STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

A. ANTONIADIS
J. BERRUYER

Analyse statistique de champs poissonniens et applications au traitement de données de multidétecteurs

Statistique et analyse des données, tome 11, nº 1 (1986), p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1986__11_1_1_0>

Statistique et Analyse des Données
1986 - Vol.11 n°1 - pp. 1-19

ANALYSE STATISTIQUE DE CHAMPS POISSONNIENS

ET

APPLICATIONS AU TRAITEMENT DE DONNEES DE MULTIDETECTEURS

A.ANTONIADIS (*) **et J.BERRUYER**

Laboratoire de mathématiques appliquées
Université de Saint-Etienne U.E.R des sciences
23 rue du Dr Paul Michelon Saint-Etienne 42023 cedex 2
(*) Actuellement : University of california at Irvine
ca, 92717 U.S.A

Résumé : *L'étude des qualités de multidétecteurs bidimensionnels développés par certains laboratoires, dont les données enregistrées constituent la réalisation d'un champ Poissonnien, nous a servi de guide. Dans la première partie, nous présentons une synthèse de diverses techniques statistiques adaptées à l'étude de certains problèmes sur champ Poissonnien. La deuxième partie est consacrée à une généralisation de l'analyse de la variance aux structures de Poisson par application du principe du maximum de vraisemblance.*

abstract : *In this paper we confine our attention to bidimensimal data stastical models where each obserservation belongs to a Poisson distribution. Such models are used in quality control study of Position sensitive Detectors.*
We aim first at presenting a review of various statistical techniques appropriate for treating such data. The second part of this paper is devoted to a generalisation of the analysis of variance for Poisson distributed data using log-likelihoods.

Mots clés : Champs Poissonniens, Analyse de la variance, Maximum de vraisemblance, Multidetecteurs.
Indices de classification STMA :
04:030,04:050,04:900,05:010,05:120,08:100
14:120

Manuscrit reçu le 23.9.1985, révisé le 30.5.1986

0 - INTRODUCTION

L'objectif de cet article est d'introduire certaines techniques de traitement statistique de champs poissonniens, en vue de leurs applications dans l'étude des qualités de multidétecteurs à gaz.

Les multidétecteurs à gaz [7] utilisés en diffractométrie (rayons X ou neutrons) sont généralement des dispositifs rectangulaires plans ou courbés comportant une grille de n anodes superposée à une grille de m cathodes, le tout étant placé dans un gaz approprié. Anodes et cathodes sont orthogonales, isolées par le gaz et portées à des potentiels très différents. Une particule incidente, si elle interagit avec un atome du gaz de détection, ionise ce dernier et déclenche une brève décharge électrique entre les anodes et les cathodes les plus proches du point d'impact. L'impulsion électrique correspondante (coup) traduit la détection d'une particule incidente dans la surface efficace (cellule) située à la croisée de l'anode i et de la cathode j ayant enregistré le signal électrique le plus puissant.

Lors de la mesure physique, le détecteur est soumis à un flux de photons X ou de neutrons et la nature même du rayonnement conduit à supposer que le nombre n_{ij} de particules enregistrées par une cellule (i,j) du détecteur est la réalisation d'une variable aléatoire de loi de Poisson dont le paramètre dépend de la durée du comptage. D'autre part il est raisonnable de supposer que les variables aléatoires N_{ij} sont indépendantes dans leur ensemble, constituant ainsi un champ poissonnien dont l'intensité dépend à la fois des caractéristiques structurelles du multidétecteur et du réglage de l'électronique associée.

Aucun détecteur n'est parfait et la nature de ses aberrations est fonction de la technologie utilisée pour sa construction. Nous évoquerons seulement l'hétérogénéité de réponse due à des irrégularités de positionnement des électrodes, au mauvais équilibrage des amplificateurs ainsi que l'instabilité temporelle.

Jusqu'à présent l'analyse des résultats expérimentaux obtenus s'effectuait en appliquant quelques méthodes élémentaires de statistique surtout descriptive. Afin d'analyser quantitativement les qualités d'une telle instrumentation il faut définir des méthodes de traitement statistique mieux adaptées. Pour cela nous avons été amenés à développer des méthodes d'analyse de la variance à deux facteurs sur des données non plus gaussiennes, comme dans le cas classique, mais poissonniennes qui ne supposent donc plus constante la variance.

Dans une première partie, par le choix d'une paramétrisation adéquate des problèmes posés, nous évoquons quelques tests classiques sur structures de Poisson. Cela pourra être considéré comme une présentation synthétique de méthodes inférentielles sur des variables de Poisson, existant sous formes diverses dans la littérature.

La deuxième partie, plus originale, est consacrée à l'analyse de la variance et se révèle particulièrement fructueuse dans l'étude du problème pratique posé. Les résultats obtenus reposent sur des méthodes asymptotiques, c'est pourquoi il nous a paru nécessaire de procéder à une étude par simulation de leur puissance dont rend compte la dernière partie de ce travail.

1 - TESTS D'HOMOGENEITE

On veut tester si les observations n_{ij} peuvent être considérées comme des réalisations d'une même variable de Poisson de paramètre inconnu. Les tests que nous évoquons, faciles à implanter, sont peu coûteux en temps de calcul.

1.1 - Test d'adéquation du khi-deux

La loi limite de la statistique du Khi-deux dépend en général des bornes (non aléatoires et définies par avance) de regroupement des observations. Dans les problèmes pratiques ces bornes sont choisies en fonction des réalisations et sont donc en réalité des variables aléatoires. Ceci peut biaiser la loi asymptotique de la statistique et conduire à des conclusions erronées. Dans le cas de l'adéquation à une loi de Poisson une règle de regroupement et ses effets sur la loi asymptotique ont été étudiés dans [5]. Cette règle de regroupement est basée sur la loi conditionnelle de l'échantillon à la statistique exhaustive du paramètre et le test du Khi-deux qui en découle est calculé en fonction de cette dernière.

1.2- Test d'agrégation (ou d'indice de dispersion)

Ce test est basé sur la remarque suivante : si le processus de Poisson est homogène, alors $(X_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ est un échantillon d'une loi de Poisson dont le paramètre inconnu peut être estimé par :

$$E^\wedge = [\Sigma_{i,j} X_{ij}\ ] / (n.m) \qquad \text{ou} \qquad V^\wedge = [\ \Sigma_{i,j} (\ X_{ij} - E^\wedge)^2\ ] / (n.m-1)$$

Le rapport V^/E^ est proche de 1 et nous pourrons décider qu'il en est significativement éloigné grâce au théorème suivant que l'on pourra trouver dans [20].

