

STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

MICHEL MAURIN

Sur les qualités des métriques en ACP

Statistique et analyse des données, tome 12, n° 3 (1987), p. 58-74

http://www.numdam.org/item?id=SAD_1987__12_3_58_0

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES QUALITES DES METRIQUES EN ACP.

Michel MAURIN

Institut National de Recherche sur les Transports et leur Sécurité (INRETS),
Laboratoire Energie Nuisances (LEN), case 24, 69675 BRON CEDEX

Résumé: En ACP la métrique Q est un élément essentiel du triplet (X, Q, D) . Nous nous interrogeons sur les qualités qu'elle est susceptible de posséder. En premier une règle de transformation "tensorielle" qui tient compte des soucis d'homogénéité dimensionnelle lorsque les variables sont des grandeurs physiques, ensuite une loi de composition algébrique si l'on considère que le tableau des données X provient d'une juxtaposition de plusieurs sous-tableaux X_h (mêmes variables sur des individus différents). Les métriques usuelles sont examinées sous cet aspect.

Abstract: We wonder about some qualities metrics in Principal component analysis should possess. First a tensorial transformation rule which takes account of dimensionnal cares, and also an algebraic concatenation rule when table-data X comes from a juxtaposition of sub-tables X_h (same variables for different individuals). We examine usual metrics under these considerations.

Mots clefs: Analyse en composantes principales, métriques, homogénéité dimensionnelle, agrégation de métriques.

Indices de classification STMA 06-070

INTRODUCTION.

Nous considérons l'Analyse en Composantes Principales classique du triplet (X, Q, D) . Les résultats auxquels conduit l'ACP sont, pensons-nous, d'autant plus crédibles que se manifeste un souci d'adéquation raisonnable entre les données X et les traitements mathématiques qui leurs sont appliqués. Ces soucis peuvent notamment être traduits en termes des qualités que les

Manuscrit reçu le 15 novembre 1986

Révisé le 15 septembre 1987

métriques Q peuvent présenter. Alors que le choix d'une métrique est un acte important reconnu par tous [Bouroche Saporta, Fenelon, Lebart Morineau Tabard, ...], les considérations sur les métriques et leurs qualités sont peu nombreuses.

C'est le sujet que nous abordons ici; $X(n,p)$ est le tableau des données, les variables v_j (centrées par rapport à D) sont représentées par les vecteurs-colonnes X^j de X , les individus i par les vecteurs-lignes X_i , assimilés à des points dans l'espace individu $E=\mathbb{R}^p$; ces notations sont affectées d'indices supplémentaires en fonction des besoins; les matrices diagonales construites à partir des éléments diagonaux a_i sont notées D_a , à l'exception de la matrice D des pondérations des individus dans \mathbb{R}^n .

Ère Partie. UNE LISTE DE QUALITES ENVISAGEABLES.

I - QUALITES PHYSIQUES ET DIMENSIONNELLES.

L'ACP se soucie assez souvent du fait que les résultats ne dépendent pas du choix des unités [Saporta]. A l'aide d'une analogie nous montrons comment ces préoccupations peuvent être résolues avec les métriques; pour cela nous supposons que les variables sont des grandeurs physiques [Lartigue], comme le fait Harman par exemple avec un tableau de "variables physiques" tout au long de son ouvrage. Des qualités susceptibles de s'appliquer aux métriques apparaissent à l'occasion d'un petit détour nécessaire pour exposer l'analogie (I.1 et I.2).

I.1 - Dans la situation retenue les variables sont pour la plupart mesurées par des échelles de rapport (au sens de la théorie du Mesurage [Roberts]), ce qui fait que toutes les opérations numériques pour les calculs de barycentre et d'inertie sont signifiantes (meaningful) aux yeux de cette théorie. Il suffit d'ailleurs que les variables soient mesurées par des échelles d'intervalle, comme Harris le demande.

D'autre part les variables ont une dimension. La dimension $[v]$ d'une variable indique la règle selon laquelle la mesure de celle-ci est modifiée quand on change l'unité de certaines variables de référence (classiquement la longueur, la masse, le temps, l'intensité électrique, ...) [Cazin Kotcharian]; par exemple $[m] [l] [t]^{-2}$ est la dimension d'une force. On peut en fait élargir la liste des variables avec les variables économiques exprimées en unités monétaires, et les variables de dénombrement (les armées romaines dénombrées par légionnaires, décurions, centurions, ...).

Depuis Fourier on s'efforce de rendre les lois physiques invariantes par les changements

d'unités, de façon telle que les différents termes qui interviennent dans l'expression d'une loi soient dimensionnellement homogènes. Le Pi-théorème de Vaschy et Buckingham, 1914, indique comment remplacer une loi entre variables dimensionnées par une relation entre "nombres sans dimensions" [Cazin Kotcharian]; cela peut aussi être fait à l'aide de variables réduites (par exemple la loi d'état des gaz de Van der Waals, [Bruhat Kastler]).

I.2 - Comme en ACP on rencontre en Physique des nuages de points-individus dans un espace euclidien; Brillouin cite l'exemple des fluides repérés par les variables pression, volume, température, ce qui permet de figurer les états thermodynamiques [Brillouin chap I.8]; pour aller au-delà cependant il faut introduire l'algèbre tensorielle et les tenseurs métriques fondamentaux.

- Un tenseur d'ordre $m \geq 0$ est un élément du produit tensoriel $\otimes^m \mathbb{R}^p$ dont les indices sont dits contra-variants en position haute, co-variants en position basse [Lichnerowicz]. Un vecteur individu x de coordonnées x^j $j=1, \dots, p$ est un tenseur d'ordre 1 contra-variant, une forme linéaire du dual un tenseur d'ordre 1 co-variant. Le b-a-ba du calcul tensoriel consiste à établir les règles de transformations des coordonnées des tenseurs à l'occasion d'un changement de base linéaire tel que x devient $y = A^{-1} x$ (A matrice carrée du groupe linéaire de \mathbb{R}^p). Ces formules dépendent de la nature des indices; elles s'expriment simplement à l'aide de formules matricielles dans le cas des tenseurs d'ordre 1 et 2 [Angot]:

x tenseur d'ordre 1 contra-variant $y = A^{-1} x$, d'ordre 1 co-variant $y = A' x$,
 T_X tenseur d'ordre 2, 2 fois contra-variant $T_Y = A^{-1} T_X A^{-1}$, 2 fois co-variant $T_Y = A' T_X A$,
 T_X tenseur d'ordre 2 mixte $T_Y = A' T_X A^{-1}$ ou $T_Y = A^{-1} T_X A$.

