Statistique et analyse des données

I. C. Lerman

Association entre variables qualitatives ordinales « nettes » ou « floues »

Statistique et analyse des données, tome 8, nº 3 (1983), p. 41-73
<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1983__8_3_41_0>

Statistiques et Analyse de données
1983 - Vol. 8 n° 7 - pp. 41-73

ASSOCIATION ENTRE VARIABLES QUALITATIVES ORDINALES "NETTES" OU "FLOUES"

I.C. LERMAN
I.R.I.S.A. - L.A. 227 du C.N.R.S.
35042 RENNES CEDEX

Résumé : *Moyennant une notion concrète de "degré d'appartenance" d'un individu à un profil de comportement défini par une classe d'attributs "orientés", une variable qualitative ordinale "floue"* β *a sa* λ*-ème modalité définie par une telle classe* β_λ *de tels attributs,* $1 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda$.

Entre la suite ordonnée $\{\beta_\lambda / 1 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda\}$ *et celle* $\{c_\ell / 1 \leqslant \ell \leqslant L\}$ *des modalités d'une variable qualitative ordinale "nette", nous proposons un coefficient d'association conforme à nos indices de proximité entre variables. Ce nouveau coefficient généralise celui que nous avions élaboré entre deux variables qualitatives ordinales, ce dernier généralisant de façon adéquate le* τ *de M.G. Kendall.*

La nécessité du coefficient que nous établissons ici s'est imposée à nous dans la pratique pour évaluer la performance d'un type de régression qualitative entre une variable "cible" et la suite ordonnée des classes issues d'une classification automatique d'attributs-modalités.

Abstract : *Each modality of a fuzzy ordinal qualitative variable* β, *is defined by a classe* β_λ *of "directed" attributes,* $1 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda$. *This definition makes use of a concrete notion of a "degree of belonging" of an individual to a profile of behaviour determined by a class of "directed" attributes.*

Accordingly to our general notion of proximity between variables, we construct here an association coefficient between an ordinary (said "net" by

difference with the fuzzy case) qualitative ordinal variable and a fuzzy one. This coefficient generalize those that we have established to compare two qualitative ordinal variables and which generalizes in a suitable way the M.G. Kendall's coefficient.

This new coefficient is able to evaluate the quality of a special type of an ordinal discreete regression between ordinal qualitative variable to be explained and an ordered sequence of classes issued from an automatic classification of a set of attributes-modalities.

TITRES DE LA SUITE DES PARAGRAPHES

I - INTRODUCTION

La donnée est définie par la description d'un ensemble fini E d'individus au moyen d'un ensemble fini V de variables qualitatives. Pour dissiper toute ambiguité, mais sans entrer dans un formalisme excessif, nous allons commencer par préciser notre terminologie.

Un <u>attribut</u> est un élément d'un ensemble fini de qualités établies pour la description de E. A un attribut de description <u>a</u>, on peut associer une variable logique α à valeurs 0 ou 1 dont la valeur 1(resp. 0) chez un individu donné, indique la présence (resp. absence) de l'attribut chez cet individu. Nous représentons un attribut donné a par le sous ensemble E(a) de E formé des individus qui possèdent l'attribut : $E(a)=\alpha^{-1}(1)$.

Les valeurs d'une variable qualitative sont appelées modalités et chaque modalité détermine un attribut qu'on pourra dans ce cas appeler attribut-modalité. Comme c'est le cas généralement, nous supposons que l'ensemble des attributs-modalités d'une même variable qualitative forme un système exhaustif ; c'est-à-dire, que ces modalités sont mutuellement exclusives et complémentaires ; ou encore, chaque individu possède exactement une modalité de la variable qualitative.

Enfin, nous dirons que B est une classe d'attributs "orientés" s'il n'existe pas dans B plus d'un seul attribut-modalité d'une même variable qualitative.

La classification hiérarchique d'attributs-modalités provenant de variables qualitatives ordinales où on distingue une variable "cible" qu'il s'agit de "comprendre" par rapport aux autres variables, a conduit à une forme régressive de l'interprétation [TALLUR(1982), LERMAN(1983)]. L'exemple concret qui a directement motivé cette forme de l'interprétation et le calcul présenté ici, est une étude épidémiologique sur les facteurs du risque cardiovasculaire où la variable "cible" à "expliquer" est la Tension Artérielle Systolique. Ainsi, une même variable qualitative ordinale peut provenir du découpage en intervalles du domaine de variation d'un paramètre au départ quantitatif. Dans le cas mentionné, ce découpage a été effectué par le médecin ; toutefois, nous disposons d'un algorithme quasi-optimal de discrétisation de variables statistiques numériques [KERJAN(1978), LAFAYE(1979a),(1979b)].

La méthode évoquée ci-dessus nous permet de définir un couple de suites ordonnées qui se correspondent

$(\{B_j/1\leq j\leq k\},\{c_j/1\leq j\leq k\})$,

où B_j est une classe d'attributs dont chacun représente la réunion d'une suite connexe de modalités d'une même variable qualitative ordinale et où c_j est un attribut résultant de la réunion d'une suite connexe de modalités de la variable "cible", c_j correspondant à B_j, $1\leq j\leq k$.

Pour mesurer la qualité de l'adéquation ordinale entre la suite des modalités de la variable à "expliquer" c et la suite des classes B_j, $1\leq j\leq k$, nous avons à définir une mesure de l'intensité du lien entre la variable qualitative ordinale, que nous dirons "nette" c, et celle, que nous dirons "floue", dont chaque modalité est définie par une classe d'attributs "orientés" (i.e. rappelons-le, telle que deux attributs correspondants à deux modalités exclusives d'une même variable qualitative ne peuvent tous les deux y appartenir).

Si on n'avait pas à tenir compte de l'ordre, notre problème se trouve résolu au moyen d'un indice d'association que nous avons mis au point et développé entre une variable qualitative nominale "nette" c dont une même modalité est c_j et celle "floue" dont une modalité se trouve définie par la classe B_j d'attributs [LERMAN(1979,(1981) Chap.3]. Cette construction suppose la notion, que nous utiliserons ici de "degré d'appartenance" d'un individu donné à une classe d'attributs "orientés". Mentionnons que, dans la référence citée, nous étudions le cas le plus général du croisement de deux classifications "floues".

La situation qui se présente à nous ici de comparaison d'une variable qualitative ordinale "nette" avec une variable qualitative ordinale "floue" -dont chaque modalité se trouve définie par une classe d'attributs- est donc nouvelle et originale. Cette comparaison généralise celle entre deux variables qualitatives ordinales définissant un couple de préordres totaux sur l'ensemble des individus. Enfin, cette situation peut être généralisée par la comparaison de deux variables qualitatives ordinales "floues".

Notre démarche reste naturellement la même pour élaborer un indice d'association entre structures statistiques. D'ailleurs, pour permettre les généralisations mentionnées et être complet au niveau de cet article, nous allons reprendre de façon plus locale la construction de l'indice d'association entre variables qualitatives ordinales "nettes". Cette façon qui pourra apparaître plus précise que dans [LERMAN(1981), Chap.2], fait explicitement appel aux fonctions indicatrices des classes d'individus dont chacune est caractérisée par la possession d'une même modalité de l'un des deux caractères qualitatifs à comparer.

II - INDICE D'ASSOCIATION ENTRE VARIABLES QUALITATIVES ORDINALES "NETTES"

II.0 - Préambule

Rappelons rapidement les différentes étapes de la construction d'un indice d'association entre structures statistiques α et β -ayant un caractère fini d'un point de vue mathématique- que nous avons maintes fois reprises :

- représentation ensembliste (i.e. par des parties d'un ensemble convenablement défini à partir de l'ensemble des individus) des variables α et β.

- introduction d'un indice "brut" de proximité entre α et β, en termes de cardinal de l'intersection des ensembles $R(\alpha)$ et $R(\beta)$ représentant respectivement les variables α et β.

- définition d'une hypothèse d'absence de lien (h.a.l.) où à α(resp.β) on associe une variable aléatoire α'(resp.β') ayant, d'une certaine façon, les mêmes caractéristiques cardinales que α(resp.β).

Comme nous le montrons dans [LERMAN(1976) repris dans (1981)], la nature formelle de cette hypothèse d'absence de liaison tire son origine dans les travaux de A. Wald, J. Wolfowitz [WALD & WOLFOWITZ(1944)] et M.G. Kendall [KENDALL(1938)], où elle a été introduite à des fins de tests d'hypothèses d'indépendance entre variables. C'est dans [LERMAN (1984)] que nous justifions de façon définitive l'usage de cette h.a.l. pour l'évaluation des associations entre variables et ce, sous un angle de statistique inférentielle plus classique où l'ensemble E des objets est regardé comme un échantillon aléatoire provenant d'une vaste population $\mathcal{P}$.

- étude de la v.a. associée à l'indice "brut" dans l'h.a.l. et calcul de la moyenne et de la variance de cette v.a.

- l'indice "brut" centré et réduit définira l'indice d'association qui se réfère à une échelle de probabilité définie par la loi normale centrée et réduite dans l'h.a.l..

II.1 - Notations, indice brut et h.a.l.

$\{c_\ell/1\leq\ell\leq L\}$ (resp. $\{d_m/1\leq m\leq M\}$) désignera la suite ordonnée des modalités de la variable qualitative ordinale c (resp.d). Les variables c et d sont à comparer sur un ensemble fini E d'objets ou individus. On note n le cardinal de E de sorte que $I=\{1,2,\ldots,i,\ldots,n\}$ indexera E. On supposera une fois pour toutes $n>4$, ce qui suffira pour la validité de l'ensemble des formules.

$\{C_\ell/1\leq\ell\leq L\}$ (resp.$\{D_m/1\leq m\leq M\}$) est la suite des classes d'objets définie par la variable c(resp.d) ; en d'autres termes C_ℓ(resp.D_m) est le sous ensemble de E formé des objets qui possèdent la modalité c_ℓ(resp.d_m) de c(resp.d), $1\leq\ell\leq L$, $1\leq m\leq M$. On suppose bien entendu $L\geq 2$ et $M\geq 2$.

Les préordres totaux sur E, respectivement associés à c et à d sont désignés par ω et ϖ qu'on représente dans ExE par

$R(\omega)=\sum\{C_\ell \times C_{\ell'}/1\leq\ell<\ell'\leq L\}$

et $R(\varpi)= \sum\{D_m \times D_{m'}/1\leq m<m'\leq M\}$. (1) (sommes ensemblistes)

$\{\xi_{ij}/(i,j) \in I^{[2]}\}$ (resp. $\{\eta_{ij}/(i,j) \in I^{[2]}\}$) désignera la fonction indicatrice de $R(\omega)$ (resp. de $R(\varpi)$), où nous avons noté $I^{[2]}$ l'ensemble des couples à composantes distinctes de I.

