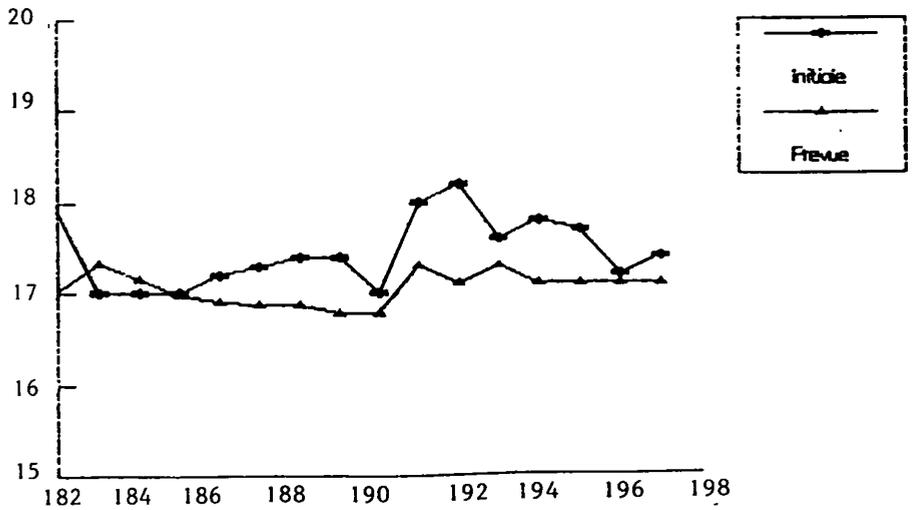


Figure 3

VI. COMPARAISON DES METHODES DE PREVISION :

Pour la comparaison des différentes méthodes de prévision, nous nous référons à l'article de CARBON et DELECROIX (1990) et nous utilisons les mêmes séries pour conclure sur la performance de l'une ou l'autre des méthodes.

Nous complétons les comparaisons faites entre les méthodes de prévision de BOX-JENKINS et de l'espérance conditionnelle, par la comparaison de ces méthodes à celle faisant l'objet de ce travail.

Nous adoptons les mêmes critères de comparaison que ceux utilisés dans l'article cité ci-dessus : il s'agit de déterminer pour chaque méthode, l'erreur relative moyenne observée (ERMOOB) et l'erreur relative moyenne de prévision (ERMOPR).

Ces deux erreurs ne variant pas de la même façon, nous avons pris comme troisième critère la moyenne de ces deux erreurs (MOY).

(*) Erreur moyenne relative observée :

T désigne le nombre de prévisions, \hat{Z}_j désigne la prévision de Z_j par l'une des méthodes :

$$\text{ERMOOB} = \frac{1}{T} \sum_{N-T+1}^N \{ |Z_j - \hat{Z}_j| / |Z_j| \}$$

(**) Erreur moyenne relative de prévision :

Posons

$$e_j = |Z_j - \hat{Z}_j|$$

Soit N_j le nombre de e_i tels que $e_i \geq e_j$, $i = k+1, \dots, N$. On note \hat{q}_j le 0.95-quantile empirique basé sur e_j c'est-à-dire \hat{q}_j est le plus petit nombre e_j qui vérifie :

$$(N_j / (N - 2j - k)) \leq 0,05$$

$(Z_i, i \in \mathbb{N})$ étant un processus stationnaire, \hat{q}_N est un estimateur naturel de q_N tel que :

$$P(|Z_N - \hat{Z}_N| \leq q_N) = 0.95$$

$$\text{ERMOPR} = \frac{1}{T} \sum_{N-T+1}^N \hat{q}_j / |Z_j|$$

(***) Moyenne des erreurs :

$$\text{MOY} = (\text{ERMOOB} + \text{ERMOPR}) / 2$$

Indication :

(1) = ERMOOB , (2) = ERMOPR , (3) = MOY

Les résultats du tableau 2 sont exprimés en %.