- Le tenseur métrique fondamental est un tenseur symétrique d'ordre 2, 2 fois co-variant, qui a pour effet ".. de mesurer au moyen d'une même unité la longueur de tout vecteur de l'espace, ... et la distance entre points", [Brillouin chapitres I-8, VI]. Si les g_{jl} sont ses coordonnées, le carré de la norme du vecteur contra-variant x est égale au produit tensoriel contracté $\sum_{jl} g_{jl} x^j x^l$. Du point de vue dimensionnel $[g_{jl}] = [x^j]^{-1} [x^l]^{-1} [K]^2$, nous avons là un moyen d'effectuer des calculs sur des nombres qui ont la même dimension.

On peut rappeler que le calcul tensoriel a été développé sous l'impulsion des physiciens afin d'exprimer des lois indépendantes du repère de l'observateur; Bachelard ne dit-il pas que "le calcul tensoriel est une véritable méthode d'invention", et que Langevin lui confiait que "le calcul tensoriel sait mieux la Physique que le physicien lui même" ? [N.E.S. chapitre 2].

I.3 - Il y a ainsi une forte analogie de situation entre l'ACP et le calcul tensoriel en physique, en ce qui concerne l'espace individu euclidien métrique doté d'un tenseur métrique fondamental. Par conséquent il est possible de s'inspirer de la solution tensorielle quand on désire tenir compte du souci d'homogénéité dimensionnelle dans une ACP sur grandeurs physiques, et licite d'attendre de la part de la métrique qu'elle se comporte comme un tenseur symétrique d'ordre 2, 2 fois co-variant.

Par définition la métrique Q_X d'un triplet (X, Q_X, D) est dite tensorielle si à l'occasion de toute transformation linéaire des vecteurs individus $Y_i = A^{-1} X_i$, A matrice du groupe linéaire sur \mathbb{R}^p elle se transforme de la manière suivante $Q_Y = A' Q_X A$, (pour leur part les tableaux de données X et Y se transforment comme suit $Y' = A^{-1} X'$). En procédant ainsi on répond bien à l'interrogation dimensionnelle de Bourouche et Saporta [p. 27] "... comment calculer la distance entre deux individus décrits par les trois caractères: age, salaire, nombre d'enfants ?" .

Cependant la règle de transformation tensorielle résoud davantage que la question dimensionnelle. En effet un changement d'unités de mesure se traduit dans l'espace des individus par une transformation plus simple $Y_i = D_\mu^{-1} X_i$ avec D_μ une matrice diagonale régulière. La question que pose l'influence des changements d'unités est donc plus simplement résolue lorsque la métrique Q_X se transforme de la manière suivante $Q_Y = D_\mu Q_X D_\mu$ pour toute transformation du tableau des données $Y' = D_\mu^{-1} X'$ par le sous-groupe des matrices diagonales régulières. Les métriques qui possèdent cette propriété affaiblie sont dites sous tensorielles.

II - ALGÈBRE TENSORIELLE ET ACP.

Il existe une seconde rencontre entre les tenseurs métriques et l'ACP, plus classique et indépendante de la précédente.

II.1 - En effet on sait que l'ACP revient à prendre pour nouvelle base de E les directions principales $\varphi_{X\alpha}$ vecteurs propres Q_X -orthonormés de $S_X Q_X$, avec $S_X = X' D X$ la matrice de variance covariance des variables, supposée régulière pour simplifier. Si $\{\varphi_X\}$ est la matrice des vecteurs colonnes $\varphi_{X\alpha}$, $\lambda_{X\alpha}$ les valeurs propres correspondantes et $D_{X\lambda}$ la matrice diagonale des $\lambda_{X\alpha}$, on a les relations synthétiques $S_X Q_X \{\varphi_X\} = \{\varphi_X\} D_{X\lambda}$, $\{\varphi_X\}' Q_X \{\varphi_X\} = \text{Id}$, $\{\varphi_X\}' S_X^{-1} \{\varphi_X\} = D_{X\lambda}^{-1}$. Les composantes principales $\psi_{X\alpha} = X Q_X \varphi_{X\alpha}$ dans $F=\mathbb{R}^n$ sont les vecteurs propres de l'opérateur $X Q_X X' D$, les coordonnées des individus dans la base des directions principales sont les lignes du tableau $\{\psi_X\}$ tel que $\{\psi_X\}' = \{\varphi_X\}^{-1} X' = \{\varphi_X\}' Q_X X'$.

On sait aussi que par construction cela revient à rechercher une image euclidienne (avec métrique identité) par isométrie [Cailliez Pages]. Les isométries se traduisent par la relation matricielle $M = A^T N A$ entre métriques; comme on est d'emblée plongé dans un espace euclidien avec des variables physiques, l'isométrie sur laquelle est fondée l'ACP rejoint la règle de transformation tensorielle. Effectivement quelle que soit la métrique Q_X les coordonnées des individus se transforment selon $\{\psi_X\}' = \{\varphi_X\}'^{-1} X'$ à l'occasion du passage dans E de la base canonique initiale à celle des directions principales $\varphi_{X\alpha}$, et on vérifie que la métrique suit la transformation $\{\varphi_X\}' Q_X \{\varphi_X\} = \text{Id}$. Par ailleurs les ACP de (X, Q_X, D) et de $(\{\psi_X\}, \text{Id}, D)$ conduisent aux mêmes résultats [Cailliez Pages, Pages Escoufier Cazes], et quelles que soient Q_X et A matrice carrée régulière, les ACP de (X, Q_X, D) et de $(Y: Y' = A^{-1} X', A' Q_X A, D)$ conduisent aux mêmes composantes principales, aux mêmes coordonnées sur les directions principales, tandis que les directions principales sont reliées par la relation $\varphi_{Y\alpha} = A^{-1} \varphi_{X\alpha}$.

Cela revient à dire que, avec ou sans précaution tensorielle sur Q_X , on retrouve la règle tensorielle usuelle de transformation des tenseurs métriques à propos du changement de variable linéaire entre la base canonique initiale et celle des directions principales. Il serait plus juste de remarquer que l'on obtient ce que l'on a décidé d'y trouver en prenant une isométrie.