Introduisons ϕ_{c_ℓ} (resp. ϕ_{d_m}) la fonction indicatrice de la classe C_ℓ(resp. D_m), $1\leq\ell\leq L$ (resp. $1\leq m\leq M$). On a

$$(\forall(i,j) \in I^{[2]}),\ \xi_{ij}= \sum\{\phi_{c_\ell}(i)\phi_{c_{\ell'}}(j)/1\leq\ell<\ell'\leq L\}$$

$$\eta_{ij}= \sum\{\phi_{d_m}(i)\phi_{d_{m'}}(j)/1\leq m<m'\leq M\}. \quad (2)$$

Avant de nous engager plus avant, répétons que l'intérêt de ce calcul par rapport à celui de [LERMAN(1981) Chap.2] -où on utilise directement les fonctions indicatrices ξ et η- est de mettre en évidence le rôle des fonctions indicatrices ϕ_{c_ℓ} et ϕ_{d_m}, ce qui rendra plus explicite la nature des calculs et surtout permettra les généralisations visées ici.

Pour alléger les notations, nous noterons ϕ_ℓ(resp. ψ_m) au lieu de ϕ_{c_ℓ} (resp.ϕ_{d_m}), $1\leq\ell\leq L$ (resp. $1\leq m\leq M$).

L'indice "brut" de proximité se met sous l'une des formes suivantes :

$s(c,d)=\text{card}[R(\omega)\ \ R(\varpi)]$

$=\sum\{\xi_{ij}\eta_{ij}/(i,j)\in I^{[2]}\}$

$=\sum\{\sum\{\phi_\ell(i)\phi_{\ell'}(j)\psi_m(i)\psi_{m'}(j)/(i,j)\in I^{[2]}\}/\ell<\ell',m<m'\}$

$=\sum\{\sum\{\phi_\ell(i)\psi_m(i)\phi_{\ell'}(j)\psi_{m'}(j)/(i,j)\in I\times I\ /1\leq\ell<\ell'\leq L,\ 1\leq m<m'\leq M\}$

-car pour tout i $\phi_\ell(i)\phi_{\ell'}(i)=0$ si $\ell<\ell'$ (resp.$\psi_m(i)\psi_{m'}(i)=0$ si $m<m'$)-

$=\sum\{n(\ell\wedge m)n(\ell'\wedge m')/\ell<\ell',\ n<m'\}$ (3)

où nous avons noté

$n(\ell\wedge m)=\text{card}(C_\ell\cap D_m)$, $1\leq\ell\leq L$, $1\leq m\leq M$.

Sans risque d'ambiguité, compte tenu du contexte des formules que nous proposerons, nous noterons également

$n(\ell)=\text{card}(C_\ell)$, $n(m)=\text{card}(D_m)$;

L'h.a.l. associe à la variable c(resp.d) une v.a. c' (resp.d') ; c'est-à-dire, au préordre total ω(resp.ϖ), un préordre total aléatoire ω'(resp.ϖ') dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniformément répartie, de tous les préordres totaux de même composition $(n(1),\ldots,n(\ell),\ldots,n(L))$ (resp.$(n(1),\ldots,n(m),\ldots,n(M))$). Nous avons montré [LERMAN(1973) repris dans (1981) Chap.2] que l'h.a.l. peut avoir une forme unilatérale où on fixe ω(resp.ϖ) et on associe à ϖ(resp.ω), un préordre aléatoire ϖ'(resp.ω') ; la v.a. s(c,d') ayant la même distribution que celle s(c',d) qui est donc celle de s(c',d').

Nous allons dans ces conditions ci-dessous fixer la variable d (i.e.) le préordre total ϖ) et associer à la variable c, une v.a. c'(i.e. au préordre total ω, un préordre total aléatoire ω') conformément à l'h.a.l. exprimée ci-dessus.

II.2 - <u>Espérance mathématique et variance de la v.a. s(c'd,)</u>

$\{C'_\ell/1\leq\ell\leq L\}$ désignera la suite des classes du préordre aléatoire ω'. ϕ'_ℓ est la v.a. indicatrice de C'_ℓ, $1\leq\ell\leq L$. Enfin, on notera ξ' la v.a. indicatrice de la partie aléatoire $R(\omega')$ de ExE :

$R(\omega')=\sum\{C'\times C'_{\ }/1\leq\ell<\ell'\leq L\}$ (4)

La v.a. $s(c',d)$ peut se mettre sous l'une des deux formes :

$$s(c',d)=\sum\{\xi'_{ij}\eta_{ij}/(i,j)\in I^{[2]}\}$$
$$=\sum\{\sum\{\phi'_{\ell}(i)\phi'_{\ell}(j)\psi_m(i)\psi_{m'}(j)/(i,j)\in I^{[2]}\}/\ell<\ell',m<m'\} \qquad (5)$$

Or

$$\mathcal{E}[\phi'_{\ell}(i)\phi'_{\ell'}(j)]=n(\ell)n(\ell')/n(n-1) \;; \qquad (6)$$

il s'agit en effet de la proportion de couples de parties de E, de cardinaux respectifs $n(\ell)$ et $n(\ell')$ telles que la première partie (resp. la seconde) inclut l'objet codé i(resp.j).

De sorte qu'on a

$$\mathcal{E}[\underline{s}(c',d)]=\frac{1}{n(n-1)}\sum\{n(\ell)n(\ell')n(m)n(m')/1\leq\ell<\ell'\leq L,\ 1\leq m<m'\leq M\}. \quad (7)$$

Nous allons maintenant procéder au calcul de la <u>variance</u> dont la partie cruciale concerne <u>le moment absolu d'ordre 2</u>.

On a la décomposition suivante de $I^{[2]}\times I^{[2]}$ selon la structure propre d'un élément courant $((i,j),(i',j'))$:

$$I^{[2]}\times I^{[2]}=D+D'+G_1+G'_1+G_2+G'_2+H, \qquad (8)$$

où la somme est ensembliste et où, des lettres différentes indiquant des indices différents,

$$\begin{array}{lll}
D=\{((i,j),(i,j))\} & \text{de cardinal} & n(n-1)\\
D'=\{((i,j),(j,i))\} & \text{"} \quad \text{"} & n(n-1)\\
G_1=\{((i,j),(i,k))\} & \text{"} \quad \text{"} & n(n-1)(n-2)\\
G'_1=\{((i,j),(h,i))\} & \text{"} \quad \text{"} & n(n-1)(n-2)\\
G_2=\{((i,j),(h,j))\} & \text{"} \quad \text{"} & n(n-1)(n-2)\\
G'_2=\{((i,j),(j,k))\} & \text{"} \quad \text{"} & n(n-1)(n-2)\\
H=\{((i,j),(h,k))\} & \text{"} \quad \text{"} & n(n-1)(n-2)(n-3). \quad (9)
\end{array}$$

On pourra bien entendu vérifier que la somme des cardinaux à droite est bien égale à $[n(n-1)]^2$.

Désignons par K l'un des ensembles qui forment le deuxième membre de (8). Pour chaque K, on aura à déterminer

$$\mathcal{E}\{\xi'(i,j)\xi'(i',j')/((i,j),(i',j'))\in K\} \qquad (10)$$

et

$$\sum\{n(i,j)n(i',j')/((i,j),(i',j'))\in K\} \qquad (10')$$

Compte tenu de l'expression (2) pour ξ_{ij}(resp.η_{ij}) introduisons $\bar{L}^{\{2\}}$(resp.$\bar{M}^{\{2\}}$) : ensemble des couples ordonnés d'indices (ℓ,ℓ') (resp. (m,m')) où $\ell<\ell'$ (resp. $m<m'$).

On a

$\mathrm{card}(\bar{L}^{\{2\}})=L(L-1)/2$

$\mathrm{card}(\bar{M}^{\{2\}})=M(M-1)/2$

La partition de $\bar{L}^{\{2\}} \times \bar{L}^{\{2\}}$ qui conditionne le calcul de (10) se fait selon la structure propre $((\ell,\ell'),(\ell'',\ell'''))$, lès classes de cette partition sont :

$$\begin{aligned}
&\tilde{D}(\bar{L})= ((p,q),(p,q)) \text{ -où } p<q\text{- de cardinal } L(L-1)/2\\
&\tilde{G}_1(\bar{L})= ((p,q),(p,s)) \text{ -où } p<q \text{ et } p<s\text{- de cardinal } L(L-1)(L-2)/3\\
&\tilde{G}'_1(\bar{L})= ((p,q),(r,p)) \text{ -où } p<q \text{ et } r<p\text{- de cardinal } L(L-1)(L-2)/6\\
&\tilde{G}_2(\bar{L})= ((p,q),(r,q)) \text{ -où } p<q \text{ et } r<q\text{- de cardinal } L(L-1)(L-2)/3\\
&\tilde{G}'_2(\bar{L})= ((p,q),(q,s)) \text{ -où } p<q \text{ et } q<s\text{- de cardinal } L(L-1)(L-2)/6\\
&\tilde{H}(\bar{L})= ((p,q),(r,s)) \text{ -où } p<q \text{ et } r<s\text{- de cardinal } L(L-1)(L-2)(L-3)/4,
\end{aligned} \tag{11}$$

où des lettres différentes indiquent des indices distincts. Ici encore, on pourra vérifier que la somme des cardinaux est égale à $\left[\frac{L(L-1)}{2}\right]^2$.

La partition de $\bar{M}^{\{2\}} \times \bar{M}^{\{2\}}$ qui conditionne le calcul de (10') est analogue à celui ci-dessus.

Désignons par $\tilde{K}(\bar{L})$ l'un des ensembles exprimés en (11) ci-dessus. Ainsi, pour chaque couple $(K,\tilde{K}(L))$. On a, relativement à l'expression (10) à évaluer

$$\mathfrak{F}\{\phi'_p(i)\phi'_q(j)\phi'_{p_1}(i_1)\phi'_{q_1}(j_1)/((i,j)(i_1,j_1))\in K,((p,q),(p_1,q_1))\in\tilde{K}(\bar{L})\} \tag{12}$$

De même, pour chaque couple $(K,\tilde{K}(M))$, on a, relativement à l'expression (10') à évaluer

$$\sum\{\psi_t(i)\psi_u(j)\psi_{t_1}(i_1)\psi_{u_1}(j_1)/((i,j),(i_1,j_1))\in K,((t,u),(t_1,u_1))\in K(\bar{M})\} \tag{12'}$$

Il y a donc a priori 7x6 valeurs de (12)(resp.(12')). Toutefois, certaines sont nulles et d'autres se regrouperont au niveau de l'expression (10) (resp.(10')).

Commençons par décomposer le calcul de $\mathcal{E}[s^2(c',d)]$ relativement à la partition (8) ci-dessus.

Pris globalement, $D(\bar{I})$ va donner lieu à

$$\frac{1}{n(n-1)}\sum\{n(\ell)n(\ell_1)n(m)n(m_1)/1\leq\ell<\ell_1\leq L,\ 1\leq m<m_1\leq M\},\tag{13}$$

qui n'est autre que $\mathcal{E}[s(c',d)]$.

$D'(\bar{I})$ va donner lieu à une contribution nulle.