Tableau 2

S E R i E	T P R E V	k	METHODES NON PARAMETRIQUES						METHODE PARAMETRIQUE				
			Médiane Condit.			Espérance Condit.			MODELE ARIMA				
			(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	p,d,q	(1)	(2)	(3)	
1	10	2	1.96	2.42	2.19	2.72	3.82	3.305	0,1 , 1	1.85	4.17	3.01	
2	5	5	35.78	16.49	26.13	17.88	44.38	31.13	0,0 , 2	25.7	43.02	34.36	
3	5	10	72.28	342.1	207.2	63.49	46.68	55.08	1,0 , 0	41.84	286.1	163.9	
4	5	1	67.36	356.0	211.6	44.45	66.3	55.37	1,0 , 0	52.87	197.1	125.0	
5	5	30	136	551.7	343.8	9.82	29.5	19.66	2,1 , 1	25.08	40.7	32.89	
6	5	5	5.69	6.12	5.905	2.55	6.55	4.55	1,0 , 0	1.6	11.00	6.30	
7	5	30	0.105	0.178	0.14	0.074	0.186	0.13	1,0 , 1	0.12	0.29	0.20	
8	5	2	3.18	2.30	2.74	2.77	5.16	4.03	0,0 , 7	2.77	5.304	4.037	
9	5	1	0.085	0.057	0.063	0.015	0.074	0.044	2,0 , 0	0.012	0.138	0.075	
10	5	19	0.076	0.05	0.06	0.062	0.126	0.094	1,0 , 0	0.089	0.136	0.112	
11	5	20	0.325	0.294	0.309	0.58	0.02	0.039	0,1 , 2	0.013	0.022	0.017	
12	5	24	2.286	4.761	3.523	1.17	9.19	5.18	2,1 , 4	4.85	21.1	14.47	
13	6	24	34.28	22.84	28.56	7.83	24.63	14.43	2,1 , 0	8.758	23.1	15.92	
14	10	10	26.47	21.37	23.92	32.78	59/36	46.07	2,0 , 0	36.62	156.5	96.56	
15	10	25	4.59	11.05	7.82	6.41	13.09	7,75	1,0 , 3	3.11	24.06	13.58	

CONSTATATIONS :

Au sens de la moyenne des erreurs (MOY), nous avons constaté que sur les 15 séries traitées, les méthodes non paramétriques sont nettement plus avantageuses. D'autre part, la médiane conditionnelle est aussi performante que l'espérance conditionnelle. Ceci est résumé dans le tableau 3 :

Tableau 3

NON PARAMETRIQUE		PARAMETRIQUE
ESP. CONDITION.	MED. CONDITION.	ARIMA
7	7	1
14		1

Les tableaux 4 et 5 permettent de comparer la méthode de prévision basée sur l'estimation de la médiane conditionnelle à celle basée sur l'estimation de l'espérance conditionnelle et à celle utilisant des modèles ARIMA.

Tableau 4

	MEDIANE	ESPERANCE
ERMOOB.	11	4
ERMOPR.	4	11

Tableau 5

	MEDIANE	ARIMA
ERMOOB.	6	9
ERMOPR.	11	4

VII. CONCLUSION :

La prévision non paramétrique basée sur l'estimation de la médiane conditionnelle confirme que les méthodes non paramétriques sont concurrentielles à la méthode de BOX-JENKINS, elles présentent même une certaine supériorité dans le cas présent.

Cette méthode est robuste (HARDLE and LUCKHAUS (1984)), elle est facile à programmer et ne nécessite aucun travail de désaisonnalisation sur le processus observé.

Cependant, nous avons remarqué que la médiane conditionnelle tend à "aplatir" la série (figs 1, 2, 3) ce qui nous fait perdre des informations concernant des "pics" éventuels dont l'intérêt n'est nullement négligable. Ceci provient du fait que la médiane est moins sensible que la moyenne aux points aberrants.

Nous pensons qu'en conjuguant la méthode de prévision par la médiane conditionnelle et celle par l'espérance conditionnelle, nous pouvons avoir de meilleures prévisions :

Dans un premier temps, on utilise l'espérance conditionnelle pour détecter les pics puis la médiane conditionnelle pour les autres prévisions.

Nous avons aussi constaté, (fig. 1, médianogramme), un décalage entre la série réelle et la série obtenue par prévision.

Cette dernière réagit avec un certain retard (unitaire) aux évolutions de la série réelle, des simulations pour des prévisions à l'horizon s , $s > 1$, font apparaître un décalage d'ordre s . Ce résultat reste cependant à vérifier.