II.2 - Cependant cette autre rencontre entre l'ACP et le calcul tensoriel est locale. On sait bien en effet que malgré ces transformations de type tensoriel on maîtrise mal la variation des résultats $\{\varphi_X\}$ et $D_{X\lambda}$ quand on change les unités de mesure pour les variables. Par contre lorsque la métrique Q_X est tensorielle ou sous-tensorielle on a un résultat supplémentaire:

Propriété 1: Les résultats de l'ACP d'un triplet (X, Q_X, D) suivent les règles de transformation tensorielles à l'occasion de tout changement de variable linéaire $Y' = A^{-1} X'$ si et seulement si la métrique est tensorielle.

Condition suffisante: pour toute matrice A du groupe linéaire de \mathbb{R}^p on a les transformations suivantes: $Y' = A^{-1} X'$, $S_Y = A^{-1} S_X A^{-1}$ et par hypothèse $Q_Y = A' Q_X A$. Puisque les axes principaux du triplet (Y, Q_Y, D) vérifient $S_Y Q_Y \varphi_{Y\alpha} = \lambda_{Y\alpha} \varphi_{Y\alpha}$ donc $A^{-1} S_X Q_X A \varphi_{Y\alpha} = \lambda_{Y\alpha} \varphi_{Y\alpha}$, alors $\varphi_{Y\alpha} = A^{-1} \varphi_{X\alpha}$ et $\lambda_{Y\alpha} = \lambda_{X\alpha}$ sont solutions de l'ACP de (Y, Q_Y, D) lorsque $\varphi_{X\alpha}$ et $\lambda_{X\alpha}$ sont solutions de l'ACP de (X, Q_X, D) .

On vérifie par l'absurde que la condition est nécessaire. \square

Conséquences: il en résulte que $\{\psi_Y\}' = \{\varphi_Y\}' Q_Y Y'$ est égal à $\{\varphi_X\}' Q_X X' = \{\psi_X\}'$, par

conséquent les vecteurs principaux sont contra-variants, les valeurs propres sont invariantes, de même que les composantes principales, les distances entre individus et l'opérateur $X Q_X X' D$. On voit encore que les triplets (X, Q_X, D) , (Y, Q_Y, D) conduisent à la même image $(\{\psi_X\}, Id, D)$ (ce qui n'est pas le cas pour les métriques quelconques).

Corollaire: On a la même propriété pour les métriques qui suivent les règles de transformation tensorielle uniquement pour un sous-groupe du groupe linéaire. C'est notamment le cas du sous-groupe des matrices diagonales, (celui des métriques sous-tensorielles).

II.3 - L'isométrie sur laquelle est fondée l'ACP prend donc tout son intérêt lorsque la métrique est tensorielle ou sous-tensorielle. C'est ce comportement des métriques qui permet l'aboutissement logique de l'édifice ACP, en même temps que le respect des soucis physiques classiques. C'est pour cette raison qu'il paraît intéressant d'explicitier le comportement tensoriel ou sous-tensoriel des métriques au titre des qualités que l'on peut attendre d'elles.

Remarque: l'emploi de variables physiques réduites permet aussi de se ramener à des expressions homogènes sans dimensions; c'est ainsi que l'on procède en analyse logarithmique [Kazmierczak].

III - QUALITES ALGEBRIQUES.

Ces qualités interviennent quand on aborde la question de l'analyse conjointe de plusieurs triplets $(X_h(n, p_h), Q_h, D)$ pour $h = 1, \dots, H$, avec plusieurs blocs de variables v_{jh} mesurées sur les mêmes individus [Pages Escoufier Cazes, Escoufier Pages, Escoufier situation 1], (les p_h sont différents a priori, les variables centrées sur les individus pour la pondération D). Chaque bloc est doté d'une métrique initiale Q_h dite métrique intra pour le bloc, avec pour simplifier des espaces individus respectifs E_h de dimension p_h (covariances S_h régulières).

III.1 - Pour faire l'analyse conjointe on considère le tableau global $X_G = (X_1, \dots, X_h, \dots, X_H)$ par concaténation des X_h et l'espace individu final E_G de dimension $\sum_h p_h$ (covariance globale $S_G = X_G' D X_G$ supposée régulière pour simplifier). Il se pose alors le problème du choix d'une métrique globale Q_G dans E_G . Une stratégie d'agrégation des métriques [Pages Cailliez Escoufier] est une règle de construction de $Q_G(Q_h)$ à partir des métriques intra. Si nous considérons l'ensemble des métriques euclidiennes sur R^m $m \geq 0$, une stratégie d'agrégation est une loi de composition algébrique sur cet ensemble; les métriques à effet relationnel ou la juxtaposition bloc-diagonale des métriques intra sont des exemples [Schektman, Escoufier Pages].

Les qualités algébriques des métriques sont celles qui résultent des qualités algébriques de la loi de composition. C'est une question générale qui concerne toutes les métriques puisque tout tableau de données X peut être considéré comme la concaténation ultime de ses colonnes. Dans ce cas les métriques intra correspondant à chaque variable colonne v_j sont des scalaires q_j , ce sont des métriques dans R encore appelées métriques ultimes.

Une métrique peut provenir d'agrégations successives de métriques intra (de métriques ultimes en particulier), une métrique est dite cohérente sur le plan algébrique si les agrégations dont elle résulte suivent toutes la même stratégie.

III.2 - La concaténation des tableaux est une loi de composition qui possède des propriétés élémentaires. Elle est associative, à savoir que à partir de X_1, X_2 et X_3 on a évidemment $X_G = ((X_1, X_2), X_3) = (X_1, (X_2, X_3))$. Une stratégie est dite associative si elle respecte une règle analogue: $Q_G[Q_G(Q_1, Q_2), Q_3] = Q_G[Q_1, Q_G(Q_2, Q_3)]$.

La concaténation de tableaux est également commutative moyennant une permutation sur les colonnes, une stratégie est commutative si elle applique sur les lignes et colonnes de la métrique résultante la même permutation que sur les colonnes de (X_1, X_2) . De la sorte la concaténation de tableaux ne dépend pas de l'ordre selon lequel on les introduit; il paraît naturel d'attendre qu'il en soit de même de la part des métriques globales, qu'elles ne dépendent pas de l'ordre selon lequel les divers triplets (X_h, Q_h, D) $h=1, \dots, H$ sont introduits. En effet l'application de l'ACP sur des données peut ne pas être définitive dès le premier essai, et l'on peut être conduit, pour souscrire à l'attente d'exhaustivité des variables [Lebart Morineau Tabard], à introduire de nouvelles au fur et à mesure; le contraire serait choquant.