Considérons à présent $G_1(\bar{I})$ qu'il y a lieu de croiser avec chacun des ensembles de la décomposition (11) :

$$\mathcal{E}\{\phi'_p(i)\phi'_q(j)\phi'_p(i)\phi'_q(k)\}=\frac{n(p)n(q)[n(q)-1]}{n(n-1)(n-2)},$$

de même,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}\{\phi'_p(i)\phi'_q(j)\phi'_p(i)\phi'_s(k)\}=\frac{n(p)n(q)n(s)}{n(n-1)(n-2)}\\
&\mathcal{E}\{\phi'_p(i)\phi'_q(j)\phi'_r(i)\phi'_p(k)\}=0\\
&\mathcal{E}\{\phi'_p(i)\phi'_q(j)\phi'_r(i)\phi'_q(k)\}=0\\
&\mathcal{E}\{\phi'_p(i)\phi'_q(j)\phi'_q(i)\phi'_s(k)\}=0
\end{aligned}\tag{14}$$

enfin,

$$\mathcal{E}\{\phi'_p(i)\phi'_q(j)\phi'_r(i)\phi'_s(k)\}=0,$$

pourvu que l'on ait $n(p)\geq 1$ et $n(q)\geq 2$.

De sorte que pour $K=G_1(\bar{I})$, l'expression (10) peut, après calcul, se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\sum\{n(p)n[f(p)]\{n[f(p)]-1\}/1\leq p\leq L\}\tag{15}$$

où, nous notons

$$n[f(p)]=\sum\{n(q)/q>p\}$$

D'autre part et de façon duale -relativement à la décomposition de même nature que (11) de $\bar{M}^{\{2\}}\times\bar{M}^{\{2\}}$- on a

$$\sum\{\psi_t(i)\psi_u(j)\psi_t(i)\psi_u(k)/((i,j),(i,k)) \in G_1(\bar{I})\}$$
$$=n(t)n(u)[n(u)-1]$$

$$\sum\{\psi_t(i)\psi_u(j)\psi_t(i)\psi_w(k)/((i,j),(i,k)) \in G_1(\bar{I})\}$$
$$=n(t)n(u)n(w)$$

$$\sum\{\psi_t(i)\psi_u(j)\psi_v(i)\psi_t(k)/((i,j),(i,k)) \in G_1(\bar{I})\}= 0$$

$$\sum\{\psi_t(i)\psi_u(j)\psi_v(i)\psi_u(k)/((i,j),(i,k)) \in G_1(\bar{I})\}= 0 \qquad (14')$$

$$\sum\{\psi_t(i)\psi_u(j)\psi_u(i)\psi_w(k)/((i,j),(i,k)) \in G_1(\bar{I})\}= 0$$

et

$$\sum\{\psi_t(i)\psi_u(j)\psi_v(i)\psi_w(k)/((i,j),(i,k)) \in G_1(\bar{I})\}= 0$$

Il en résulte que l'expression (10') vaut pour $K=G_1(\bar{I})$,

$$\sum\{n(t)n[f(t)]\{n[f(t)]-1\}/1\leq t<M\},$$

où nous notons (15')

$$n[f(t)]=\sum\{n(u)/u>t\}$$

De la même façon, on établit les résultats suivants :

Pour $K=G'_1(\bar{I})$, l'expression (10) (resp.(10')) devient

$$\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\sum \{n(p)\ n[c(p)]n[f(p)]/1<p<L\}, \quad (16)$$

(resp. $\sum\{n(t)\ n[c(t)]n[f(t)]/1<t<M\}$, (16'))

où nous notons

$$n[c(p)]= \sum\{n(q)/q<p\}.$$

(resp. $n[c(t)]= \sum\{n(u)/u<t\}$).

Pour $K=G_2(\bar{I})$, l'expression (10) (resp.(10')) devient

$$\frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum\{n(p)\ n[c(p)]\{n[c(p)]-1\}/1<p\leq L\}, \quad (17)$$

(resp. $\sum\{n(t)n[c(t)]\{n[c(t)]-1\}/1<t\leq M\}$, (17'))

Pour $K=G'_2(\bar{I})$, l'expression (10)(resp.(10')) devient

$$\frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum\{n(p)\ n[c(p)]n[f(p)]/1<p<L\}, \quad (18)$$

(resp. $\sum\{n(t)n[c(t)]n[f(t)]/1<t<M\}$, (18'))

Nous allons maintenant reprendre le cas le plus élaboré où $K=H(\bar{I})$.
On a, pour $n\geqslant 4$,

$$\mathcal{E}\{\phi'_p(i)\phi'_q(j)\phi'_p(h)\phi'_q(k)\}=\frac{n(p)[n(p)-1]n(q)[n(q)-1]}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\ ;$$

il s'agit en effet de la proportion de couples de parties de E de cardinaux respectifs n(p) et n(q), telle que la première inclut les objets i et k et la seconde, ceux j et k.

$$\mathcal{E}\{\phi'_p(i)\phi'_q(j)\phi'_p(h)\phi'_s(k)\}=\frac{n(p)[n(p)-1]n(q)n(s)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$\mathcal{E}\{\phi'_p(i)\phi'_q(j)\phi'_r(h)\phi'_p(k)\}=\frac{n(p)[n(p)-1]n(q)n(r)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$\mathcal{E}\{\phi'_p(i)\phi'_q(j)\phi'_r(h)\phi'_q(k)\}=\frac{n(p)\ n(q)[n(q)-1]n(r)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$\mathcal{E}\{\phi'_p(i)\phi'_q(j)\phi'_q(h)\phi'_s(k)\}=\frac{n(p)n(q)[n(q)-1]n(s)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

et

$$\mathcal{E}\{\phi'_p(i)\phi'_q(j)\phi'_r(h)\phi'_s(k)\}=\frac{n(p)n(q)n(r)n(s)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \qquad (19)$$

Il en résulte que les contributions de $\tilde{D}(\bar{L})$, $\tilde{G}_1(\bar{L})$, $\tilde{G}'_1(\bar{L})$, $\tilde{G}_2(\bar{L})$, $\tilde{G}'_2(\bar{L})$, et $\tilde{H}(\bar{L})$ (cf.(11) sont respectivement, au facteur $1/n(n-1)(n-2)(n-3)$ près,

$$\sum_{p<q} n(p)n(q)$$

$$\begin{aligned}
&\times[n(p)n(q)-n(p)-n(q)+1],\\
&\times[n(p)-1]\,[n[f(p)]-n(q)],\\
&\times[n(p)-1]n[c(p)], \qquad\qquad (20)\\
&\times[n(q)-1]\,[n[c(q)]-n(p)],\\
&\times[n(q)-1]n[f(q)],\\
&\times\{\sum_{r<s} n(r)n(s)-n(p)[n-n(p)]-n(q)[n-n(p)-n(q)]\},
\end{aligned}$$

où le dernier facteur entre accolades est obtenu en déterminant la partie de la somme $\sum\{n(r)n(s)/r<s\}$ qui correspond à r=p ou q, s=p ou q et $(r,s)\neq(p,q)$; soit :

$r<p$ et $s=p$, $r<p$ et $s=q$, $r=p$ et $s>p$,
$p<r<q$ et $s=q$ et $r=q$ et $s>q$.

En regroupant, nous retrouvons le résultat

$$\sum_{p<q} n(p)n(q) \left[\sum_{r<s} n(r)n(s)-n(p)-n(q)+2n-1\right] \quad (21)$$

Considérons maintenant, pour l'évaluation de (10) lorsque $K=H(\bar{I})$, la détermination des expressions duales de (19) et (20) correspondantes aux contributions respectives de $\tilde{D}(\bar{M})$, $\tilde{G}_1(\bar{M})$, $\tilde{G}'_1(\bar{M})$, $\tilde{G}_2(\bar{M})$, $\tilde{G}'_2(\bar{M})$ et $\tilde{H}(\bar{M})$:

$$\sum\{\psi_t(i)\psi_u(j)\psi_t(h)\psi_u(k)/(i,j),(h,k))\in H(\bar{I})\}=n(t)[n(t)-1]n(u)[n(u)-1]$$
$$\sum\{\psi_t(i)\psi_u(j)\psi_t(h)\psi_w(k)/((i,j),(h,k)) \in H(\bar{I})\}=n(t)[n(t)-1]n(u)n(w)$$
$$\sum\{\psi_t(i)\psi_u(j)\psi_v(h)\psi_t(k)/((i,j),(h,k)) \in H(\bar{I})\}=n(t)[n(t)-1]n(u)n(v)$$
$$\sum\{\psi_t(i)\psi_u(j)\psi_v(h)\psi_u(k)/((i,j),(h,k)) \in H(\bar{I})\}=n(t)n(u)[n(u)-1]\ n(v) \quad (22)$$
$$\sum\{\psi_t(i)\psi_u(j)\psi_u(h)\psi_w(k)/((i,j),(h,k)) \in H(\bar{I})\}=n(t)n(u)[n(u)-1]\ n(w)$$
$$\sum\{\psi_t(i)\psi_u(j)\psi_v(h)\psi_w(k)/((i,j),(h,k)) \in H(\bar{I})\}=n(t)n(u)n(v)n(w)$$

Un calcul en tout point analogue à celui qui a permis de passer des expressions (19) à celle (21) via (20), nous conduit pour $\sum\{n(i,j)n(h,k)/((i,j),(h,k)) \in H(\bar{I})\}$ à une expression analogue à celle (21).

Il en résulte le théorème suivant :

<u>Théorème</u>. La moyenne et la variance de la v.a. $s(c',d)$ (cf.§II.1.) sont respectivement égales à

$$\mathcal{E}[s(c',d)]=\lambda\mu \quad (23)$$
$$\mathrm{Var}[s(c',d)]=\lambda\mu+\rho_{cc}\sigma_{cc}+\rho_{ff}+\sigma_{ff}+2\rho_{cf}\sigma_{cf}+(\theta\zeta-\lambda^2\mu^2)$$

Les expressions de μ, σ_{cc}, σ_{ff}, σ_{cf} et ζ sont respectivement de même forme que celles λ, ρ_{cc}, ρ_{ff}, ρ_{cf} et θ ; si les premières sont relatives à la composition $\{n(\ell)/1\leq\ell\leq L\}$ du préordre total ω associé à la variable c, les secondes sont relatives à la composition $\{n(m)/1\leq m\leq M\}$ du préordre total ϖ associé à la variable d. Plus précisément,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sum \{n(p)n(q)/1\leq p<q\leq L\},$$

$$\rho_{cc} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)}} \sum \{n(\ell)n[c(\ell)](n[c(\ell)]-1)/2\leq\ell\leq L\},$$

$$\rho_{ff} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)}} \sum \{n(\ell)n[f(\ell)](n[f(\ell)]-1)/1\leq\ell\leq(L-1)\},$$

$$\rho_{cf} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)}} \sum \{n(\ell)n[c(\ell)]n[f(\ell)]/2\leqslant\ell\leqslant(L-1)\},$$

et

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}} \sum \{n(p)n(q)[\sum\{n(r)n(s)/1\leqslant r<s\leqslant L\}$$
$$+n(p)+n(q)-2n+1]/1\leqslant p<q\leqslant L\},$$

où on note

$n[c(\ell)] = \sum\{n(p)/p<\ell\}$ et $n[f(\ell)]=\sum\{n(p)/p>\ell\}$.