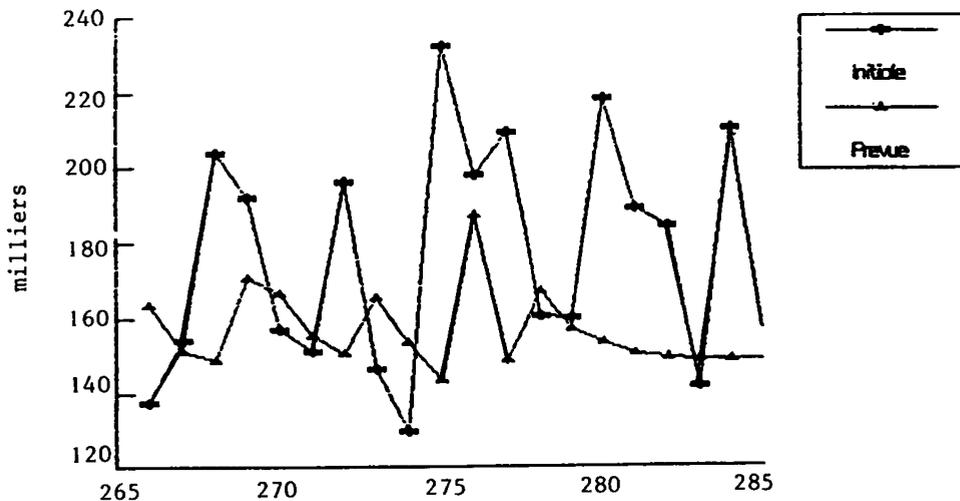
Ce décalage apparaît aussi dans les autres méthodes de prévision.

Nous pensons qu'en adoptant la démarche suivante nous pouvons le réduire : Pour une prévision à l'horizon s (par des prévisions successives à l'horizon 1), nous prévoyons l'horizon $s + 1$ et nous l'affectons à s , la figure 4 (série : immatriculation de voitures en France, 285 données mensuelles) illustre cette démarche.

Des recherches théoriques dans cette direction permettront de confirmer (ou d'infirmar) ce résultat.

Immatriculation de voitures

Prévision non corrigée



Prévision corrigée

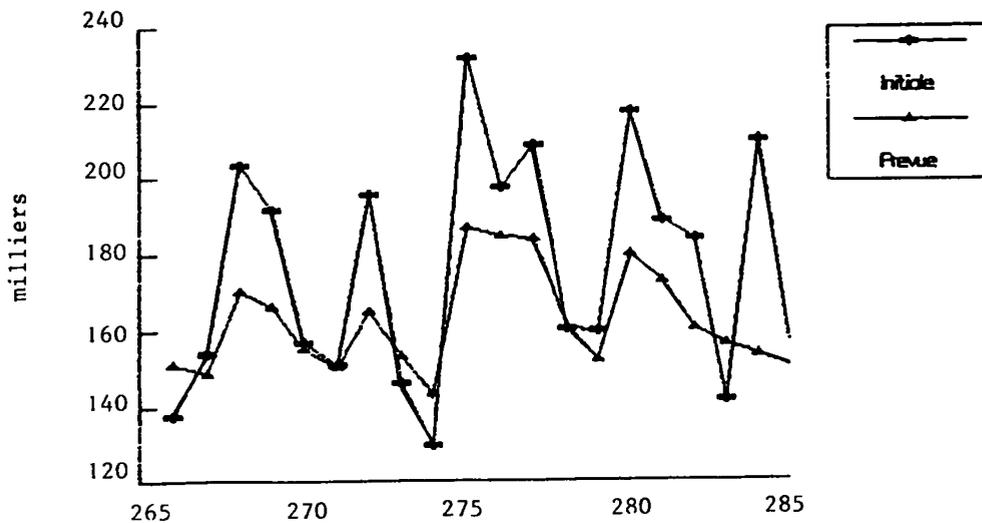


Figure 4

Remerciement : Je remercie Monsieur le Professeur Denis BOSQ pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour ses critiques.