Propriété 2: Les métriques qui résultent d'une stratégie d'agrégation associative commutative à partir de métriques ultimes sont des métriques cohérentes qui ont une structure de semi groupe abélien pour la loi d'agrégation.

C'est un résultat presque trivial; la qualité de la structure de ces métriques montre cependant l'intérêt qu'il y a à s'occuper de l'aspect algébrique dans la construction des métriques, de la commutativité et de l'associativité.

Remarque: Il se présente là aussi une propriété affaiblie lorsque une métrique globale Q_G ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont introduits les triplets, bien qu'il n'y ait pas à proprement

parler de loi de composition de métriques intra. C'est notamment le cas lorsque la construction de Q_G "efface tout et recommence" à la suite de l'introduction de chaque nouveau triplet, la métrique globale de Mahalanobis $Q_G = S_G^{-1}$ est un exemple .

III.3 - A propos des stratégies on peut combiner les propriétés algébriques et tensorielles. L'idée principale consiste à dire que si dans tout espace individu partiel E_h la métrique intra vérifie une relation de type tensoriel, à savoir que pour des matrices de transformation régulières A_h et des tableaux transformés $Y_h' = A_h^{-1} X_h'$ la métrique vérifie $Q_{hY} = A_h' Q_{hX} A_h$, alors l'agrégation des métriques intra ne détruit pas cette propriété.

3.1 - On pose D_A la matrice bloc-diagonale de matrices A_h ; une stratégie est dite sous tensorielle si pour toutes les matrices A_h pour lesquelles on a les propriétés de transformations tensorielles ci-dessus de la part des métriques intra, la métrique agrégée globale correspondant au tableau global transformé $Y_G' = D_A^{-1} X_G'$ dans l'espace individu global E_G vérifie la propriété suivante de transformation: $Q_{GY} = D_A' Q_{GX} D_A$.

On a un autre résultat immédiat.

Propriété 3: Les métriques qui résultent d'une stratégie d'agrégation sous-tensorielle à partir des métriques intra sous-tensorielles sont des métriques sous-tensorielles.

En effet les matrices de transformation A_h sont des matrices diagonales, D_A est aussi une matrice diagonale. \square

3.2 - Quand on se réfère aux propos physiques précédents, la forme générale des métriques ultimes est nécessairement $q_j = \gamma_j^2 / v_j^2(g_j)$ avec γ_j un scalaire sans dimension invariant et g_j une grandeur de référence, ce qui donne $[q_j] = [v_j]^{-2}$ sur le plan dimensionnel. On peut aussi se limiter au "modèle" suivant de métrique ultime: $q_j = \gamma_j^2 / \sigma_j^2$.

Corollaire: Les métriques qui résultent d'une stratégie d'agrégation associative commutative sous-tensorielle à partir des métriques ultimes $q_j = \gamma_j^2 / v_j^2(g_j)$ sont des métriques cohérentes sous-tensorielles qui ont une structure de semi-groupe abélien pour la loi d'agrégation.

On a un corollaire analogue avec les modèles $q_j = \gamma_j^2 / \sigma_j^2$.

Remarque - Une qualité tensorielle complète à propos des stratégies d'agrégation dans E_G est certainement plus complexe à définir et formaliser. Les résultats ci-dessus montrent l'importance du sous groupe des matrices de transformations diagonales dans tout espace individu quand on

réunit les préoccupations physiques et algébriques.

IV - A PROPOS DE LIBERTE.

Un autre souci concerne la "liberté" des métriques; il s'agit de rappeler qu'une métrique peut varier dans le cône convexe positif des métriques euclidiennes sur \mathbb{R}^p qui est une variété de dimension $p(p+1)/2$. Par conséquent on ne doit pas exclure des modèles ou formules de métriques paramétrées dans cet espace, (naturellement les métriques peuvent être non diagonales).

La nature de ce paramétrage est variée, il peut être dû uniquement aux données de X, c'est le cas de D_{1/σ^2} ou de S_X^{-1} par exemple, dépendre d'autres choses ou être mixte. La différence se situe dans la manière avec laquelle le degré de liberté attaché à l'élément Q du triplet (X, Q, D) est utilisé. Dans le premier cas ce degré de liberté est assujéti à celui de X, il s'agit de modèles (ou formules) de métriques liées aux données; dans les suivants la métrique dépend de paramètres exogènes (par exemple d'individus témoins hors analyse) qui permettent des modèles plus larges afin de tenir compte de considérations supplémentaires.

2ème Partie . DES EXEMPLES DE METRIQUES.

Nous examinons ici les propriétés de quelques métriques de la littérature.

V - METRIQUES CLASSIQUES.

a) La métrique de Mahalanobis Q_{Ma} consiste à prendre l'inverse de la matrice de variance covariance $S_X = X' D X$ supposée régulière, $Q_{MaX} = S_X^{-1}$. C'est une métrique tensorielle puisque pour tout changement de variables linéaire $Y' = A^{-1} X'$ la variance covariance devient $S_Y = A^{-1} S_X A^{-1}$ et la métrique $Q_{MaY} = A' Q_{MaX} A$; on sait par ailleurs que cette métrique ne conduit pas à une base de directions principales unique.

b) Soit le triplet (X, Q, D) et ξ un tableau de variables instrumentales centrées sur les mêmes individus avec $S_{\xi\xi}$ supposée régulière. La métrique $\Gamma_\xi = S_{\xi\xi}^{-1} S_{\xi X} Q S_{X\xi} S_{\xi\xi}^{-1}$ des variables instrumentales [Bonifas et col., Mailles] est une métrique tensorielle. En effet pour tout $\eta' = A^{-1} \xi'$ dans l'espace individu des variables instrumentales on a $S_{\eta\eta} = A^{-1} S_{\xi\xi} A^{-1}$, $S_{\eta X} = A^{-1} S_{\xi X}$ et $\Gamma_\eta = S_{\eta\eta}^{-1} S_{\eta X} Q S_{X\eta} S_{\eta\eta}^{-1} = A' \Gamma_\xi A$.

c) La métrique de l'inverse des variances D_{1/σ^2} et la métrique de Joreskog diagonale de S_X^{-1} sont sous tensorielles.