De sorte que l'indice d'association entre c et d qui -comme nous le montrons dans [LERMAN(1973), repris dans (1981)]- généralise celui de K. Pearson pour la situation considérée ici, s'écrit

$$\left[s(c,d)-\mathcal{E}[s(c',d)]\right]\Big/\sqrt{var[s(c',d)]} \qquad (25)$$

III - INDICE D'ASSOCIATION ENTRE UNE VARIABLE QUALITATIVE ORDINALE "NETTE" ET UNE VARIABLE QUALITATIVE ORDINALE "FLOUE".

III.1 - Introduction et notations

Relativement à une classe B d'attributs "orientés" (i.e. si $b\in B$ et si a et b sont exclusifs, alors $a\notin B$) définissant un profil d'attitude, nous avions défini dans [LERMAN(1979) repris dans (1981)], le "degré d'appartenance" d'un individu x au type défini par B, au moyen de la proportion d'attributs de B possédés par x :

$$\phi_B(x) = \frac{1}{card(B)} \sum \{\phi_b(x)/b\in B\}, \quad (1)$$

où $\phi_b(x)=1$(resp.0) selon que l'attribut b est présent (resp. absent) chez x.

Il s'agit donc d'une notion très concrète qui n'a nullement besoin du formalisme développé dans le cadre de la théorie des ensembles "flous" introduite par L.A. Zadeh ZADEH(1965) .

$\bar{L}=\{1,2,\ldots, \ldots,L\}$ est l'ensemble des codes des modalités de la variable qualitative ordinale "nette" qu'on notera c et dont une modalité courante est ainsi désignée par c_ℓ, $1\leqslant\ell\leqslant L$.

$\bar{\Lambda} = \{1,2,\ldots,\lambda,\ldots,\Lambda\}$ est l'ensemble des codes des modalités de la variable qualitative ordinale "floue" qu'on peut noter β et dont une modalité ("floue") courante est ainsi désignée par β_λ, $1\leqslant\lambda\leqslant\Lambda$. Rappelons une fois de plus que β_λ se trouve en fait définie par une classe B d'attributs "orientés" (i.e. telle que deux attributs correspondants à deux modalités exclusives ne peuvent tous les deux y appartenir).

La démarche que nous allons emprunter est toujours la même. Ce qui va changer par rapport à la comparaison de deux variables qualitatives ordinales "nettes" (se reporter au paragraphe II.1.) est le remplacement des fonctions indicatrices ψ_m, $1\leq m\leq M$, par des fonctions d'appartenance ϕ_{B_λ} (cf. formule (1)), qu'on notera plus aisément ψ_λ, $1\leq\lambda\leq\Lambda$.

Nous allons considérer une forme unilatérale de l'h.a.l. où, au préordre total sur l'ensemble des individus -codé par $I=\{1,2,\ldots,i,\ldots,n\}$- défini par la variable c et dont la suite des classes est noté $\{C_\ell/1\leq\ell\leq L\}$, on associe dans l'ensemble des préordres totaux sur I de même composition et muni d'une probabilité uniforme, un préordre aléatoire correspondant à une v.a. c' dont la suite des classes peut être notée $\{C'_\ell/1\leq\ell\leq L\}$. Ainsi, on substituera dans l'h.a.l. à la fonction indicatrice (f.i.) ϕ_ℓ de C_ℓ, la f.i. aléatoire ϕ'_ℓ de C'_ℓ, $1\leq\ell\leq L$.

Il importe certes de définir une h.a.l. duale et d'y effectuer le même type de calculs que ci-dessus.

L'indice "brut" d'association entre les deux variables c et β se met dans ces conditions sous la forme

$$s(c,\beta)=\sum\{\sum\{[\phi_p(i)\phi_q(j)][\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)]/(i,j)\in I^{[2]}\}/1\leq p<q\leq L,\ 1\leq\lambda<\mu\leq\Lambda\},(2)$$

où $I^{[2]}$ désigne l'ensemble des couples à composantes distinctes de I.

III.2 - Espérance mathématique et variance de la v.a. $s(c',\beta)$.

Nous avons déjà vu que

$$\mathcal{E}[\phi'_p(i)\phi'_q(j)]=\frac{n(p)n(q)}{n(n-1)}\text{ , où } p<q \text{ et } i\neq j.$$

Il en résulte que

$$\mathcal{E}[s(c',\beta)]=\frac{1}{n(n-1)}\sum\{n(p)n(q)/1\leq p<q\leq L\}\times\sum\{|\sum_{I^{[2]}}\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)|/1\leq\lambda<\mu\leq\Lambda\},\ (3)$$

Or

$$\sum_{I^{[2]}}\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)=n(\lambda)n(\mu)-\langle\psi_\lambda,\psi_\mu\rangle,\ (4)$$

où $n(\lambda)=\sum\{\psi_\lambda(i)/i\in I\}$ et $\langle\psi_\lambda,\psi_\mu\rangle=\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(i)/i\in I\}$ qu'on notera $n_{11}(\lambda,\mu)$; de sorte que l'expression (3) devient

$$\mathcal{E}[s(c',\beta)]=\frac{1}{n(n-1)}\sum\{n(p)n(q)/1\leq p<q\leq L\}\times\sum\{[n(\lambda)n(\mu)-n_{11}(\lambda,\mu)]/1\leq\lambda<\mu\leq\Lambda\}(5)$$

Le calcul de la variance suppose celui du moment absolu d'ordre 2 qui s'obtient à partir d'une décomposition spécifique, de même nature que celle envisagée au paragraphe II.2. ci-dessus, du carré de la v.a.s(c',β).

Plus précisément, même au risque de nous répéter, l'ensemble d'indexation de la somme définissant $s^2(c',\beta)$, se trouve défini par le carré cartésien de

$$I^{[2]} \times \bar{L}^{\{2\}} \times \bar{\Lambda}^{\{2\}}$$

où, rappelons-le, nous notons $\bar{L}^{\{2\}}$(resp.$\bar{\Lambda}^{\{2\}}$) l'ensemble des couples ordonnés d'indices (p,q) (resp.(λ,μ)) où $p<q$ (resp.$\lambda<\mu$).

La somme définissant $s^2(c',\beta)$ est ainsi indexée par

$$(I^{[2]} \times I^{[2]})\times(\bar{L}^{\{2\}} \times \bar{L}^{\{2\}})\times(\bar{\Lambda}^{\{2\}} \times \bar{\Lambda}^{\{2\}}),$$

sa décomposition s'effectue selon le croisement de trois partitions respectivement définies sur

$$I^{[2]} \times I^{[2]},\ \bar{L}^{\{2\}} \times \bar{L}^{\{2\}} \quad \text{et } \bar{\Lambda}^{\{2\}} \times \bar{\Lambda}^{\{2\}} \quad ,$$

où chacune des partitions est définie selon la structure du 4-uplet considéré.

La partition de $I^{[2]} \times I^{[2]}$ a été explicitée au moyen des expressions (9) du paragraphe II.2 et celle de $\bar{L}^{\{2\}} \times \bar{L}^{\{2\}}$ (resp.$\bar{\Lambda}^{\{2\}} \times \bar{\Lambda}^{\{2\}}$) au moyen des expressions (11) du paragraphe II.2. Désignons par $K(I)$ une classe courante de cette partition en 7 classes de $I^{[2]} \times I^{[2]}$ et par $\tilde{K}(\bar{L})$(resp.$\tilde{K}(\bar{\Lambda})$), une classe courante de la partition en 6 classes de $\bar{L}^{\{2\}} \times \bar{L}^{\{2\}}$ (resp. $\bar{\Lambda}^{\{2\}} \times \bar{\Lambda}^{\{2\}}$).

En réintroduisant

$$(\forall (i,j)\in I^{[2]}),\ \xi'_{ij}= \sum\{\phi'_p(i)\phi'_q(j)/1\leqslant p<q\leqslant L\},$$

$$\eta_{ij}= \sum\{\psi(i)\psi_\mu(j)/1\leqslant\lambda<\mu\leqslant\Lambda\},\ (6)$$

la contribution de $K(I)$ à $\mathcal{E}[s^2(c',\beta)]$ se met sous la forme

$$\mathcal{E}\{\xi'(i,j)\xi'(i',j')/((i,j),(i',j')) \in K(I)\}$$

$$\times \sum\{\eta(i,j)\eta(i',j')/((i,j),(i',j')) \in K(I)\} \quad (7)$$

Or, d'après nos précédents calculs, le premier facteur du produit définissant (7) est connu. Ce qu'il y a de nouveau à évaluer c'est le second facteur qui se présente sous la forme d'une somme et c'est là où il est indispensable de croiser explicitement K(I) avec chacun des $\tilde{K}(\Lambda)$. Comme -en raison du premier facteur- D'(I) (cf.(9) § II.2) donnera lieu à une contribution nulle, il reste 6x6 expressions à préciser pour le second facteur de (7). Nous décomposerons la présentation d'abord par rapport aux valeurs de K(I) puis, à l'intérieur de chaque modalité de K(I), par rapport aux valeurs de $\tilde{K}(\Lambda)$.

1- $\underline{\underline{K(I)=D(I)}}$

On a

$$\mathcal{B}\{\xi'(i,j)\xi'(i,j)/((i,j),(i,j)) \in D(I)\}=\frac{1}{n(n-1)} \sum\{n(p)n(q)/1\leqslant p<q\leqslant L\} \qquad (8)$$

$\sum\{n(i,j)n(i,j)/((i,j),(i,j)) \in D(I)\}$ se décompose en une somme de 6 termes relatifs à la partition de $\bar{\Lambda}^{\{2\}} \times \bar{\Lambda}^{\{2\}}$ de même type que celle (11)(§ II.2).