Théorème : Si $(X_1,...,X_n)$ est un échantillon d'une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \geq 3$ alors pour n assez grand $(n \geq 35)$ la variable (n-1)V^/E^ suit une loi du Khi-2 à (n-1) degrés de liberté.

Remarque 1.1 : Si les conditions du théorème ne sont pas remplies on peut appliquer le test d'homogénéité de la variance défini par Fisher [12] dont l'algorithme est donné dans [13]. On pourra également remarquer que ce test peut être interpreté comme un test du Khi-2 d'adéquation à la loi uniforme pour les instants de réalisation d'un processus de Poisson dans un intervalle donné, conditionné par le nombre total de réalisations dans cet intervalle [8].

En tant que critère d'homogénéité on peut reprocher à ce test son manque de puissance (l'ensemble des alternatives étant certainement trop riche), et són manque de consistance.

1.3 - Test de rupture

Le test que nous allons développer repose sur une structure ligne-colonne du multidétecteur. En effet il est important de remarquer que de par la conception même du détecteur les anomalies de réponse auront beaucoup plus tendance à affecter globalement une ou plusieurs lignes ou colonnes de celui-ci plutôt qu'une cellule isolée.

Soit (X_t) un processus de Poisson où la variable de Poisson X_t de paramètre λ_t compte le nombre de réalisations d'un événement A jusqu'à l'instant t. On suppose que le processus est homogène c'est à dire que $\lambda_t = vt$. Soit T un instant fixé. Si k évènements se sont réalisés jusqu'à l'instant T, ces évènements se sont produits à des instants aléatoires t_i qui peuvent être considérés comme des réalisations d'une variable U_T de loi uniforme sur l'intervalle de temps [0,T]. Ainsi pour tout instant t fixé dans [0,T], la variable X_t / X_T est un estimateur sans biais de $F_{U_T}(t) = t/T$ sur [0,T].

Dans le cadre de notre problème si nous voulons par exemple tester l'homogénéité en ligne et détecter d'éventuelles lignes perturbées, nous pourrons considérer le processus de Poisson à temps discret défini pour $1 \leq i \leq n$ par :

$X_i = \sum_j X_{ij}$ dont nous avons observé les réalisations $n_i = \sum_j n_{ij}$.

Soit i_0 un instant fixé correspondant à une ligne non perturbée. Pour chaque $i_1 \geq i_0$ les lignes d'indices compris entre i_0 et i_1 sont homogènes si la variable aléatoire U_i introduite plus haut est uniforme sur $[\,i_0, i_1]$

Nous testerons cette hypothèse en utilisant la statistique de Kolmogorov-Smyrnov :

$$\sup_{i_0 \leq i \leq i_1} | \hat{F}_U^{i_0}(i) - \hat{F}_U^{i_1}(i) | = \sup_{i_0 \leq i \leq i_1} | X_i / X_{i_1} - i / i_1 |$$

Si le test rejette l'hypothèse d'homogénéité, la rupture introduite à l'indice i_1 correspond à une ligne non homogène qui ne sera plus comptée comme un instant du processus.

Remarque 1.3 : Le seuil de signification de ce test ainsi que ses propriétés sont mal définis car il s'agit d'un test multiple au sens de [4].

2 - ANALYSE DE LA VARIANCE PAR APPROXIMATION GAUSSIENNE

La structure d'un multidétecteur permet de considérer les lignes et les colonnes comme deux facteurs ayant respectivement m et n niveaux agissant sur la moyenne du phénomène observé. La réponse de la cellule placée à la croisée de la ligne i et de la colonne j peut être considérée comme la réalisation d'une variable de Poisson X_{ij} de paramètre :

$\lambda_{ij} = \mu + u_i + v_j$ où u_i est la composante due à l'effet de la ligne i
v_j est la composante due à l'effet de la colonne j.

Dans cette modèlisation le détecteur est considéré comme homogène s'il existe des constantes u et v telles que : $\forall$ i, $u_i = u$ et $\forall$ j, $v_j = v$.

Pour que la décomposition de λ_{ij} soit unique on imposera des contraintes d'orthogonalité qui conduisent à l'écriture suivante:

$$\lambda_{ij} = \lambda + \alpha_i + \beta_j \quad \text{avec} \quad \Sigma_i \alpha_i = \Sigma_j \beta_j = 0$$

Cette écriture est obtenue en posant :

$\alpha_i = u_i - (1/n)\Sigma_i u_i$, $\beta_j = v_j - (1/m)\Sigma_j v_j$ et $\lambda = \mu + (1/n)\Sigma_i u_i + (1/m)\Sigma_j v_j$

On peut alors envisager de tester trois types d'hypothèse :

H_l : Homogénéité en ligne	$\alpha_1 = \alpha_2 .. = \alpha_n = 0$
H_c : Homogénéité en colonne	$\beta_1 = \beta_2 .. = \beta_m = 0$
H : Homogénéité du multidétecteur	$H_l \cap H_c$

Le cadre que nous venons de décrire est exactement celui de l'analyse de la variance dans lequel on sait proposer des tests pour les hypothèses décrites quand les lois des variables aléatoires X_{ij} sont gaussiennes et de même variance. Une première approche consiste donc à transformer les variables Poissoniennes du plan d'expérience en des variables Gaussiennes de variance égale. Nous verrons au paragraphe suivant comment se passer de l'hypothèse Gaussienne.

2.1 - Approximation d'une loi de Poisson par une loi gaussienne

D'après le théorème limite centrée si X est une variable de Poisson de paramètre λ assez grand ($\lambda \geq 30$) la variable X suit approximativement la loi Gaussienne $N(\lambda,\lambda)$. De manière à accélérer la convergence vers cette loi ($\lambda \geq 12$) et pour stabiliser la variance à 1/4 on peut considérer la variable $Y = \sqrt{X}$ qui suit la loi $N(\sqrt{\lambda},1/4)$ (cf. [1],[11],[21]).