d) Si $\{\varphi_X\}$ est la solution de l'ACP de (X, Q_X, D) avec Q_X tensorielle, $Q_X \{\varphi_X\} M \{\varphi_X\}' Q_X$ est une métrique tensorielle quelle que soit la matrice symétrique définie positive invariante M . Pour tout $Y' = A^{-1} X'$ on a $Q_Y \{\varphi_Y\} M \{\varphi_Y\}' Q_Y = A' Q_X \{\varphi_X\} M \{\varphi_X\}' Q_X A$, (les triplets $(X, Q_X \{\varphi_X\} M \{\varphi_X\}' Q_X, D)$ et $(\{Y\}, M, D)$ ont les mêmes composantes principales).

e) Si Z est un tableau avec les mêmes variables que X sur des individus hors analyse, $(Z' N Z)^{-1}$ est une métrique tensorielle quelle que soit la matrice symétrique invariante N telle que $Z' N Z$ est définie positive; pour tout $Y' = A^{-1} X'$ le tableau Z suit la même transformation $T' = A^{-1} Z'$ et $(T' N T)^{-1} = A' (Z' N Z)^{-1} A$.

f) On se ramène à une ACP dans le modèle à effet fixe [Besse et col.]: des vecteurs individus X_i suivent la distribution normale multivariée $N(x_i, \theta_i \Gamma)$, la recherche du sous-espace auquel les x_i appartiennent revient à faire l'ACP du tableau des X_i avec la métrique Γ^{-1} . C'est dans ce cadre une métrique tensorielle, pour tout $Y_i = A^{-1} X_i$ les Y_i suivent la distribution $N(A^{-1} x_i, \theta_i A^{-1} \Gamma A^{-1})$, la même problématique conduit à la métrique $A' \Gamma^{-1} A$.

Les paramétrages de ces métriques sont variés, ils dépendent uniquement de X (a, c), de paramètres exogènes (e, f), ou sont mixtes (b,d).

VI - STRATEGIES D'AGREGATION.

Nous reprenons les triplets (X_h, Q_h, D) pour $h = 1, \dots, H$.

a) la stratégie Ma de Mahalanobis consiste à prendre pour métrique globale Q_{MaG} l'inverse S_G^{-1} de la matrice de variance covariance globale. Elle est entièrement déterminée par les données X_h et ne dépend nullement des métriques intra, la formule ne dépend ni du nombre ni de l'ordre des triplets (propriété algébrique affaiblie); elle est tensorielle. Sur le plan géométrique cette stratégie repositionne les différents sous espaces individus E_h à la suite de l'introduction de chaque nouveau triplet. Sur le plan statistique elle conduit à une indétermination de la solution.

b) la stratégie Σ consiste à prendre la juxtaposition des métriques de Mahalanobis intra en diagonale de blocs, $Q_{\Sigma G} = D_{Sh}^{-1}$, elle correspond au point de vue de la prévision [Pages Cailliez Escoufier]. Cette stratégie est associative commutative par rapport à l'opération de juxtaposition

bloc-diagonale, elle respecte le caractère tensoriel de chaque métrique intra; la métrique résultante est entièrement déterminée par les données (formule). Sur le plan géométrique les différents espaces individus E_h sont orthogonaux deux à deux.

c) la stratégie diagonale d. Cette stratégie consiste à juxtaposer en matrice bloc-diagonale les différentes métriques intra, $Q_{dG} = D_{Qh}$ [Escofier Pages]; elle est associative commutative et sous-tensorielle. La métrique résultante est déterminée par les métriques intra; la dépendance éventuelle en fonction des données ne peut se faire que par l'intermédiaire des métriques intra. La stratégie se réduit à Σ quand les métriques intra sont des métriques de Mahalanobis. Sur le plan géométrique les différents espaces individus E_h sont orthogonaux deux à deux.

d) la stratégie relationnelle Rel . Elle résulte des métriques à effet relationnel de Schektman qui propose de prendre pour deux triplets $h = 1, 2$ la métrique suivante:

$$Q_{(1,2)} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} D (X_1, X_2) \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

avec $B_h = Q_h (S_h Q_h)^{-1/2}$ matrice symétrique [Schektman].

On peut généraliser cette loi de composition à plusieurs triplets, et prendre la métrique résultante $Q_{RG} = D_B S_G D_B' = (D_B S_G) S_G^{-1} (D_B S_G)'$, avec $B_h = Q_h (S_h Q_h)^{-1/2}$ $h=1, \dots, H$. Cette formule est manifestement commutative et associative (propriété appelée à effets équilibrés dans [Ibrahim Schektman]). La stratégie est sous-tensorielle, en effet à partir de $Y_h' = A_h^{-1} X_h'$,

$S_{Yh} = A_h^{-1} S_{Xh} A_h^{-1'}$ et $Q_{Yh} = A_h' Q_{Xh} A_h$, on a :

$S_{Yh} Q_{Yh} = A_h^{-1} S_{Xh} Q_{Xh} A_h$, $(S_{Yh} Q_{Yh})^{-1/2} = A_h^{-1} (S_{Xh} Q_{Xh})^{-1/2} A_h$, $B_{Yh} = A_h' B_{Xh} A_h$,

$D_{BY} = D_A' D_{BX} D_A$, $S_{GY} = D_A^{-1} S_{GX} D_A^{-1'}$, et donc $Q_{RGY} = D_A' Q_{RGX} D_A$.

La métrique résultante dépend à la fois des données et des métriques intra. Sur le plan géométrique les cosinus des angles que forment dans E_G les directions principales de l'ACP du triplet (X_h, Q_h, D) avec celles de l'ACP du triplet (X_k, Q_k, D) sont respectivement égaux aux corrélations entre les composantes principales correspondantes.

e) la stratégie B. Au passage nous remarquons que la matrice symétrique bloc-diagonale D_B résulte d'une stratégie commutative associative (pour l'opération juxtaposition bloc-diagonale) et sous-tensorielle.

f) Les métriques globales dépendent des métriques intra Q_h ; on peut aussi prendre des métriques pondérées $\gamma_h^2 Q_h$, ce qui donne les stratégies notées $\gamma^2 Ma$, $\gamma^2 \Sigma$, $\gamma^2 d$, $\gamma^2 Rel$ et $\gamma^2 B$. Les γ_h^2 ($\gamma_h > 0$) sont souvent dus à des soucis de normalisation des triplets, ils ne perturbent pas les qualités algébriques et physiques des stratégies quand ils sont respectivement attachés à chaque bloc h et invariants. Ils peuvent aussi dépendre des données, des métriques intra ou de paramètres exogènes.