1.1 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{D}(\bar{\Lambda})}$

On a ici à évaluer

$$\sum\{\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)/((\lambda,\mu),(\lambda,\mu)) \in \tilde{D}(\bar{\Lambda})\}/((i,j),(i,j)) \in D\ (I)\}$$

En inversant les signes sommes, on a d'abord à évaluer

$$\sum\{[\psi_\lambda(i)]^2[\psi_\mu(j)]^2/1\leqslant i\neq j\leqslant n\} = n_2(\lambda)n_2(\mu)-n_{22}(\lambda,\mu)$$

où on a adopté les notations suivantes :

$$n^2(\lambda)=[n(\lambda)]^2,\ n_r(\lambda)=\sum\{[\psi_\lambda(i)]^r/1\leqslant i\leqslant n\},$$

$$n_{rs}(\lambda,\mu)= \sum\{[\psi_\lambda(i)]^r[\psi_\mu(i)]^s/1\leqslant i\leqslant n\}.$$

La contribution de $\tilde{D}(\bar{\Lambda})$ est donc

$$\sum\{n_2(\lambda)n_2(\mu)-n_{22}(\lambda,\mu)/(\lambda,\mu) \in \bar{\Lambda}^{\{2\}}\} \qquad (9)$$

1.2 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=G_1(\bar{\Lambda})}$

En procédant comme ci-dessus, on commence par évaluer

$$\sum\{[\psi_\lambda(i)]^2\psi_\mu(j)\psi_\theta(j)/1\leqslant i\neq j\leqslant n\} = n_2(\lambda)n_{11}(\mu,\theta)-n_{211}(\lambda,\mu,\theta).$$

La contribution de $\tilde{G}_1(\bar{\Lambda})$ est par conséquent

$$\sum\{n_2(\lambda)n_{11}(\mu,\theta)-n_{211}(\lambda,\mu,\theta)/((\lambda,\mu),(\lambda,\theta)) \in \tilde{G}_1(\bar{\Lambda})\ . \qquad (10)$$

1.3 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}'_1(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(i)\psi_\lambda(j)/1\leqslant i\neq j\leqslant n\} = n_{11}(\lambda,\sigma)n_{11}(\lambda,\mu)-n_{211}(\lambda,\mu,\sigma)$$

où on note

$$n_{rst}(\lambda,\mu,\sigma)=\sum\{[\psi_\lambda(i)]^r[\psi_\mu(i)]^s[\psi_\sigma(i)]^t/1\leqslant i\leqslant n\}$$

La contribution de $G'_1(\bar{\Lambda})$ est dans ces conditions

$$\sum\{n_{11}(\lambda,\mu)n_{11}(\lambda,\sigma)-n_{211}(\lambda,\mu,\sigma)/((\lambda,\mu),(\sigma,\lambda)) \in \tilde{G}'_1(\bar{\Lambda})\} \qquad (11)$$

1.4 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}_2(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(i)\psi_\mu(j)/1\leqslant i\neq j\leqslant n\} = n_{11}(\lambda,\sigma)n_2(\mu)-n_{121}(\lambda,\mu,\sigma)$$

La contribution de $\tilde{G}_2(\bar{\Lambda})$ est donc

$$\sum\{n_{11}(\lambda,\sigma)n_2^{(\mu)}-n_{121}(\lambda,\mu,\sigma)/((\lambda,\mu),(\sigma,\mu)) \in \tilde{G}_2(\bar{\Lambda})\} \qquad (12)$$

1.5 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}'_2(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\mu(i)\psi_\theta(j)/1\leqslant i\neq j\leqslant n\}$$

$$=n_{11}(\lambda,\mu)n_{11}(\mu,\theta)-n_{121}(\lambda,\mu,\theta)$$

La contribution de $G'_2(\bar{\Lambda})$ est

$$\sum\{n_{11}(\lambda,\mu)n_{11}(\mu,\theta)-n_{121}(\lambda,\mu,\theta)/((\lambda,\mu),(\mu,\theta)) \in G'_2(\bar{\Lambda})\} \qquad (13)$$

1.6 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{H}(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(i)\psi_\theta(j)/1\leqslant i\neq j\leqslant n\}$$

$$=n_{11}(\lambda,\sigma)n_{11}(\mu,\theta)-n_{1111}(\lambda,\mu,\sigma,\theta)$$

De sorte que la contribution de $\tilde{H}(\bar{\Lambda})$ est

$$\sum\{n_{11}(\lambda,\sigma)n_{11}(\mu,\theta)-n_{1111}(\lambda,\mu,\sigma,\theta)/((\lambda,\mu),(\sigma,\theta)) \in \tilde{H}(\bar{\Lambda})\} \qquad (14)$$

2 - $\underline{K(I)=G_1(I)}$

$$\mathcal{E}\,[\{\xi'(i,j)\xi'(i,k)/((i,j),(i,k)) \in G_1(I)\}]$$

$$= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum\{n(p)n[f(p)]\{n[f(p)]-1\}/1\leqslant p\leqslant L\}, \qquad (15)$$

(cf. formule (15) § II.2 ci-dessus).

$\sum\{n(i,j)n(i,k)/((i,j),(i,k)) \in G_1(I)\}$ se décompose en une somme de 6 termes relatifs à la partition de $\bar{\Lambda}^{\{2\}} \times \bar{\Lambda}^{\{2\}}$, de même type que celle (11) (§ II.2) :

2.1 - $\underline{\tilde{K}(\Lambda)=\tilde{D}(\bar{\Lambda})}$

On a ici à évaluer

$\sum\{\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\lambda(i)\psi_\mu(k)/((\lambda,\mu),(\lambda,\mu)) \in \tilde{D}(\bar{\Lambda})\}/((i,j),(i,k))\in G_1(I)\}$

En inversant les signes sommes, on doit commencer par évaluer

$\sum\{[\psi_\lambda(i)]^2\psi_\mu(j)\psi_\mu(k)/1\leq i\neq j\neq k\leq n\}$.

On obtient après développement

$n^2(\mu)n_2(\lambda)-2n(\mu)n_{21}(\lambda,\mu)+2n_{22}(\lambda,\mu)-n_2(\lambda)n_2(\mu)$,

Le résultat est donc

$\sum\{n^2(\mu)n_2(\lambda)-n_2(\lambda)n_2(\mu)+2[n_{22}(\lambda,\mu)-n(\mu)n_{21}(\lambda,\mu)]/(\lambda,\mu) \in \bar{\Lambda}^{\{2\}}\}$ (16)

2.2 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}_1(\bar{\Lambda})}$

On procède de la même façon que ci-dessus :

$\sum\{[\psi_\lambda(i)]^2\ \psi_\mu(j)\psi_\theta(k)/1\leq i\neq j\neq k\leq n\}$.

Après développement, on obtient

$2n_{211}(\lambda,\mu,\theta)-[n(\mu)n_{21}(\lambda,\theta)+n(\theta)n_{21}(\lambda,\mu)]-n_2(\lambda)[n_{11}(\mu,\theta)-n(\mu)n(\theta)]$

La contribution de $\tilde{G}_1(\bar{\Lambda})$ est donc

$\sum\{2n_{211}(\lambda,\mu,\theta)-[n(\mu)n_{21}(\lambda,\theta)+n(\theta)n_{21}(\lambda,\mu)]-n_2(\lambda)[n_{11}(\mu,\theta)-n(\mu)n(\theta)]/$
$((\lambda,\mu),(\lambda,\theta)) \in \tilde{G}_1(\bar{\Lambda})\}$ (17)

2.3 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}'_1(\bar{\Lambda})}$

On reprend le même déroulement des calculs.

$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(i)\psi_\lambda(k)/1\leq i\neq j\neq k\leq n\}$

$=2n_{211}(\lambda,\mu,\sigma)-n_{11}(\lambda,\sigma)[n_{11}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n(\mu)]$
$-[n(\lambda)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)+n(\mu)n_{21}(\lambda,\sigma)]$.

La contribution de $\tilde{G}'_1(\bar{\Lambda})$ est donc

$\sum\{2n_{211}(\lambda,\mu,\sigma)-[n(\lambda)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)+n(\mu)n_{21}(\lambda,\sigma)]$
$-n_{11}(\lambda,\sigma)[n_{11}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n(\mu)]/((\lambda,\mu),(\sigma,\lambda))\in G'_1(\bar{\Lambda})\}$ (18)

2.4 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}_2(\bar{\Lambda})}$

$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(i)\psi_\mu(k)/1\leq i\neq j\neq k\leq n\}$.

Cette expression se met sous la forme

$2n_{121}(\lambda,\mu,\sigma)-2n(\mu)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)-n_{11}(\lambda,\sigma)[n_2(\mu)-n^2(\mu)]$.

La contribution de $\tilde{G}_2(\bar{\Lambda})$ est donc

$$\sum\{2n_{121}(\lambda,\mu,\sigma)-2n(\mu)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)-n_{11}(\lambda,\sigma)[n_2(\mu)-n^2(\mu)]/ ((\lambda,\mu),(\sigma,\mu)) \in \tilde{G}_2(\bar{\Lambda})\} \quad (19)$$

2.5 - $\underline{K(\bar{\Lambda})=G_2'(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\mu(i)\psi_\theta(k)/1\leq i\neq j\neq k\leq n\}$$
$$=2n_{121}(\lambda,\mu,\theta)-[n(\mu)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)+n(\theta)n_{12}(\lambda,\mu)] -n_{11}(\lambda,\mu)[n_{11}(\mu,\theta)-n(\mu)n(\theta)].$$

La contribution de $\tilde{G}_2'(\bar{\Lambda})$ est donc

$$\sum\{2n_{121}(\lambda,\mu,\theta)-[n(\mu)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)+n(\theta)n_{12}(\lambda,\mu)] -n_{11}(\lambda,\mu)[n_{11}(\mu,\theta)-n(\mu)n(\theta)]/((\lambda,\mu),(\mu,\theta)) \in \tilde{G}_2'(\bar{\Lambda})\} \quad (20)$$

2.6 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{H}(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(i)\psi_\theta(k)/1\leq i\neq j\neq k\leq n\}$$
$$=2n_{1111}(\lambda,\mu,\sigma,\theta)-[n(\mu)n_{111}(\lambda,\sigma,\theta)+n(\theta)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)] -n_{11}(\lambda,\sigma)[n_{11}(\mu,\theta)-n(\mu)n(\theta)], \quad (21)$$

avec des notations que l'on comprend.

La contribution de $H(\bar{\Lambda})$ est donc

$$\sum\{2n_{1111}(\lambda,\mu,\sigma,\theta)-[n(\mu)n_{111}(\lambda,\sigma,\theta)+n(\theta)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)] -n_{11}(\lambda,\sigma)[n_{11}(\mu,\theta)-n(\mu)n(\theta)]/((\lambda,\mu),(\sigma,\theta)) \in \tilde{H}(\bar{\Lambda})\} \quad (22)$$

<u>Remarque simplificatrice</u>

Les calculs précédents 2.1 à 2.6 ont été directement effectués mais, on peut noter qu'à partir de la seule expression de la contribution de $\tilde{H}(\bar{\Lambda})$, on peut déduire celles des contributions respectives de $\tilde{D}(\bar{\Lambda})$, $\tilde{G}_1(\bar{\Lambda})$, $\tilde{G}_1'(\bar{\Lambda})$, $\tilde{G}_2(\bar{\Lambda})$ et $\tilde{G}_2'(\bar{\Lambda})$ et ce, en considérant la contraction des indices que suppose le passage d'un élément courant de $\tilde{H}(\bar{\Lambda})$ à celui d'un élément courant de, respectivement, $\tilde{D}(\bar{\Lambda})$, $\tilde{G}_1(\bar{\Lambda})$, $\tilde{G}_1'(\bar{\Lambda})$, $\tilde{G}_2(\bar{\Lambda})$ et $\tilde{G}_2'(\bar{\Lambda})$; ainsi, pour passer de la contribution de $\tilde{H}(\bar{\Lambda})$ à celle de $\tilde{G}_1'(\bar{\Lambda})$, on remplacera $((\lambda,\mu),(\sigma,\theta))$ par $((\lambda,\mu),(\sigma,\lambda))$; c'est-à-dire, θ par λ. Néanmoins, nous continuerons ci-dessous à présenter les calculs dans le même ordre.