Néanmoins il a été observé que pour des valeurs raisonnables de λ la variance de Y est assez instable. Dans [1] Anscombe a le premier suggéré une transformation du type $Z = \sqrt{X+c}$ pour corriger cette instabilité et obtient les formules asymptotiques suivantes pour la moyenne et la variance de Z :

$$E(Z) = \sqrt{\lambda+c} - [1/8]\,\lambda^{-1/2} + [\,(24c-7) / 128]\,\lambda^{-3/2}$$
$$V(Z) = (1/4)\,[\,1 + (3-8c)/\lambda + (32c^2-52c+17) / (\,32\lambda^2)\,]$$

Ainsi en posant c = 3/8 Anscombe obtient la formule asymptotique suivante :

$$V(Z) = (1/4)\,[\,1 + 1/(16\lambda^2)\,] = 1/4 + O(1/\lambda^2)$$

Les propriétés de la transformation $Z = \sqrt{X+c}$ ont été reprises plus tard dans [16]. Dans cet article la variance exacte de Z est calculée numériquement pour diverses valeurs de λ et de c.

Avec c = 31/80 = 0.386, pour $\lambda \leq 5$, la variance de Z est pratiquement égale à 1/4 et l'approximation gaussienne avec stabilisation de la variance est bonne pour $\lambda \geq 12$. Pour terminer citons [10] pour une étude détaillée de l'approximation gaussienne confirmant ces résultats.

2.2 - Tests

La structure statistique obtenue par application de la transformation non linéaire $Z=\sqrt{X+0.386}$ est bien une structure Gaussienne mais ne définit plus un modèle linéaire. En particulier l'influence des facteurs sur la moyenne de Z n'est plus additive et il existe un terme d'interaction.

On peut néanmoins remarquer que les hypothèses d'abscence d'influence d'un facteur se traduisent par l'abscence d'influence globale du facteur dans le modèle transformé.

Ainsi, les tests que nous proposons sont les tests classiques de l'analyse de la variance [4]. Remarquons toutefois que nous devons remplacer la loi de Fischer-Snedecor intervenant dans ces tests par la loi du Khi-2 puisque la variance est connue et n'a pas à être estimée.

3 - ANALYSE DE LA VARIANCE DANS UNE STRUCTURE DE POISSON

Au lieu d'appliquer les tests classiques d'hypothèses linéaires dans un modèle gaussien d'analyse de la variance nous allons conserver la structure Poissonnienne. Nous disposons de K réalisations d'une famille $(X_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ de variables aléatoires Poissonniennes indépendantes de paramètres λ_{ij}.

Une extension des techniques d'analyse de la variance à deux facteurs a été proposée par GBUR [14]. La méthode proposée par ce dernier repose essentiellement sur le test d'agrégation du paragraphe 1.2, adapté à une structure ligne-colonne dans un plan d'experience Poissonnien à deux facteurs à K répétitions par combinaison des facteurs. Ainsi par exemple, si X_{ijk} désigne la $k^{ième}$ observation de la cellule (i,j) du détecteur, la statistique de test d'abscence d'influence du premier facteur est de la forme :

$$Y = [\ \Sigma_i (X_{i++} - X_{\bullet++})^2\ ] \ / \ [\ (n-1)X_{\bullet++}\ ] \quad \text{où } X_{i++} = \Sigma_j \Sigma_k X_{ijK} \text{ et } X_{\bullet++} = (1/n)\Sigma_i X_{i++}$$

La loi de (n-1)Y est asymptotiquement, quand $K \longrightarrow +\infty$, une loi du Khi-2 à (n-1) degrés de liberté d'où une région critique approximative. Malheureusement, comme nous l'avons déjà remarqué dans le paragraphe 1.2, ce type de test est peu puissant et non consistant. D'autre part l'approximation asymptotique de la loi de Y par une loi du Khi-2 est lente (même vitesse que pour l'approximation d'une loi de Fischer Snedecor par une loi du Khi-2) et de plus une telle approche ne nous permet pas de définir des tests de contrastes pour exhiber les niveaux de tels facteurs qui influencent significativement l'intensité du processus de Poisson.

Le point de départ de notre démarche est fondé sur la remarque suivante : dans l'analyse de la variance sous le modèle gaussien, les estimateurs des paramètres inconnus (moyenne et variance) sont du maximum de vraisemblance et les tests d'hypothèses linéaires sont des tests de rapport de vraisemblance.

La fonction de vraisemblance est ici de forme exponentielle et dans ce cas les estimateurs du maximum de vraisemblance sont le plus souvent obtenus par des algorithmes itératifs de moindres carrés pondérés que l'on pourra trouver par exemple dans [6], [25], [18], [15].

Nous avons adapté à notre contexte une partie de ces résultats pour définir un algorithme de calcul des estimateurs des paramètres. Nous étudions ensuite les qualités asymptotiques de ces estimateurs et nous avons défini des tests d'hypothèses linéaires basés sur le rapport des vraisemblances.

3.1 - Estimation des paramètres dans notre modèle

Soient $1 \leq k \leq K$ et Y_k le vecteur aléatoire à p=n.m composantes obtenu en numérotant par ordre lexicographique les variables aléatoires X_{ij} du $k^{ième}$ échantillon . Ainsi :

$$Y_k(1) = X_{11}, \ldots, \quad Y_k(m) = X_{1,m} \quad , \quad Y_k(m+1) = X_{2,1} \quad , \ldots$$

Soit $\underline{\mu}$ le vecteur de dimension p dont la $i^{ième}$ composante μ_i est le paramètre de la variable de Poisson $Y_k(i)$. Si $y_k = (y_k(1), \ldots, y_k(p))$ est une réalisation du vecteur Y_k, la fonction de vraisemblance de notre modèle s'écrit:

$$L(y_k, \underline{\mu}) = \prod_{r=1}^{p} (1 / y_k(r)!) \exp [\, y_k(r) \operatorname{Ln}(\mu_r) - \mu_r \,]$$

Appelons $Z = (1/K)\Sigma_k Y_k$ et soit $z = (1/K)\Sigma_k y_k$ une réalisation du vecteur aléatoire Z.
La densité conjointe des vecteurs $(Y_k)_{1 \leq k \leq K}$ s'écrit :

$$L(y_1, \ldots, y_K, \underline{\mu}) = h(y_1 .. y_K) . \exp(K\Sigma_r (z(r) \operatorname{Ln}(\mu_r) - \mu_r))$$

Ainsi Z est un estimateur exhaustif de $\underline{\mu}$ que nous supposerons non nul et, à une mesure dominante près, le Logarithme de la fonction de vraisemblance de notre structure est :

$$\Lambda(z, \underline{\mu}) = K.\Sigma_r [\, z(r) \operatorname{Ln}(\mu_r) - \mu_r \,]$$