La stratégie $\gamma^2 d$ est la plus répandue. Par exemple dans [Escoufier Pages] chaque γ_h^2 est respectivement égal à l'inverse de la plus grande valeur propre de l'ACP du triplet (X_h, Q_h, D) . Ce sont des paramètres invariants, la stratégie est sous tensorielle, associative commutative pour l'opération juxtaposition bloc-diagonale.

Dans STATIS le compromis des opérateurs $W_h D = X_h Q_h X_h' D$ revient à utiliser $\gamma^2 d$ [Lavit Roux], avec des pondérations γ_h^2 qui dépendent de l'ensemble des données. Il n'y a donc pas à proprement parler de loi de composition entre métriques, cependant le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont introduits les triplets (propriété algébrique faible comme pour la stratégie de Mahalanobis). On peut aussi envisager des pondérations normalisées $\gamma_h^2 / \|W_h D\|$ en prenant les normes (invariantes) des opérateurs pour leur produit scalaire usuel.

Les scalaires $\gamma_h^2 = 1/H$ ont aussi été considérés [Escoufier], moyennant un aménagement simple des γ_h^2 , cette stratégie $\gamma^2 d$ peut devenir associative .

g) Sans doute y a t'il encore d'autres moyens de faire l'analyse conjointe de plusieurs triplets en tenant compte des métriques intra. Avec des variables instrumentales on peut imaginer le cas où chaque triplet est accompagné par un tableau $\xi_h(n, p_h)$ et la métrique des variables instrumentales correspondante $\Gamma_{\xi_h} = S_{\xi_h \xi_h}^{-1} S_{\xi_h X_h} Q_h S_{X_h \xi_h} S_{\xi_h \xi_h}^{-1}$ dans R^{p_h} , ($S_{\xi_h \xi_h}$ supposée régulière). On peut donc appliquer une des stratégies d'agrégation précédentes (ou une autre) aux métriques intra Γ_{ξ_h} , c'est une façon de généraliser la prise en compte conjointe de plusieurs tableaux de données dans l'optique des variables instrumentales.

Sabatier se place dans le cas d'un seul tableau $\xi(n, p)$ pour plusieurs triplets, les généralisations qu'il présente fournissent des métriques dans R^p au lieu de métriques dans $R^{\Sigma p_h}$ comme ci-dessus. Ce ne sont donc pas des stratégies d'agrégation du même type. Cependant ces généralisations sont des métriques tensorielles comme toutes les métriques d'ACPVI, et commutatives; certaines peuvent être associatives moyennant des règles complémentaires simples sur les pondérations " q_k " (notation du texte) de chaque métrique intra, les autres ont la propriété

algébrique affaiblie (comme pour STATIS et Mahalanobis).

VII - CONSTRUCTIONS COHERENTES DE METRIQUES ULTIMES.

Ce sont des métriques qui résultent d'une même stratégie d'agrégation à partir des métriques ultimes q_j . Les ACP partielles de chaque colonne X^j avec q_j ont une valeur propre unique égale à $q_j \sigma_j^2$, c'est aussi la norme de l'opérateur $q_j X^j X^{j'} D$.

VII.1 - Exemples:

* la stratégie de Mahalanobis donne la métrique de Mahalanobis;

* la stratégie Σ donne la métrique D_{1/σ^2} ;

* la stratégie d donne la métrique diagonale D_q , elle se ramène à D_{1/σ^2} avec le modèle $q_j = 1/\sigma_j^2$;

* avec la stratégie Rel les termes $B_h = Q_h (S_h Q_h)^{-1/2}$ se réduisent aux scalaires $\sqrt{q_j} / \sigma_j$, on obtient la métrique $D_{\sqrt{q}} R D_{\sqrt{q}}$ avec R la matrice de corrélation [Maurin]. Comme les directions principales des ACP partielles sont les axes initiaux dans E , on vérifie de façon triviale sur cette expression l'égalité entre les cosinus (dans E) et les corrélations R_{ji} ;

* la stratégie B donne la métrique $D_{\sqrt{q}/\sigma}$;

* la stratégie $\gamma^2 \Sigma$ donne la métrique D_{γ^2 / σ^2} ; les stratégies normalisées $\gamma^2 / (\sup \lambda_\alpha)$ d et $\gamma^2 / \|W D\|$ d aussi. La métrique de Joreskog est un cas particulier avec le modèle de paramètre $\gamma_j^2 = 1/(1 - \rho_j^2)$, où ρ_j est le coefficient de corrélation multiple entre la variable v_j et l'ensemble des autres;

* avec STATIS les opérateurs ultimes sont $q_j X^j X^{j'} D$, le compromis les pondère par les coordonnées du "premier" vecteur propre de la matrice d'éléments $q_j q_i \text{tr}(X^j X^{j'} D X^i X^{i'} D) = q_j q_i \sum_{ik} p_i X_i^j X_k^j p_k X_k^i X_i^1 = R_{ji}^2 q_j \sigma_j^2 q_i \sigma_i^2$. Il s'agit de la matrice $D_{\sigma^2 q} R^{2H} D_{\sigma^2 q}$, où R^{2H} est le carré d'Hadamard de R [Rao Mitra].

VII.2 - Résolutions. Nous précisons quelques uns des éléments de résolution des ACP avec ces métriques.

* métriques D_q : les directions principales vérifient $D_\sigma R D_\sigma D_q \varphi_\alpha = \lambda_\alpha \varphi_\alpha$ ou

$D_{\sigma\sqrt{q}} R D_{\sigma\sqrt{q}} D_{\sqrt{q}} \varphi_{\alpha} = \lambda_{\alpha} D_{\sqrt{q}} \varphi_{\alpha}$, il suffit donc de diagonaliser la matrice symétrique $D_{\sigma\sqrt{q}} R D_{\sigma\sqrt{q}}$. L'inertie du nuage est égale à $\text{tr}(D_{\sigma} R D_{\sigma} D_q) = \text{tr}(D_{\sigma^2 q} R) = \sum_j q_j \sigma_j^2$; la norme au carré de l'opérateur d'Escoufier est égale à $\text{tr}(D_{\sigma} R D_{\sigma q} D_{\sigma} R D_{\sigma q}) = \text{tr}(D_{\sigma^2 q} R)^2 = \sum_{j,l} R_{jl}^2 q_j \sigma_j^2 q_l \sigma_l^2$. Pour STATIS il faut au préalable étudier $D_{\sigma^2 q} R^{2H} D_{\sigma^2 q}$.