3 - $\underline{\underline{K(I)=G_1'(I)}}$

$\mathscr{E}\{\xi'(i,j)\xi'(h,i)/((i,j),(h,i)) \in G_1'(I)\}$

$$= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum\{n(p)n[c(p)]n[f(p)]/1<p<L\}, \quad (23)$$

(cf. formule (16) § II.2 ci-dessus), où $n>2$ et $L\geqslant 3$.

$\sum\{n(i,j)n(h,i)/((i,j),(h,i)) \in G_1'(I)\}$ se décompose en une somme de 6 termes relatifs à la partition de $\bar{\Lambda}^{\{2\}} \times \bar{\Lambda}^{\{2\}}$ de même structure que celle (11) (§ II.2).

3.1 - $\underline{K(\bar{\Lambda})=D(\bar{\Lambda})}$

La structure des calculs est en tout point semblable à ci-dessus

$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\lambda(h)\psi_\mu(i)/1\leqslant i\neq j\neq h\leqslant n\}$

est égale à

$$2n_{22}(\lambda,\mu)-[n(\mu)n_{21}(\lambda,\mu)+n(\lambda)n_{12}(\lambda,\mu)$$
$$-n_{11}(\lambda,\mu)[n_{11}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n(\mu)]. \quad (24)$$

Par conséquent, la contribution de $\tilde{D}(\bar{\Lambda})$ est

$$\sum\{2n_{22}(\lambda,\mu)-[n(\mu)n_{21}(\lambda,\mu)+n(\lambda)n_{12}(\lambda,\mu)$$
$$-n_{11}(\lambda,\mu)[n_{11}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n(\mu)]/(\lambda,\mu) \in \bar{\Lambda}^{\{2\}}\} \quad (25)$$

3.2 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}_1(\bar{\Lambda})}$

$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\lambda(h)\psi_\theta(i)/1\leqslant i\neq j\neq h\leqslant n\}$

$$=2n_{211}(\lambda,\mu,\theta)-[n(\mu)n_{21}(\lambda,\theta)+n(\lambda)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)]$$
$$-n_{11}(\lambda,\theta)[n_{11}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n(\mu)] \quad (26)$$

La contribution de $G_1(\bar{\Lambda})$ est donc égale à

$$\sum\{2n_{211}(\lambda,\mu,\theta)-[n(\mu)n_{21}(\lambda,\theta)+n(\lambda)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)]$$
$$-n_{11}(\lambda,\theta)[n_{11}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n(u)]/((\lambda,\mu),(\lambda,\theta)) \in \tilde{G}_1(\bar{\Lambda})\} \quad (27)$$

3.3 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}_1'(\bar{\Lambda})}$

$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(h)\psi_\lambda(i)/1\leqslant i\neq j\neq h\leqslant n\}$

$$=2n_{21}(\lambda,\mu,\sigma)-[n(\mu)n_{21}(\lambda,\sigma)+n(\sigma)n_{21}(\lambda,\mu)]$$
$$-n_2(\lambda)[n_{11}(\mu,\sigma)-n(\mu)n(\sigma)] \quad (28)$$

La contribution de $G_1'(\bar{\Lambda})$ est égale à

$$\sum\{2n_{21}(\lambda,\mu,\sigma)-[n(\mu)n_{21}(\lambda,\sigma)+n(\sigma)n_{21}(\lambda,\mu)]$$
$$-n_2(\lambda)[n_{11}(\mu,\sigma)-n(\mu)n(\sigma)]/((\lambda,\mu),(\sigma,\lambda))\in \tilde{G}_1'(\bar{\Lambda})\} \quad (29)$$

3.4 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}_2(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(h)\psi_\mu(i)/1\leqslant i\neq j\neq h\leqslant n\}$$
$$=2n_{121}(\lambda,\mu,\sigma)-[n(\mu)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)+n(\sigma)n_{12}(\lambda,\mu)]$$
$$-n_{11}(\lambda,\mu)[n_{11}(\mu,\sigma)-n(\mu)n(\sigma)]. \quad (30)$$

D'où la contribution de $\tilde{G}_2(\bar{\Lambda})$:

$$\sum\{2n_{121}(\lambda,\mu,\sigma)-[n(\mu)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)+n(\sigma)n_{12}(\lambda,\mu)]$$
$$-n_{11}(\lambda,\mu)[n_{11}(\mu,\sigma)-n(\mu)n(\sigma)]/((\lambda,\mu),(\sigma,\mu)) \in \tilde{G}_2(\bar{\Lambda})\} \quad (31)$$

3.5 - $\underline{K(\bar{\Lambda})=G_2'(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\mu(h)\psi_\theta(i)/1\leqslant i\neq j\neq h\leqslant n\}$$
$$=2n_{121}(\lambda,\mu,\theta)-2n(\mu)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)-n_{11}(\lambda,\theta)[n_2(\mu)-n^2(\mu)] \quad (32)$$

D'où la contribution de $\tilde{G}_2'(\bar{\Lambda})$:

$$\sum\{2n_{121}(\lambda,\mu,\theta)-2n(\mu)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)-n_{11}(\lambda,\theta)[n_2(\mu)-n^2(\mu)]/$$
$$((\lambda,\mu),(\mu,\theta)) \in \tilde{G}_2'(\bar{\Lambda})\} \quad (33)$$

3.6 - $\underline{K(\bar{\Lambda})=H(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(h)\psi_\theta(i)/1\leqslant i\neq j\neq h\leqslant n\}$$
$$=2n_{1111}(\lambda,\mu,\sigma,\theta)-[n(\mu)n_{111}(\lambda,\sigma,\theta)+n(\sigma)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)]$$
$$-n_{11}(\lambda,\theta)[n_{11}(\mu,\sigma)-n(\mu)n(\sigma)] \quad (34)$$

D'où, la contribution de $\tilde{H}(\bar{\Lambda})$:

$$\sum\{2n_{1111}(\lambda,\mu,\sigma,\theta)-[n(\mu)n_{111}(\lambda,\sigma,\theta)+n(\sigma)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)]$$
$$-n_{11}(\lambda,\theta)[n_{11}(\mu,\sigma)-n(\mu)n(\sigma)]/((\lambda,\mu),(\sigma,\theta)) \in \tilde{H}(\bar{\Lambda})\} \quad (35)$$

4 - $\underline{K(I)=G_2(I)}$

$$\mathcal{E}\{\xi'(i,j)\xi'(h,j)/((i,j),(h,j)) \in G_2(I)\}$$
$$= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum\{n(p)n[c(p)]\{n[c(p)]-1\}/1<p\leqslant L\}, \quad (36)$$

(cf. formule (17) § II.2 ci-dessus).

$\sum\{n(i,j)\eta(h,j)/((i,j),(h,j)) \in G_2(I)\}$ se décompose en une somme de 6 termes relatifs à la partition déjà utilisée ci-dessus de $\bar{\Lambda}^{\{2\}} \times \bar{\Lambda}^{\{2\}}$ (cf.(11) § II.2).

4.1 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{D}(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\lambda(h)\psi_\mu(j)/1\leq i\neq j\neq h\leq n\}$$
$$=2[n_{22}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n_{12}(\lambda,\mu)]-n_2(\mu)[n_2(\lambda)-n^2(\lambda)]. \quad (37)$$

D'où, la contribution de $\tilde{D}(\bar{\Lambda})$:

$$\sum\{2[n_{22}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n_{12}(\lambda,\mu)]-n_2(\mu)[n_2(\lambda)-n^2(\lambda)]/(\lambda,\mu) \in \bar{\Lambda}^{\{2\}}\} \quad (38)$$

4.2 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}_1(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\lambda(h)\psi_\sigma(j)/1\leq i\neq j\neq h\leq n\}$$
$$=2[n_{211}(\lambda,\mu,\theta)-n(\lambda)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)]-n_{11}(\mu,\theta)[n_2(\lambda)-n^2(\lambda)] \quad (39)$$

La contribution de $\tilde{G}_1(\bar{\Lambda})$ est donc

$$\sum\{2[n_{211}(\lambda,\mu,\theta)-n(\lambda)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)]-n_{11}(\mu,\theta)[n_2^2(\lambda)-n^2(\lambda)]/$$
$$((\lambda,\mu),(\lambda,\theta)) \in \tilde{G}_1(\bar{\Lambda})\} \quad (40)$$

4.3 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}'_1(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(h)\psi_\lambda(j)/1\leq i\neq j\neq h\leq n\}$$
$$=[n_{211}(\lambda,\mu,\sigma)-n(\lambda)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)]+[n_{211}(\lambda,\mu,\sigma)-n(\sigma)n_{21}(\lambda,\mu)]$$
$$-n_{11}(\lambda,\mu)[n_{11}(\lambda,\sigma)-n(\lambda)n(\sigma)] \quad (41)$$

Il en résulte la contribution de $\tilde{G}'_1(\bar{\Lambda})$:

$$\sum\{[n_{211}(\lambda,\mu,\sigma)-n(\lambda)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)]+[n_{211}(\lambda,\mu,\sigma)-n(\sigma)n_{21}(\lambda,\mu)]$$
$$-n_{11}(\lambda,\mu)[n_{11}(\lambda,\sigma)-n(\lambda)n(\sigma)]/((\lambda,\mu),(\sigma,\lambda))\in\tilde{G}'_1(\bar{\Lambda})\} \quad (42)$$

4.4 - $\underline{K(\bar{\Lambda})=G_2(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(h)\psi_\mu(j)/1\leq i\neq j\neq h\leq n\}$$
$$=[n_{121}(\lambda,\mu,\sigma)-n(\lambda)n_{21}(\mu,\sigma)]+[n_{121}(\lambda,\mu,\sigma)-n(\sigma)n_{12}(\lambda,\mu)]$$
$$-n_2(\mu)[n_{11}(\lambda,\sigma)-n(\lambda)n(\sigma)] \quad (43)$$

La contribution de $\tilde{G}_2(\bar{\Lambda})$ est

$$\sum\{[n_{121}(\lambda,\mu,\sigma)-n(\lambda)n_{21}(\mu,\sigma)]+[n_{121}(\lambda,\mu,\sigma)-n(\sigma)n_{12}(\lambda,\mu)] -n_2(\mu)[n_{11}(\lambda,\sigma)-n(\lambda)n(\sigma)]/((\lambda,\mu),(\sigma,\mu))\in \tilde{G}_2(\bar{\Lambda})\} \quad (44)$$

4.5 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}'_2(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\mu(h)\psi_\theta(j)/1\leqslant i\neq j\neq h\leqslant n\}$$
$$=[n_{121}(\lambda,\mu,\theta)-n(\lambda)n_{21}(\mu,\theta)]+[n_{121}(\lambda,\mu,\theta)-n(\mu)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)] -n_{11}(\mu,\theta)[n_{11}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n(\mu)] \quad (45)$$