Notons alors $\underline{v}$ le vecteur dont les n+m-1 composantes sont :

$$v_1 = \lambda, \quad v_2 = \alpha_1 \quad , \ldots, \quad v_n = \alpha_{n-1} \quad , \quad v_{n+1} = \beta_1 \quad , \ldots, \quad v_{n+m-1} = \beta_{m-1}$$

Notre modèle linéaire s'écrit $\underline{\mu} = A.\underline{v}$ où A est une matrice réelle d'ordre (p,n+m-1), définissant le plan d'expérience et décrite par :

$$
A = \begin{array}{l|ccccc}
 & 1\ 2\ 3 & & n\ \ n+1 & & n+m-1 \\
\hline
1 & 1\ 1\ 0 & \ldots & 0\ 1\ 0\ 0 & \ldots & 0 \\
2 & 1\ 1\ 0 & \ldots & 0\ 0\ 1\ 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
n & 1\ 1\ 0 & \ldots & 0\ -1\ -1\ -1 & \ldots & -1 \\
\hline
n+1 & 1\ 0\ 1 & \ldots & 0\ 1\ 0\ 0 & \ldots & 0 \\
n+2 & 1\ 0\ 1 & \ldots & 0\ 0\ 1\ 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
2n & 1\ 0\ 1 & \ldots & 0\ -1\ -1\ -1 & \ldots & -1 \\
\hline
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\hline
n(m-1)+1 & 1\ -1\ -1 & \ldots & -1\ 1\ 0\ 0 & \ldots & 0 \\
n(m-1)+2 & 1\ -1\ -1 & \ldots & -1\ 0\ 1\ 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
nm & 1\ -1\ -1 & \ldots & -1\ -1\ -1\ -1 & \ldots & -1
\end{array}
$$

Soit E l'ensemble des valeurs admissibles de $\underline{\gamma}$ c'est à dire l'ensemble des valeurs $\underline{\gamma}$ telles que $\underline{\mu} = A\,\underline{\gamma}$ soit un vecteur dont les composantes sont strictement positives. L'ensemble E étant ouvert et convexe, la structure statistique associée à notre modèle est une structure exponentielle régulière au sens de Barndorf-Nielsen [3].

En particulier en posant :

$$
u(\underline{\mu}) = \partial\Lambda/\partial\underline{\mu} = K \begin{bmatrix} \dfrac{z(1)}{\mu_1} - 1 \\ \vdots \\ \dfrac{z(p)}{\mu_p} - 1 \end{bmatrix}
\qquad
J(\underline{\mu}) = -\partial^2\Lambda/{}^t\partial\underline{\mu}\partial\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \dfrac{Kz(1)}{\mu_1^2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots\ldots & \dfrac{Kz(p)}{\mu_p^2} \end{bmatrix}
$$

$$I_K(\underline{\mu}) = E(J_K(\underline{\mu})) = K \begin{bmatrix} 1/\mu_1 .. 0 \\ ::::::::::::: \\ 0 ... \quad 1/\mu_p \end{bmatrix}$$ (matrice d'information selon Fisher)

Si elle existe, l'estimation $\hat{v}_K$ de v annule le score $S_K(\underline{v}) = \partial\Lambda/\partial v = {}^tA\ u(\,\underline{\mu}(\underline{v})\,)$ dont la matrice de variance-covariance est ${}^tA\ I_K\ (\underline{\mu})\ A$.

Si K est assez grand, d'après la loi forte des grands nombres $J_K(\underline{\mu})$ converge presque sûrement vers $I_K(\underline{\mu})$ et $-\partial^2\Lambda/{}^t\partial\underline{v}\partial\underline{v} = {}^tA\ J_K(\underline{\mu})\ A$ pourra être remplacée par ${}^tA\ I_K(\underline{\mu})\ A$.

En faisant cette substitution dans l'approximation au second ordre de la fonction de vraisemblance on obtient une fonction concave de sorte que la convexité de E assure, quand il existe, l'unicité de l'estimateur du maximum de vraisemblance. D'où :

Théorème: Pour K suffisamment grand il existe presque sûrement une suite de solutions n_K^ aux équations de vraisemblance :

$$S_K(\,\underline{v}\,) = \partial\Lambda\,/\,\partial\underline{v} = 0$$

On entend par là que Lim Pr (S_K (v^$_K$) = 0) = 1. De plus v^$_K$ converge presque sûrement vers le vrai paramètre inconnu $\underline{v}_0$ et l'estimateur du maximum de vraisemblance, une fois normalisé, est asymptotiquement gaussien c'est à dire :

$[{}^tA\ I_K\ (\,\underline{\mu}\,(\,v\hat{}_K)\,)\ A\,]^{-1/2}\ (v\hat{}_K - \underline{v}_0)$ converge en loi vers la loi N (0, I_{n+m-1})

Enfin l'estimateur du maximum de vraisemblance est asymptotiquement efficace.

Preuve : elle consiste à appliquer les théorèmes 12.7.1, 12.7.2, 12.7.3, 12.7.4 de Wilks [26] p.379-381 puisque la continuité de ${}^tA\ I_K\ (\,\underline{\mu}(\underline{v})\,)\ A$ en $\underline{v}$ sur E et la continuité presque sûre de $S_K(\underline{v})$ nous place dans leurs conditions d'application.

Procédure de calcul

Comme $S_K(\underline{v}) = 0$ est une équation non linéaire en $\underline{v}$ nous appliquerons un algorithme itératif du type Newton-Raphson à l'approximation de Taylor du second ordre de la fonction de vraisemblance.

Ainsi, v^(0) étant une valeur d'initialisation, à la t ième itération nous aurons:

$\underline{v}\hat{}(t+1) = \underline{v}\hat{}(t) + \underline{k}(t)$ où $\underline{k}(t) = [\, {}^tA\, I\hat{}_K(t)\, A\,]^{-1}\, {}^tA\, u(\underline{\mu}(\underline{v}\hat{}(t)))$ où $I\hat{}_K(t) = I_K(\underline{\mu}\,(\underline{v}\hat{}(t)))$
Nous admettrons que la convergence a lieu si la fonction de vraisemblance n'augmente plus.