Avec le modèle $q_j = \gamma_j^2 / \sigma_j^2$ (métrique D_{γ^2 / σ^2}), il s'agit de diagonaliser $D_{\gamma} R D_{\gamma}$, l'inertie est égale à $\text{tr}(D_{\gamma^2} R) = \sum_j \gamma_j^2$, la norme au carré à $\text{tr}(D_{\gamma^2} R)^2 = \sum_{j,l} R_{jl}^2 \gamma_j^2 \gamma_l^2$.

* métriques relationnelles ultimes $D_{\sqrt{q}} R D_{\sqrt{q}}$: les directions principales vérifient $(D_{\sigma} R D_{\sqrt{q}})^2 \varphi_{\alpha} = \lambda_{\alpha} \varphi_{\alpha}$, $D_{\sigma} R D_{\sqrt{q}} \varphi_{\alpha} = \lambda_{\alpha}^{1/2} \varphi_{\alpha}$ c'est à dire $D_{\sigma\sqrt{q}}^{1/2} R D_{\sigma\sqrt{q}}^{1/2} D_{\sqrt{q}/\sigma}^{1/2} \varphi_{\alpha} = \lambda_{\alpha}^{1/2} D_{\sqrt{q}/\sigma}^{1/2} \varphi_{\alpha}$, il suffit donc de diagonaliser la matrice symétrique $D_{\sigma\sqrt{q}}^{1/2} R D_{\sigma\sqrt{q}}^{1/2}$. L'inertie du nuage de points est égale à $\text{tr}(D_{\sigma\sqrt{q}} R)^2 = \sum_{j,l} R_{jl}^2 \sigma_j \sqrt{q_j} \sigma_l \sqrt{q_l}$; la norme au carré de l'opérateur est égale à $\text{tr}(D_{\sigma\sqrt{q}} R)^4$.

Avec $q_j = \gamma_j^2 / \sigma_j^2$ (métrique $D_{\gamma/\sigma} R D_{\gamma/\sigma}$), il s'agit de diagonaliser $D_{\gamma}^{1/2} R D_{\gamma}^{1/2}$, l'inertie est égale à $\text{tr}(D_{\gamma} R)^2 = \sum_{j,l} R_{jl}^2 \gamma_j \gamma_l$, la norme au carré à $\text{tr}(D_{\gamma} R)^4$.

* métriques $D_{\sqrt{q}/\sigma}$: les directions principales vérifient $D_{\sigma} R D_{\sqrt{q}} \varphi_{\alpha} = \lambda_{\alpha} \varphi_{\alpha}$, $D_{\sigma\sqrt{q}}^{1/2} R D_{\sigma\sqrt{q}}^{1/2} D_{\sqrt{q}/\sigma}^{1/2} \varphi_{\alpha} = \lambda_{\alpha} D_{\sqrt{q}/\sigma}^{1/2} \varphi_{\alpha}$, on est amené à diagonaliser la même matrice qu'avec les métriques relationnelles ultimes, les directions principales sont colinéaires aux précédentes, les valeurs propres égales aux racines carrées positives des précédentes. L'inertie du nuage de points est égale à $\text{tr}(D_{\sigma\sqrt{q}} R) = \sum_j \sigma_j \sqrt{q_j}$; la norme au carré de l'opérateur est égale à $\text{tr}(D_{\sigma\sqrt{q}} R)^2 = \sum_{j,l} R_{jl}^2 \sigma_j \sqrt{q_j} \sigma_l \sqrt{q_l}$.

Avec $q_j = \gamma_j^2 / \sigma_j^2$ (métrique D_{γ/σ^2}), il s'agit de diagonaliser $D_{\gamma}^{1/2} R D_{\gamma}^{1/2}$, l'inertie est égale à $\text{tr}(D_{\gamma} R) = \sum_j \gamma_j$, la norme au carré à $\text{tr}(D_{\gamma} R)^2$.

VII.3 - Comparaisons. La construction de métriques différentes à partir de métriques intra communes donne l'occasion de faire des comparaisons. Celles-ci sont plus simples à mener quand on compose des métriques ultimes; certains résultats sont immédiats.

* Les métriques ultimes normées par $\sup \lambda_{\alpha}$ ou par $\|W D\|$ sont égales à $1/\sigma_j^2$, les métriques D_q et $D_{\sqrt{q}} R D_{\sqrt{q}}$ deviennent D_{1/σ^2} et $D_{1/\sigma} R D_{1/\sigma}$, les ACP correspondantes ont pour traces respectives $\text{tr} R$, $\text{tr} R^2$, et pour norme au carré de l'opérateur $\text{tr} R^2$ et $\text{tr} R^4$.

Propriété 4 : Les parts prises par les k premiers axes principaux $k=1, \dots, p-1$, dans l'inertie du

nuage de points individus et la norme de l'opérateur sont plus élevées avec la stratégie ultime relationnelle normée $D_{1/\sigma} R D_{1/\sigma}$ qu'avec la stratégie ultime diagonale normée $D_{1/\sigma}^2$.

i) soient ρ_α les valeurs propres de R classées par ordre de valeurs non croissantes, les relations pour $k=1,\dots,p-1$:

$$\frac{\sum_{\alpha=1,\dots,k} \rho_\alpha^2}{\sum_{\alpha=1,\dots,k} \rho_\alpha^2 + \sum_{\beta=k+1,\dots,n} \rho_\beta^2} \geq \frac{\sum_{\alpha=1,\dots,k} \rho_\alpha}{\sum_{\alpha=1,\dots,k} \rho_\alpha + \sum_{\beta=k+1,\dots,n} \rho_\beta}$$

se réduisent aux inégalités immédiates

$$\sum_{\alpha=1,\dots,k} \rho_\alpha^2 \sum_{\beta=k+1,\dots,n} \rho_\beta \geq \sum_{\alpha=1,\dots,k} \rho_\alpha \sum_{\beta=k+1,\dots,n} \rho_\beta^2$$

ii) comme on a $\sum a_i^\theta \geq (\sum a_i)^\theta / p^{\theta-1}$ pour toute suite de p nombres positifs ou nuls a_i et $\theta \geq 1$, on en déduit que $\sum a_i^\theta \geq \sum a_i$ dès que $\sum a_i \geq p$. Or $\text{tr } R = \sum \rho_\alpha = p$, donc $\text{tr } R^2 \geq \text{tr } R$ et $\text{tr } R^4 \geq \text{tr } R^2$. □

Par conséquent avec les métriques ultimes normées, l'inertie est plus forte avec la stratégie relationnelle qu'avec la stratégie diagonale, en même temps l'ellipsoïde d'inertie est plus "allongé et aminci"; la stratégie relationnelle se prête ainsi mieux à l'explicitation des premiers axes principaux.