D'où, la contribution de $\tilde{G}'_2(\bar{\Lambda})$:

$$\sum\{[n_{121}(\lambda,\mu,\theta)-n(\lambda)n_{21}(\mu,\theta)]+[n_{121}(\lambda,\mu,\theta)-n(\mu)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)] -n_{11}(\mu,\theta)[n_{11}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n(\mu)]/((\lambda,\mu),(\mu,\theta))\in \tilde{G}'_2(\bar{\Lambda})\} \quad (46)$$

4.6 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{H}(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(h)\psi_\theta(j)/1\leqslant i\neq j\neq h\leqslant n\}$$
$$=[n_{1111}(\lambda,\mu,\sigma,\theta)-n(\lambda)n_{111}(\mu,\sigma,\theta)]+[n_{1111}(\lambda,\mu,\sigma,\theta)-n(\sigma)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)] -n_{11}(\mu,\theta)[n_{11}(\lambda,\sigma)-n(\lambda)n(\sigma)] \quad (47)$$

Dans ces conditions, la contribution de $\tilde{H}(\bar{\Lambda})$ est

$$\sum\{[n_{1111}(\lambda,\mu,\sigma,\theta)-n(\lambda)n_{111}(\mu,\sigma,\theta)]+[n_{1111}(\lambda,\mu,\sigma,\theta)-n(\sigma)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)] -n_{11}(\mu,\theta)[n_{11}(\lambda,\sigma)-n(\lambda)n(\sigma)]/((\lambda,\mu),(\sigma,\theta))\in \tilde{H}(\bar{\Lambda})\} \quad (48)$$

5 - $\underline{\underline{K(I)=G'_2(I)}}$

$$\mathcal{E}\{\varepsilon'(i,j)\varepsilon'(j,k)/((i,j),(j,k))\in G'_2(I)\}$$
$$=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\quad \sum\{n(p)n[c(p)]n[f(p)]/1<p<L\} \quad (49)$$

(cf. formule (18) § II.2 ci-dessus).

$\sum\{n(i,j)n(j,k)/((i,j),(j,k))\in G'_2(I)\}$ se décompose en une somme de 6 termes relatifs à la partition déjà utilisée ci-dessus de $\bar{\Lambda}^{\{2\}}\times\bar{\Lambda}^{\{2\}}$ (cf.(11) § II.2).

5.1 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{D}(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\lambda(j)\psi_\mu(k)/1\leq i\neq j\neq k\leq n\}$$

$$=[n_{22}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n_{12}(\lambda,\mu)]+[n_{22}(\lambda,\mu)-n(\mu)n_{21}(\lambda,\mu)]$$
$$-n_{11}(\lambda,\mu)[n_{11}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n(\mu)] \quad (50)$$

Par conséquent, la contribution de $\tilde{D}(\bar{\Lambda})$ est

$$\sum\{[n_{22}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n_{12}(\lambda,\mu)]+[n_{22}(\lambda,\mu)-n(\mu)n_{21}(\lambda,\mu)]$$
$$-n_{11}(\lambda,\mu)[n_{11}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n(\mu)]/(\lambda,\mu)\in\bar{\Lambda}^{\{2\}}\} \quad (51)$$

5.2 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}_1(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\lambda(j)\psi_\theta(k)/1\leq i\neq j\neq k\leq n\}$$

$$=[n_{211}(\lambda,\mu,\theta)-n(\lambda)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)]+[n_{211}(\lambda,\mu,\theta)-n(\theta)n_{21}(\lambda,\mu)]$$
$$-n_{11}(\lambda,\mu)[n_{11}(\lambda,\theta)-n(\lambda)n(\theta)] \quad (52)$$

D'où la contribution de $\tilde{G}_1(\bar{\Lambda})$:

$$\sum\{[n_{211}(\lambda,\mu,\theta)-n(\lambda)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)]+[n_{211}(\lambda,\mu,\theta)-n(\theta)n_{21}(\lambda,\mu)]$$
$$-n_{11}(\lambda,\mu)[n_{11}(\lambda,\theta)-n(\lambda)n(\theta)]/((\lambda,\mu),(\lambda,\theta))\in\tilde{G}_1(\bar{\Lambda})\} \quad (53)$$

5.3 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}_1'(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(j)\psi_\lambda(k)/1\leq i\neq j\neq k\}$$

$$=2[n_{211}(\lambda,\mu,\sigma)-n(\lambda)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)]-n_{11}(\mu,\sigma)[n_2(\lambda)-n^2(\lambda)]. \quad (54)$$

D'où, la contribution de $\tilde{G}_1'(\bar{\Lambda})$:

$$\sum\{2[n_{211}(\lambda,\mu,\sigma)-n(\lambda)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)]$$
$$-n_{11}(\mu,\sigma)[n_2(\lambda)-n^2(\lambda)]/((\lambda,\mu),(\sigma,\lambda))\in\tilde{G}_1'(\bar{\Lambda})\} \quad (55)$$

5.4 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}_2(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(j)\psi_\mu(k)/1\leq i\neq j\neq k\}$$

$$=2n_{121}(\lambda,\mu,\sigma)-[n(\lambda)n_{21}(\mu,\sigma)+n(\mu)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)]$$
$$-n_{11}(\mu,\sigma)[n_{11}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n(\mu)] \quad (56)$$

Contribution de $\tilde{G}_2(\bar{\Lambda})$:

$$\sum\{2n_{121}(\lambda,\mu,\sigma)-[n(\lambda)n_{21}(\mu,\sigma)+n(\mu)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)]$$
$$-n_{11}(\mu,\sigma)[n_{11}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n(\mu)]/((\lambda,\mu),(\sigma,\mu)) \in \tilde{G}_2(\bar{\Lambda})\} \quad (57)$$

5.5 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}_2'(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\mu(j)\psi_\theta(k)/1\leq i\neq j\neq k\leq n\}$$
$$=(2n_{121}(\lambda,\mu,\theta)-[n(\lambda)n_{21}(\mu,\theta)+n(\theta)n_{12}(\lambda,\mu)])$$
$$-n_2(\mu)[n_{11}(\lambda,\theta)-n(\lambda)n(\theta)] \quad (58)$$

Contribution de $\tilde{G}_2'(\bar{\Lambda})$:

$$\sum\{(2n_{121}(\lambda,\mu,\theta)-[n(\lambda)n_{21}(\mu,\theta)+n(\theta)n_{12}(\lambda,\mu)]$$
$$-n_2(\mu)[n_{11}(\lambda,\theta)-n(\lambda)n(\theta)]/((\lambda,\mu),(\mu,\theta)) \in \tilde{G}_2'(\bar{\Lambda})\} \quad (59)$$

5.6 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=H(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(j)\psi_\theta(k)/1\leq i\neq j\neq k\leq n\}$$
$$=(2n_{1111}(\lambda,\mu,\sigma,\theta)-[n(\lambda)n_{111}(\mu,\sigma,\theta)+n(\theta)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)])$$
$$-n_{11}(\mu,\sigma)[n_{11}(\lambda,\theta)-n(\lambda)n(\theta)] \quad (60)$$

Contribution de $\tilde{H}(\bar{\Lambda})$:

$$\sum\{(2n_{1111}(\lambda,\mu,\sigma,\theta)-[n(\lambda)n_{111}(\mu,\sigma,\theta)+n(\theta)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)])$$
$$-n_{11}(\mu,\sigma)[n_{11}(\lambda,\theta)-n(\lambda)n(\theta)]/((\lambda,\mu),(\sigma,\theta)) \in \tilde{H}(\bar{\Lambda})\} \quad (61)$$

6 - $\underline{\underline{K(I)=H(I)}}$

$\mathfrak{S}\{\varepsilon'(i,j)\varepsilon'(h,k)/((i,j),(h,k)) \in H(I)\}$ est, au facteur $(1/n(n-1)(n-2)(n-3))$ égal à $\sum\limits_{p<q} n(p)n(q)\ [\sum\limits_{r<s} n(r)n(s)-n(p)-n(q)+2n-1]$, (62)

(cf. formule (21) § II.2 ci-dessus).

$\sum\{n(i,j)n(h,k)/((i,j),(h,k)) \in H(I)\}$ se décompose en une somme de 6 termes relatifs à la partition maintes fois utilisée de $\bar{\Lambda}^{\{2\}} \times \bar{\Lambda}^{\{2\}}$ (cf. (11) § II.2).

6.1 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{D}(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\lambda(h)\psi_\mu(k)/1\leq i\neq j\neq h\neq k\leq n\}$$

$$=[n_2(\lambda)-n^2(\lambda)][n_2(\mu)-n^2(\mu)]+4n(\lambda)[n_{12}(\lambda,\mu)-n(\mu)n_{11}(\lambda,\mu)]$$

$$-4[n_{22}(\lambda,\mu)-n(\mu)n_{21}(\lambda,\mu)]-2[n_{22}(\lambda,\mu)-n^2_{11}(\lambda,\mu)] \qquad (63)$$

Contribution de $\tilde{D}(\bar{\Lambda})$:

$$\sum\{[n_2(\lambda)-n^2(\lambda)][n_2(\mu)-n^2(\mu)]+4n(\lambda)[n_{12}(\lambda,\mu)$$
$$-n(\mu)n_{11}(\lambda,\mu)]-4[n_{22}(\lambda,\mu)-n(\mu)n_{21}(\lambda,\mu)]$$
$$-2[n_{22}(\lambda,\mu)-n^2_{11}(\lambda,\mu)]/(\lambda,\mu)\in\bar{\Lambda}^{\{2\}}\} \qquad (64)$$

6.2 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}_1(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\lambda(h)\psi_\theta(k)/1\leq i\neq j\neq k\leq n\}$$

$$=[n_2(\lambda)-n^2(\lambda)][n_{11}(\mu,\theta)-n(\mu)n(\theta)]+2\{n(\lambda)[n_{111}(\lambda,\mu,\theta)$$
$$-n(\theta)n_{11}(\lambda,\mu)]+n_{11}(\lambda,\theta)[n_{11}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n(\mu)]$$
$$-[n_{211}(\lambda,\mu,\theta)-n(\lambda)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)]-[n_{211}(\lambda,\mu,\theta)$$
$$-n(\mu)n_{21}(\lambda,\theta)]-[n_{211}(\lambda,\mu,\theta)-n(\theta)n_{21}(\lambda,\mu)]\} \qquad (65)$$

La contribution de $\tilde{G}_1(\bar{\Lambda})$ est la somme des expressions (65) pour $((\lambda,\mu),(\lambda,\theta))$ décrivant $\tilde{G}_1(\bar{\Lambda})$.

6.3 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}'_1(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(h)\psi_\lambda(k)/1\leq i\neq j\neq h\neq k\leq n\}$$

$$=[n_2(\lambda)-n^2(\lambda)][n_{11}(\mu,\sigma)-n(\mu)n(\sigma)]+2\{n(\lambda)[n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)$$
$$-n(\sigma)n_{11}(\lambda,\mu)]+n_{11}(\lambda,\sigma)[n_{11}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n(\mu)]$$
$$-[n_{211}(\lambda,\mu,\sigma)-n(\lambda)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)]-[n_{211}(\lambda,\mu,\sigma)-n(\mu)n_{21}(\lambda,\sigma)]$$
$$-[n_{211}(\lambda,\mu,\sigma)-n(\sigma)n_{21}(\lambda,\mu)]\} \qquad (66)$$

La contribution de $\tilde{G}'_1(\bar{\Lambda})$ est la somme des expressions (66) pour $((\lambda,\mu),(\sigma,\lambda))$ décrivant $\tilde{G}'_1(\bar{\Lambda})$.