Remarques :

1- Si la matrice A du plan d'expérience est mal conditionnée on évitera l'inversion de ${}^tA\, I\hat{}_K(t)\, A$ en résolvant : $\min_{\underline{y}} \|w_t - A\,\underline{y}\,\|^2$ où $w_t = I\hat{}_K(t)^{-1}\, u(\underline{\mu}\,(\underline{v}\hat{}(t)))$ et $\|.\|$ est la norme associée au produit scalaire $<x,y> = {}^tx\, I\hat{}_K(t)\, \underline{y}$. Ceci revient à résoudre un problème de moindres carrés pondérés dont la résolution numérique est classique.

2- Pour l'initialisation nous avons pris $\underline{\mu}\,(\underline{v}\hat{}(0)) = z$ et $\underline{v}\hat{}(0)=\underline{k}(0)$. Ce choix conduit à des résultats satisfaisants. Le nombre d'itérations nécessaires pour la convergence n'a jamais dépassé quatre dans les applications avec ce type d'initialisation.

3.2 - Test de non influence des facteurs

Ayant remarqué que la structure statistique étudiée est exponentielle régulière, nous pouvons maintenant appliquer les tests du rapport des vraisemblances maximales.

Soit $\Theta = \{\, \underline{\mu} \in R^p{}_{*+} \,/\, \underline{\mu} = A\underline{v}\,,\ \underline{v} \in R^{n+m-1}\,\}$ de dimension n+m-1 = r. Les hypothèses à tester s'expriment par l'appartenance du paramètre $\underline{\mu}$ à un cylindre Θ_0 de Θ de dimension $q < l$. C'est ainsi par exemple que l'hypothèse H_l de non influence du facteur ligne s'écrit sous la forme :

$$H_l :\ \underline{\mu} \in \Theta_0 = \{\, \underline{\mu} \in \Theta \,/\, \underline{v} \text{ tel que } v_2 = v_3 = \dots = v_n = 0\,\}$$

Les hypothèses à tester étant linéaires le test du rapport des vraisemblances maximales est asymptotiquement le plus puissant et consistant [20]. Plus précisément en notant :

$$\lambda_{\Theta_0,\Theta} = [\,\mathrm{Sup}_{\underline{\mu} \in \Theta_0} L(\,y_1,\dots, y_K\,;\mu\,)\,] \,/\, [\,\mathrm{Sup}_{\underline{\mu} \in \Theta} L(\,y_1,\dots, y_K\,;\mu\,)]$$

si l'hypothèse nulle est satisfaite, la loi asymptotique de la statistique $-2\,\mathrm{Ln}\,\lambda_{\Theta_0,\Theta}$ est une loi du Khi-deux à r-q degrés de liberté.
Les tests de régions critiques définies par : $-2\,\mathrm{Ln}\,\lambda_{\Theta_0,\Theta} \geq c$ où c est une constante dépendant du seuil de signification adopté, ont une puissance qui tend vers 1 quand K tend vers l'infini pour tout $\underline{\mu} \notin \Theta_0$.

Si on définit la déviance de μ par $D(\mu) = 2[\,\Lambda(\mu^{..}) - \Lambda(\mu)\,]$ où $\mu^{..} = z$, alors dans notre cas ce test est défini par la région critique :

$D(\mu_0\hat{}) - D(\mu\hat{}) \geq F^{-1}(\alpha)$ où $\mu_0\hat{}$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ sous l'hypothèse nulle et F^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition du Khi-deux à r-q degrés de liberté.

Signalons enfin que l'on adapte facilement la méthode "S" de H.SCHEFFE ([21] p.69) pour juger des contrastes significatifs. En effet nous avons vu qu'asymptotiquement la loi de $v\hat{}_K$ est une loi Gaussienne de moyenne $\underline{v}_0$ et de matrice de variance : $B = ({}^tA\, I_K(\mu(\underline{v}_0))\, A)^{-1}$

A partir de ce résultat on peut montrer [26] que la statistique : ${}^t(\underline{v}_0 - v\hat{})\, B^{-1}\, (\underline{v}_0 - v\hat{})$ converge également en loi vers une variable du Khi-deux à r degrés de liberté. Ainsi pour toute forme linéaire h sur R^r on obtient : $|\,{}^th\,(\underline{v}_0 - v\hat{}_K)\,| \leq [\,{}^th\,B\,h\,]^{1/2}\ [\,F^{-1}(1-\alpha)\,]^{1/2}$
et suivant le choix de h les tests des divers contrastes.

3.3 - Etude par simulation de la puissance du test d'analyse de la variance.

L'interêt de la méthode de test proposée repose essentiellement sur les qualités asymptotiques des estimateurs du maximum de vraisemblance et par conséquent sur la loi asymptotique du test des rapports des vraisemblances tant sous l'hypothèse nulle que sous l'hypothèse d'hétérogénéité. Il nous a donc paru utile d'estimer expérimentalement d'une part le vrai risque de première espèce α', probabilité de rejeter à tord H_0 correspondant au risque nominal α, et d'autre part la puissance du test proposé pour divers choix de la contre hypothèse paramètrisée par un rapport signal sur bruit donné.

Le terme "rapport signal sur bruit" recouvre souvent dans la littérature des notions différentes, parfois condradictoires. Afin d'en donner une définition cohérante nous nous sommes placés dans le cadre de la comparaison de deux variables de Poisson indépendantes S et B de paramètres respectifs s+b et b. En approchant les lois de $\sqrt{S}$ et $\sqrt{B}$ par les lois gaussiennes de moyennes respectives $\sqrt{s+b}$ et $\sqrt{b}$ et de variance 1/4, le test d'égalité de s=0 est équivalent à tester la nullité de la moyenne de $Y = \sqrt{S} - \sqrt{B}$ dont la loi approchée est $N(s / 2\sqrt{b}, 1/2)$. Il nous a paru donc raisonnable de choisir comme notion de RSB la quantité $s/\sqrt{b}$.