Exemple: Sur le tableau des poissons d'Amiard à 16 variables [Cailliez Pages] l'inertie est égale à 16 avec la métrique $D_{1/\sigma}^2$ et 75.8 avec la métrique $D_{1/\sigma} R D_{1/\sigma}$, les parts prises sont respectivement de 47.5 % et 76.2 % pour la première valeur propre, de 70,9 % et 94,8 % pour les deux premières, de 79,6 % et 97,4 % pour les trois premières [Maurin].

* Avec des métriques ultimes générales le résultat $\text{tr}(D_{\sigma\sqrt{q}} R)^2 \geq \text{tr}(D_{\sigma^2 q} R)$ est immédiat. Les autres conclusions de la propriété 4 ne sont pas encore démontrées, cependant celle qui concerne la part prise par la plus grande valeur propre s'est toujours révélé vérifiée dans les applications faites avec des métriques $q_j = \gamma_j^2 / \sigma_j^2$.

CONCLUSIONS.

Quelques éclairages particuliers de l'ACP (points de vue dimensionnel, algébrique) mettent en valeur des qualités pour les métriques et les agrégations de métriques. Le comportement tensoriel ou sous-tensoriel marque un aboutissement de l'édifice, la commutativité et l'associativité y ajoutent de la cohérence. La discussion que nous avons engagée sur quelques métriques montre d'ailleurs que celles-ci possèdent ces qualités à des degrés divers. Il faut ajouter les préoccupations liées à la liberté qui sont de nature à introduire des familles paramétrées de métriques.

Nous avons abordé les stratégies d'agrégation à partir de métriques ultimes attachées à chacune des variables; parmi celles-ci les familles D_q , $D_{\sqrt{q}/\sigma}$, $D_{\sqrt{q}} R D_{\sqrt{q}}$ possèdent les qualités mentionnées et dépendent d'autant de paramètres exogènes qu'il y a de variables, les modèles avec $q_j = \gamma_j^2 / \sigma_j^2$ également.

REFERENCES

- Angot A., Compléments de Mathématiques, Masson, 1972.
Bachelard G., Le nouvel esprit scientifique, PUF, 1934.
Besse P., Caussinus H., Ferre L., Fine J., Some guidelines for principal component analysis, Compstat 86, Physica-Verlag, Heidelberg, 1986, 23-30.
Bonifas L., Escoufier Y., Gonzalez R., Sabatier R., Choix de variables en ACP, Revue de Statistique Appliquée, 1984, XXXII n° 2, 5-15.
Bouroche J.M., Saporta G., L'analyse des données, PUF, Que sais je ?, 1980.
Brillouin L., Les tenseurs en mécanique et en élasticité, Masson, 1960.
Bruhat G., Kastler A., Thermodynamique, Masson, 1968.
Cailliez F., Pages J.P., Introduction à l'analyse des données, SMASH, 1976.
Cazin M., Kotcharian M., Analyse et similitude dimensionnelle, Encyclopédia Universalis, 1969, vol 5, 636-642.
Escoufier B., Pages J., L'Analyse factorielle multiple, Cahier du Buro n° 42, 1984 .
Escoufier Y., L'analyse conjointe de plusieurs matrices de données, dans Jolivet E. et al., Biométrie et Temps, 1980, 59-76.
Fenelon J.P., Qu'est ce que l'analyse des données, Lefonen, 1981.
Harman H.H., Modern factor analysis, Univ. of Chicago, 1967.
Harris R.J., A primer of multivariate statistics, Academic Press, 1975.
Kazmierczak J.B., Une application du principe de Yule: l'analyse logarithmique, dans Diday E., Escoufier Y., Lebart L., Pages J.P., Schektman Y., Tomassone R., Data Analysis and Informatics IV, North Holland, 1985, 393-403.
Ibrahim A., Schektman Y., Analyse en partitions principales, Journées de la Société francophone de classification, Montpellier, 1984.
Lartigue D., La Physique, Editions du jour, 1973.
Lavit C., Roux C., Analyse conjointe de plusieurs tableaux de données par la méthode STATIS, Rapport technique 8402, Unité de Biométrie, ENSAM-INRA-USTL, 1984.
Lebart L., Morineau A., Tabard N., Techniques de la description statistique, modèles et logiciels pour l'analyse des données, Dunod, 1977.
Lichnerowicz A., Algèbre et Analyse linéaires, Masson, 1947.

- Mailles J.P., Analyse des tableaux de proximités, Cahier du Buro n° 33, 1980.
- Maurin M., Métriques et agrégation de métriques en ACP, dans Diday E., Escoufier Y., Lebart L., Pages J.P., Schektman Y., Tomassone R., Data Analysis and Informatics IV, North Holland, 1985, 415-421.
- Pages J.P., Escoufier Y., Cazes P., Opérateurs et analyse des tableaux à plus de 2 dimensions, Cahier du Buro n° 25, 1976, 61-98.
- Pages J.P., Cailliez F., Escoufier Y., Analyse factorielle: un peu d'histoire et de géométrie, Revue de Statistique Appliquée, 1979, XXVII n° 1, 5-28 .
- Rao C.R., Mitra S.J., Generalised inverse of matrices and its applications, J. Wiley, 1971.
- Roberts F.S., Measurement theory, Addison Wesley P. Company, 1979.
- Sabatier R., Quelques généralisations de l'analyse en composantes principales de variables instrumentales, Statistique et Analyse des Données, 1984, vol. 9 n° 3, 75-103.
- Saporta G., Théories et méthodes de la statistique, Technip, 1978.
- Schektman Y., Métriques et analyse des données, contributions et synthèses, 2ème colloque Franco Soviétique, CNET, Paris, 1984.