Je remercie messieurs les rapporteurs pour leurs nombreuses remarques et suggestions.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

- BOSQ D. (1970) - Contribution à l'estimation fonctionnelle. *Pub. Inst. Stat. Univ. Paris*, 19, fasc. I et II.
- BOSQ D., LECOUTRE J. P. (1987) - Théorie de l'estimation fonctionnelle. *Economica*.
- BOSQ D. (1988) - Prévission non paramétrique d'un processus stationnaire non borné. *Pub. Lab. Stat. Théo.*, N° 81.
- BOSQ D. (1989) - Estimation et prévission non paramétrique d'un processus stationnaire. *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 308, Série I, 453-456.
- BOSQ D. (1990) - Nonparametric prediction for unbounded almost stationary processes. *The functional estimation and related field*. (à paraître).
- BOX G., JENKINS G. (1970) - Time series analysis : forecasting and control, *Holden-Day*.
- BRADLEY R. (1986) - Dependence in probability and statistics. *Eberlin Tassu*, 165-192.
- CARBON M., DELECROIX M. (1990) - Nonparametric forecasting in time series. *Appl. Stoc. Mod. and Data. Anal.* (à paraître).
- COLLOMB G. (1978) - Estimation non paramétrique de la régression : régressogramme et méthode du noyau. *Publication interne du laboratoire de statistique de l'Université Paul Sabatier*, N° 7.
- COLLOMB G. (1984) - Propriétés de convergence presque complète du prédicteur à noyau. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* 66, 441-460.
- COLLOMB G. (1985 a) - Nonparametric time series analysis and prediction : uniform almost sure convergence of the window and K-NM autoregression estimates. *Statistics*, 16, n°2, 297-307.
- COLLOMB G., HARDLE W. (1986) - Strong uniform convergence rates in robust nonparametric time series analysis and prediction : kernel regression estimation from dependent observations. *Stochastic Process. Appl.*, 23, 77-89. North Holland.
- COLLOMB G., HARDLE W., HASSANI S. (1987) - A note on prediction via estimation of the conditional mode function. *J. of Statist. Plan and Inf.*, 15, 227-236.

- DEHEUVELS P. (1977) - Estimation non paramétrique de la densité par histogramme généralisé. *Rev. Stat. Appliquée* 35 F 42.
- DEVROYE L., WAGNER J.T. (1977) - The strong uniform consistency of nearest neighbour density estimates. *Ann. Stat.*, 5, N° 3, 536-540.
- DOUKHAN P., LEON J., PORTAL F. (1984) - Vitesse de convergence dans le théorème central limite pour des variables aléatoires mélangeantes. *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 298, Série I, 305-308.
- DOUKHAN P., PORTAL M. (1988) - Preprint *Université de Paris Sud Orsay*.
- GANNOUN A. (1989) - Estimation non paramétrique de la médiane conditionnelle. Thèse d'Université, Université Paris VI.
- GANNOUN A. (1990 a) - Estimation non paramétrique de la médiane conditionnelle. Médiagramme et méthode du noyau. Application à la prévision des processus. *Pub. Inst. Stat. Univer. Paris XXXV*, fasc. 1, 11-22.
- GEFFROY J. (1975) - Etude de la convergence du régressogramme. Séminaire ISUP.
- GOURIEROUX C., MONFORT A. (1990) - Séries temporelles et modèles dynamiques. *Economica*.
- HARDLE W., LUCKHAUS S. (1984) - Uniform consistency of class of regression function estimators. *Ann of Stat.*, 12, 612-623.
- HARDLE W., KELLY G. (1987) - Nonparametric kernel regression estimation - Optimal choice of bandwidth. *Statistics*, 18, n° 1, 21-35.
- HARDLE W. (1990) - Applied nonparametric regression. *Cambridge Univ. Press*. To appear.
- KENDALL G., STUART A. (1968) - The advanced theory of statistics. Vol. 3, *Griffin*.
- PANKRATZ A. (1983) - Forecasting with univariate BOX-JENKINS models concepts and cases.
- ROSENBLATT M. (1956) - Remarks on some nonparametric estimates of density function. *A.M.S.*, 41, 1347-1348.
- ROUSSAS G. (1988) - Nonparametric estimation in mixing sequences of random variables. *J. of Statist. Plan and Inf.*, 18, 135-149.
- SARDA P. (1988) - Thèse d'Université Paul-Sabatier, Toulouse.
- TUKEY J.W. (1961) - Curves as parameters, and touch estimation. Proc. 4 th symp. *Math. Stat. Prob.*, 681-694.
- VIEU P. (1987) - Thèse d'Université, Université Paul Sabatier, Toulouse.