Compte tenu de ces considérations on a retenu deux types de plans d'expérience caractérisés par :

A : pas d'effet des facteurs, soit $\forall i,j : \lambda_{ij} = \lambda$

B : pas d'effet du facteur colonne, mais présence d'un effet additif moyen du facteur ligne à un niveau i_0 fixé soit : $\forall j : \lambda_{i_0 j}$ =constante + α et $\forall i,j :\ i \neq i_0,\ \lambda_{ij}$ = constante

Le nombre de niveaux retenus pour chaque facteur est le même pour les deux plans, le nombre total K des observations par plan étant également le même.
Ainsi, compte tenu des remarques précédentes, on a : $s = \alpha.m.K \quad b = n.m.K.\lambda$
d'où : $\quad RSB = s/\sqrt{b} = (m.K.\alpha) / (\sqrt{n.m.\lambda.K}) = (\alpha\sqrt{m}\sqrt{K}) / (\sqrt{\lambda}\sqrt{n})$

Il a été décidé de réaliser 100 simulations de chacun des plans d'expérience correspondant à des valeurs diverses de RSB. Les observations d'une variable de Poisson utilisées pour en déduire les réalisations des variables y_{ijk} du plan d'expérience ont été obtenues à partir de nombres au hasard sur [0,1] engendrés par un générateur congruentiel. Les méthodes de génération d'une loi de Poisson que nous avons utilisées diffèrent selon la grandeur du paramètre et ont été mises au point dans [2]. Nous avons compté pour chaque plan le nombre de rejets sur les 100 tests effectués, ceci nous permettant d'estimer le seuil réel de signification et la puissance du test retenu.

On peut récapituler les résultats obtenus dans les tableaux suivants :

$K = 20, \; n = 16, \; m = 16, \; \lambda = 8$

RSB	0.52	0.54	0.57	0.59	0.62	0.65	0.67	0.70	0.72	0.85	0.90
β	0.32	0.40	0.37	0.38	0.44	0.43	0.48	0.59	0.56	0.65	0.75

$K = 20, n = 16, m = 16, \lambda = 100$

RSB	0.52	0.54	0.57	0.59	0.62	0.65	0.67	0.70	0.72	0.85	0.90
β	0.33	0.40	0.46	0.46	0.46	0.50	0.51	0.54	0.55	0.65	0.70

$K = 20, n = 16, m = 16, \lambda = 10000$

RSB	0.52	0.54	0.57	0.59	0.62	0.65	0.67	0.70	0.72	0.85	0.90
β	0.25	0.33	0.35	0.36	0.35	0.40	0.41	0.43	0.50	0.58	0.62

Dans les tableaux ci-dessus β *représente la puissance estimée du test pour diverses alternatives fixées par les valeurs de* rsb *à un seuil nominal de 10% . L'estimation du seuil de signification réel est égale en moyenne à 9.9%.*

De plus quelques simulations semblent indiquer que la puissance du test ne dépend que de RSB et du seuil de signification. On pourrait, par ailleurs, se demander s'il est vraiment nécessaire d'avoir recours à une méthode spécifique au cas poissonnien et si les méthodes "naïves" ne sont pas aussi sensibles. C'est pourquoi nous avons également appliqué les autres tests d'homogénéité dont les résultats ont confirmé la supériorité de la méthode spécifique.

D'autre part, on pourrait aussi envisager, à condition que les comptages se fassent sur une durée plus longue, d'effectuer l'approximation gaussienne d'une loi de Poisson mais sans stabilisation puisque cette dernière détruit l'additivité de l'influence des facteurs. Or dans ce cas, la variance des observations dépend linéairement de leur moyenne et il faut envisager comme dans le cas Poissonnien des statistiques de rapport du maximum de vraisemblance. On peut alors aisement s'apercevoir que les estimateurs et les tests obtenus dans ce cas sont identiques à ceux obtenus dans le cas Poisonnien. Cela n'a rien de surprenant car nous n'avons utilisé dans notre algorithme que la relation entre la moyenne et la variance d'une loi de Poisson et des propriétés assez générales des structures exponentielles.

4 - TEST DE STABILITE .

Lorsqu'on observe un phénomène durant une longue période de temps le problème de la stabilité du modèle est fréquemment posé. La non stationnarité sera envisagée ici sous l'angle de la segmentation de l'intervalle d'observation en phases stationnaires.

Nous avons supposé que le processus de comptage lié à chaque cellule est un processus de Poisson. Ainsi si $n_i(t,t+h)$ désigne le comptage de la cellule i dans l'intervalle $[t,t+h[$ nous modélisons $n_i(t,t+h)$ comme réalisation de $N_i(t+h) - N_i(t)$ où $N_i(t), t \geq 0$ est un processus de Poisson d'intensité f_i. L'hypothèse de stationnarité segmentée entraîne que pour une durée d'observation $h \leq T$ le processus est relativement stationnaire c'est à dire que l'intensité f_i est une fonction constante sur $[t,t+h]$ et égale à $\gamma_i(t)h$. Le détecteur ou plutôt la cellule i sera stable temporellement si $\gamma_i(t)$ est une fonction constante en t.

Admettons que pour une cellule du détecteur ou plus généralement pour une région R de celui-ci on enregistre un flux homogène à un instant t pour une durée h_1 et un comptage à un instant s ($s \geq t+h_1$) pour une durée h_2 . Sous l'hypothèse à priori d'une stationnarité segmentée nous sommes en présence de deux variables aléatoires de Poisson X et Y de moyennes respectives $\gamma_R(s)\, h_2$ et $\gamma_R(t)\, h_1$. L'hypothèse de stabilité est traduite alors par $H_0 : \gamma_R(s) = \gamma_R(t)$ la contre hypothèse à tester étant $\gamma_R(s) < \gamma_R(t)$ car il y a toujours, en cas de non stabilité, atténuation de l'intensité. Il s'agit de définir un test approprié de cette hypothèse et de déterminer les durées d'enregistrement nécessaires pour obtenir une puissance donnée.

4.1 - Comparaison de deux lois de Poisson

Il existe un test uniformément le plus puissant parmi les tests sans biais pour tester l'égalité de $\gamma_R(s)$ à $\gamma_R(t)$ à un seuil de signification α donné, ce dernier étant un test conditionnel basé sur la loi binomiale ([17] p.141). Cependant ce dernier étant basé sur une loi discrète, il a le désavantage d'avoir un seuil de signification réel plus petit que le seuil théorique désiré. Dans le cas $h_1 = h_2$ un test approché de H_0 est proposé par SICHEL [23] ; ce test s'avère supérieur au test exact car son niveau de signification réel est plus proche du seuil théorique. SHIUE et BAIN [24] ont généralisé ce test approché au cas $h_1 \neq h_2$ et ont également étudié sa puissance.

Plus précisement, en posant $d = h_1/h_2$, leur test rejette H_0 quand :

$$(4.1) \qquad Z_1 = (Y-dX) / [d(X+Y)]^{1/2} \geq z_{1-\alpha}$$

où z_q est le quantile d'ordre q de la loi normale centrée réduite.

En définissant $\rho = \gamma_R(t) / \gamma_R(s)$ et en utilisant l'approximation gaussienne pour la loi de Z_1 ces derniers montrent que pour d donné le choix approprié de la valeur de $\gamma_R(s)\, h_2$ pour atteindre une puissance p à une alternative ρ fixée est donné par l'expression :

$$(4.2) \qquad h_2\, \gamma_R(s) = (\rho/d + 1) \; [((1+d\rho) / (d+r))^{1/2} z_{1-\alpha} + z_p]^2 \; / (\rho-1)^2$$

Ainsi, si l'on dispose d'une estimation quelconque de la vraie valeur de $\gamma_R(s)$, les durées d'enregistrement h_1 et h_2 peuvent être déterminées pour ρ, d, α et p donnés.

Malgré le fait que le niveau de signification et la puissance du test définis par (4.1) et (4.2) sont approximativement corrects, le vrai niveau est un peu supérieur au niveau théorique pour d petit et un peu inférieur pour d grand. De même la puissance à tendance à être plus élevée que la puissance théorique avec pour conséquence de donner des valeurs de $h_2\, \gamma_R(s)$ plus grandes que nécéssaire. Ceci peut s'expliquer d'une part par le fait que la convergence de Z_1 vers la loi normale est lente et d'autre part par le fait que la variance de Z_1 est estimée de manière récursive conduisant à des approximations grossières de $h_2\, \gamma_R(s)$.

Le test que nous proposons ici rejette H_0 quand :

$$(4.3) \qquad Z_2 = 2 [(Y + c(d))^{1/2} - (dX + c(d))^{1/2}] / (1+d)^{1/2} \geq z_{1-\alpha}$$

où c(d) est une fonction discrète de d définie par :

$$c(d) = 0.001.1_{[0,1[}(d) + 0.386.1_{[1,2[}(d) + 1.67.1_{[2,3[}(d) + 2.7.1_{[3,\infty[}(d)$$

En effet nous avons vu que la transformation de stabilisation de la variance déjà utilisée au paragraphe 2.1 accélère la convergence en loi et donc Z_2 converge plus rapidement que Z_1 vers la loi gaussienne quand $\lambda = \mathrm{Min}\ \{ h_2\gamma_R(s), h_1\gamma_R(t) \}$ tend vers l'infini.

D'après les résultats rappelés dans ce paragraphe, que la transformation contienne le terme c(d) ou pas, la moyenne de Z_2 est $2.(\sqrt{\rho}-1)\sqrt{h_2\,\gamma_R(s)d}\ /\sqrt{1+d}$ à l'ordre $0(\lambda^{-1/2})$, mais la variance de Z_2, lorsque $d\geq 1$, est améliorée en passant d'un ordre $1+0(\lambda^{-1})$ à $1+0(\lambda^{-2})$ par l'effet du terme c(d).

Calculons la puissance exacte du test (4.3) :

$$P(Z_2 \geq z_{1-\alpha}) = \Sigma_{x>0} P\{ Z_2 \geq z_{1-\alpha} / X=x \} P\{ X = x \}$$

$$= \Sigma_{x>0} P\{ X=x \}\ P \{ Y \geq [(1 + d)^{1/2} z_{1-\alpha} / 2 + (dx + c(d))^{1/2}]^2 - c(d) \}$$

$$= \Sigma_{x>0} (1/x!). (\gamma_R(s)h_2)^x \mathrm{Exp}[-\gamma_R(s)h_2]\ \Sigma_{y\geq yo} (1/y!) (\gamma_R(t)h_1)^y\ \mathrm{Exp}[-\gamma_R(t)h_1]$$

$$= \Sigma_{x>0}\Sigma_{y\geq yo} (1/ x!y!) (\gamma_R(s)h_2)^x (\gamma_R(t)h_1)^y\ \mathrm{Exp}[\gamma_R(s)h_2 -\gamma_R(t)h_1]$$

où y0 est la partie entière de : $[(dx + c(d))^{1/2} + 0.5\ (1 + d)^{1/2}\ z_{1-\alpha}]^2 - c(d)$

Par approximation gaussienne la variable Z_2 suit une loi gaussienne réduite de moyenne :
$2\ [h_1\ \gamma_R(t) + c(d))^{1/2} - (d\ h_2\ \gamma_R(s) + c(d))^{1/2}] / (1+ d)^{1/2}$

or $[2 / (1+ d)^{1/2}]\ [(h_1\ \gamma_R(t) + c(d))^{1/2} - (d\ h_2\ \gamma_R(s) + c(d))^{1/2}]$

$$= [2 / (1+d)^{1/2}]\ [(\rho\ d\ h_2\ \gamma_R(s) + c(d))^{1/2} - (d\ h_2 \gamma_R(s) + c(d))^{1/2}]$$

$$= [2 / (1+d)^{1/2}]\ [(d\ h_2\ \gamma_R(s))^{1/2}\ (\sqrt{\rho} - 1)]\ .$$

Une approximation de cette puissance est donnée par :

$$p = 1 - F\ [z_{1-\alpha} - 2\ ((-1+\sqrt{\rho}\ )\ (\sqrt{h_2\gamma_R(s)d}\ )) / \sqrt{1+d}\ ]$$

où F est la fonction de répartition de la loi N(0,1).

Ainsi : (4.4) $h_2\gamma_R(s) = [(z_{1-\alpha} + z_p)^2\ (1+d)] / [4\ d\ (\sqrt{\rho}-1)^2]$

Les résultats numériques (cf table 2) montrent que le seuil de signification et la puissance exacte du test donné par (4.1) et (4.2) sont plus éloignés des valeurs théoriques, que ceux du test proposé, particulièrement pour les grandes valeurs de d.

d	r	α_n	α_{Sh}	p_n	p_{Sh}
0.5	4.0	<u>0.054</u>	0.059	<u>0.894</u>	0.922
0.5	3.0	0.046	0.053	<u>0.894</u>	0.915
0.5	2.0	0.047	0.052	<u>0.896</u>	0.908
1.0	4.0	<u>0.051</u>	0.052	<u>0.896</u>	0.922
1.0	3.0	<u>0.049</u>	0.049	<u>0.899</u>	0.916
1.0	2.0	<u>0.049</u>	0.048	<u>0.900</u>	0.908
2.0	4.0	<u>0.044</u>	0.042	<u>0.900</u>	0.920
2.0	3.0	<u>0.052</u>	0.041	<u>0.897</u>	0.913
2.0	2.0	<u>0.050</u>	0.046	<u>0.901</u>	0.905
4.0	4.0	<u>0.052</u>	0.038	<u>0.904</u>	0.912
4.0	3.0	<u>0.054</u>	0.038	<u>0.903</u>	0.908
4.0	2.0	<u>0.054</u>	0.044	<u>0.904</u>	0.903

Table 2 . α_n, p_n *désignent le seuil et la puissance du test (4.3)*
α_{Sh}, p_{Sh} *désignent le seuil et la puissance du test (4.1)*
pour un seuil $\alpha = 0.05$ et une puissance $p = 0.9$.
Les résultats soulignés indiquent un meilleur résultat

Ainsi la valeur résultante de $h_2\gamma_R(s)$ dans (4.4) peut dans certain cas conduire à une économie considérable du temps d'observation.

Le §.3 de Shuie et Bain [24] traite l'exemple suivant : soit à tester la qualité d'un nouveau composant dans une flotte de n_1=10 avions, contre le composant standard dans une autre flotte de n_2 = 20 avions, avec α = 0.05 , p = 0.90 , ρ = 2 lorsque les deux flottes sont observées pendant $s=s_1=s_2$ heures de vol. Ici $n_2s_2 / n_1s_1 = 2$ et l'équation (4.2) donne $n_1s_1\gamma_1 = 19{,}5$.
Si le taux de défaillance de la nouvelle composante est de 2 défaillances par 100 heures de vol alors s = 19,5 / (10x0.02) = 97,5 heures de vol par avion et donc le temps total de vol nécéssaire est de 975 h pour la première flotte et 1950 h pour la seconde.
Avec l'équation (4.4) on a $n_1\gamma_1s_1 = 18{,}7$ et donc s = 93,5 heures de vol par avion, d'où 935 h pour la première et 1870 pour la seconde flotte. Le résultat souhaité est obtenu avec une économie totale de 120 heures de vol.

REMERCIEMENTS : Les auteurs tiennent à exprimer leurs remerciements à l'institut Laue Langevin, et plus particulierement à Monsieur A.FILHOL, pour leur acceuil chaleureux. Ils tiennent également à remercier un des rapporteurs pour avoir porté à leur connaissance la référence [14] et pour les suggestions très utiles qui ont permis d'ameliorer la présentation de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANSCOMBE, F.J., The transformation of Poisson, "Binomial and negative binomial data", Biometrika,1948, Vol. 35, pp. 246-254

[2] ANTONIADIS, A., BERRUYER, J. et FILHOL, A . "Multidetecteurs bi-dimensionnels : simulation d'un spectre avec un ou plusieurs pics de Bragg". Rapport ILL 85AN19T Grenoble, 1985.

[3] BARNDORF-NIELSEN. Information and exponential families, John Wiley and Sons, 1978.

[4] BARRA ,J.R, Notions fondamentales de statistique mathématique, Dunod Paris, 1971.

[5] BOL'SHEV, L.N and MIRVALIEV, M., "Chi square goodness-of-fit test for the Poisson, binomial and negative binomial distributions", Theory of probability and its applications, Vol. 23, n° 3, pp. 461-474 , 1978.

[6] CHARNES, A., FROME, E.L. and YU P.L, "The equivalence of generalized least squares and maximum likelihood estimates in the exponential family", J.A.S.A, Vol. 71, n° 353, pp. 169-171, 1976.

[7] CONVERT, P. and FORSYTH, J.B, Position sensitive detection of thermal neutrons, Academic Press - New-York, 1983.

[8] COX, D.R. and LEWIS, P.A.W, "The statistical analysis of series of events", Metuens statistical monographs, Ed. Methuen & Co Ltd, London, 1968.

[9] CURRIE, L.A, "Limits for qualitative detections and quantitative determination", Anal.chem., Vol. 40, pp. 586-593, 1968.

[10] DESHAYES, J., "Rupture de modèles pour des processus de Poisson", Annales scientifiques de l'universite de Clermont, n° 78, 1984.

[11] EFRON, B., "Transformation theory : how normal is a family of distributions", Annals of statistics, Vol. 10, n° 2, pp. 323-339, 1982.

[12] FISHER, R.A , "The significance of deviations from expectations in a Poisson serie", Biometrics, Vol. 6, pp. 17-24, 1950.

[13] FROME, E.L, Algorithm AS171: "Fisher's exact variance test for the Poisson distribution", Journal of royal statistical society, serie C. Appl. stat., Vol. 31, n° 3, pp. 67-69, 1982.

[14] GBUR, J.R "Analysis of variance with Poisson responses", Comm. Stat., Theory & methods, Ser. A, Vol. 5, pp.433-445, 1979.

[15] HENRICI, P., Elements of numerical Analysis, Ed. John Wiley and Sons, 1964.

[16] KIHLBERG, J.K, HERSON, J.H, and SCHOTZ W.E, "Square root transformation revisited", Applied statistics, JRSS, Ser. C, n° 1, pp. 76-81, 1971.

[17] LEHMANN, E.L, Testing statistical hypothesis, John Wiley and Sons, 1959.

[18] MC CULLACH, "Quasilikelihood functions", Annals of statistics, Vol. 11, pp. 59-67, 1983.

[19] PIELOU, E.C, An introduction to mathematical ecology, Wiley-Interscience, 1969.

[20] RAO, C.R and CHAKRAVARTI, I.M, "Some small sample tests of significiance for a Poisson distribution", Biometrics, Vol. 12, pp. 264-282, 1956.

[21] RAO, C.R, Linear statistical inference and its applications, 2-ième édition, John Wiley and Sons, 1973.

[22] SCHEFFE, H., The analysis of variance , John Wiley and Sons, 1959.

[23] SICHEL, H.S., "On a significance test for two Poisson variables", JRSS, Serie C, appl. statist., Vol. 22, pp. 50-58, 1973.

[24] SHIUE, W.K, and BAIN, L.J , "Experiment size and power comparisons for two sample Poisson tests", JRSS, serie C, appl. statist., Vol. 31, n° 2, pp. 130-134, 1982.

[25] WERDDERBURN, R.W.M, "Quasilikelihood functions and the Gauss-Newton method", Biometrika, Vol. 61, n° 3, pp. 439-447, 1972.

[25] WILKS, S.S, Mathematical statistics, Ed. John Wiley and Sons, 1962.