6.4 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}_2(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(h)\psi_\mu(k)/1\leqslant i\neq j\neq h\neq k\leqslant n\}$$
$$=[n_2(\mu)-n^2(\mu)]\,[n_{11}(\lambda,\sigma)-n(\lambda)n(\sigma)]+2\{n(\mu)[n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)$$
$$-n(\sigma)n_{11}(\lambda,\mu)]+n_{11}(\mu,\sigma)[n_{11}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n(\mu)]$$
$$-[n_{121}(\lambda,\mu,\sigma)-n(\mu)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)]-[n_{121}(\lambda,\mu,\sigma)-n(\lambda)n_{21}(\mu,\sigma)]$$
$$-[n_{121}(\lambda,\mu,\sigma)-n(\sigma)n_{12}(\lambda,\mu)] \qquad (67)$$

La contribution de $\tilde{G}_2(\bar{\Lambda})$ est la somme des expressions (67) pour $((\lambda,\mu),(\sigma,\mu))$ parcourant $\tilde{G}_2(\bar{\Lambda})$.

6.5 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{G}'_2(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\mu(h)\psi_\theta(k)/1\leqslant i\neq j\neq h\neq k\leqslant n\}$$
$$=[n_2(\mu)-n^2(\mu)]\,[n_{11}(\lambda,\theta)-n(\lambda)n(\theta)]+2\{n(\mu)|n_{111}(\lambda,\mu,\theta)$$
$$-n(\theta)n_{11}(\lambda,\mu)]+n_{11}(\mu,\theta)[n_{11}(\lambda,\mu)-n(\lambda)n(\mu)]$$
$$-[n_{121}(\lambda,\mu,\theta)-n(\mu)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)]-[n_{121}(\lambda,\mu,\theta)-n(\lambda)n_{21}(\mu,\theta)]$$
$$-[n_{121}(\lambda,\mu,\theta)-n(\theta)n_{12}(\lambda,\mu)]\} \qquad (68)$$

La contribution de $\tilde{G}'_2(\bar{\Lambda})$ est la somme des expressions (68) pour $((\lambda,\mu),(\mu,\theta))$ décrivant $\tilde{G}'_2(\bar{\Lambda})$.

6.6 - $\underline{\tilde{K}(\bar{\Lambda})=\tilde{H}(\bar{\Lambda})}$

$$\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(h)\psi_\theta(k)/1\leqslant i\neq j\neq h\neq k\leqslant n\}$$
$$=n(\theta)\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(h)/i\neq j\neq h\}-\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\theta(i)\psi_\sigma(h)/$$
$$i\neq j\neq h\}-\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(h)\psi_\theta(j)/i\neq j\neq h\}$$
$$-\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_\sigma(h)\psi_\theta(h)/i\neq j\neq h\} \qquad (69)$$
$$=n(\lambda)n(\mu)n(\sigma)n(\theta)-\{n(\sigma)n(\theta)n_{11}(\lambda,\mu)+n(\mu)n(\theta)n_{11}(\lambda,\sigma)$$
$$+n(\mu)n(\sigma)n_{11}(\lambda,\theta)$$
$$+n(\lambda)n(\theta)n_{11}(\mu,\sigma)+n(\lambda)n(\sigma)n_{11}(\mu,\theta)+n(\lambda)n(\mu)n_{11}(\sigma,\theta)\}$$
$$+2\{n(\theta)n_{111}(\lambda,\mu,\sigma)+n(\sigma)n_{111}(\lambda,\mu,\theta)+n(\mu)n_{111}(\lambda,\sigma,\theta)$$

$+n(\lambda)n_{111}(\mu,\sigma,\theta)\}+\{n_{11}(\lambda,\mu)n_{11}(\sigma,\theta)+n_{11}(\lambda,\sigma)n_{11}(\mu,\theta)$

$+n_{11}(\lambda,\theta)n_{11}(\mu,\sigma)\}-6n_{1111}(\lambda,\mu,\sigma,\theta)$. (70)

La contribution de $\tilde{H}(\bar{\Lambda})$ est la somme des expressions (70) pour $((\lambda,\mu),(\sigma,\theta))$ décrivant $\tilde{H}(\bar{\Lambda})$.

Rappelons que les autres contributions 6.1 à 6.5 s'obtiennent à partir de cette dernière en remplaçant respectivement : (σ,θ) par (λ,μ), σ par λ, θ par λ, θ par μ et σ par

Revenons au début du paragraphe III.2. La moyenne de la v.a. $s(c',\beta)$ est donnée par la formule (5). Quant au moment absolu d'ordre 2, nous récapitulerons au moyen de l'énoncé suivant

THEOREME. Le moment absolu d'ordre 2 de la v.a. $s(c',\beta)$ peut se mettre sous la forme suivante

$$\sum_{K(I)} \pi[K(I)] \sum_{\tilde{K}(\bar{\Lambda})} r[K(I),\tilde{K}(\bar{\Lambda})] \qquad (71)$$

où $K(I)$ (resp. $\tilde{K}(\bar{\Lambda})$) appartient à la partition
$\{D(I),D'(I),G_1(I),G_1'(I),G_2(I),G_2'(I),H(I)\}$ de $I^{[2]} \times I^{[2]}$
(resp. $\{\tilde{D}(\bar{\Lambda}),\tilde{G}_1(\bar{\Lambda}),\tilde{G}_1'(\bar{\Lambda}),\tilde{G}_2(\bar{\Lambda}),\tilde{G}_2'(\bar{\Lambda}),\tilde{H}(\bar{\Lambda})\}$ de $\bar{\Lambda}^{\{2\}} \times \bar{\Lambda}^{\{2\}}$) et où

$$\pi[K(I)]=\mathcal{E}\{\varepsilon'(i,j)\varepsilon'(i',j')/((i,j),(i',j')) \in K(I)\}, \quad (72)$$

qui a été déterminé dans les différents cas ci-dessus,

$$r[K(I),\tilde{K}(\bar{\Lambda})]= \sum\Big\{\sum\{\psi_\lambda(i)\psi_\mu(j)\psi_{\lambda'}(i')\psi_{\mu'}(j')/((i,j),(i',j'))\in K(I)\}/ ((\lambda,\mu),(\lambda',\mu'))\in \tilde{K}(\bar{\Lambda})\Big\}, \quad (73)$$

qui a également été déterminé dans les différents cas ci-dessus.

Ce résultat permet d'obtenir la variance de $s(c',\beta)$ et par conséquent l'indice d'association "centré et réduit"

$$\mathcal{Q}(c,\beta) = \frac{s(c,\beta)-\mathcal{E}[s(c',\beta)]}{\sqrt{\mathrm{var}[s(c',\beta)]}} \qquad (74)$$

IV - INTERET ET USAGE DE CET INDICE

L'analyse informatique du calcul que suppose cet indice vient d'être achevée par Melle Moreau (un aspect d'une thèse de 3ème cycle en cours) dont le programme comprend un sous-programme général de calcul de tous les moments produits jusqu'à l'ordre 4 des variables $(\psi_\lambda / \lambda \in \bar{\Lambda})$.

Ainsi, après avoir généralisé à la comparaison de deux variables qualitatives ordinales (i.e. totalement préordinales) [LERMAN(1973),(1981)], l'indice τ de M.G. Kendall de comparaison de deux variables "rang" (i.e. totalement et strictement ordinales) [KENDALL(1938),(1970)], ce travail -qui s'est imposé à nous dans la pratique de l'analyse classificatoire des données (voir introduction)- offre une nouvelle généralisation.

Cette généralisation peut d'un certain point de vue apparaître comme particulière de la situation où on compare deux relations pondérées sur un même ensemble I : $\{\xi_{ij}/(i,j) \in I^{[2]}\}$ et $\{\eta_{ij}/(i,j) \in I^{[2]}\}$ ([HUBERT(1978)], [LECALVE(1976)], [LERMAN(1976)] et [MANTEL(1967)]. Toutefois, l'application des formules (voir par exemple dans LERMAN(1981)) aurait de toute façon nécessité d'expliciter la nature spécifique du phénomène combinatoire qui a été précisé dans les calculs ci-dessus et que nous avons effectués avec le souci de préserver le degré de généralité nécessaire.

Le résultat général exprimé dans [LERMAN(1976)] quant à la distribution asymptotique dans l'h.a.l. de la v.a. associée à l'indice brut, permet d'utiliser l'indice $\mathcal{Q}(c,\beta)$ (cf.(74)) dans une optique de test d'hypothèse où il s'agirait de rejeter l'hypothèse d'absence de liaison entre les variables c et β.

Toutefois et de façon majeure, l'intérêt de cet indice réside pour nous dans la comparaison sur des échantillons disjoints de sujets de la force de la liaison entre les variables c et β. Ainsi, relativement à l'exemple qui a motivé cette étude et cité en introduction -où les modalités de c sont définies par les niveaux de la T.A.S. et où celles de correspondent à des profils biologiques- on peut se poser la question de savoir si la qualité de la régression entre c et β est meilleure chez les femmes que chez les hommes.

L'analyse informatique de ce calcul, le programme et la validation sur les données réelles évoquées ci-dessus se trouveront consignées dans le cadre d'une thèse de 3ème cycle (en cours d'achèvement) de Melle A. Moreau [MOREAU à paraître]. On y trouve d'autre part développé l'indice de même type, mais dans le cas "nominal". Ce dernier généralise au cas "flou" notre indice d'association entre variables-partitions (cf. [LERMAN(1981), Chap.2], indice qui reste essentiellement distinct de tout coefficient dérivant du χ^2. Alors que l'indice que nous avons pu mentionner pour cette extension dans l'introduction, est de même nature que le χ^2.

BIBLIOGRAPHIE

L.J. HUBERT, F.B. BAKER "Evaluating the conformity of sociometric measurements", Psychometrika, 43, 1, 1978, pp. 31-41.

M.G. KENDALL ; "A new measure of rank correlation", Biometrika 30, p. 81-93, (1938).

M.G. KENDALL ; "Rank correlation methods" 4th edition, London : Griffin, (1970).

A.M. KERJAN ; "Tentative d'établissement de cent typologies d'examens biologiques. Contribution à l'établissement du système A.D.M.", Thèse de doctorat de médecine, Université de Rennes, (1978).

J.Y. LAFAYE ; "Une méthode de discrétisation d'une variable continue", Rev. Stat. Appl. n°2 (1979a).

J.Y. LAFAYE ; "Une méthode automatique de discrétisation de variables numériques représentées par de petits échantillons", Actes du Congrès AFCET : "Reconnaissance des formes et intelligence artificielle", Toulouse, Sept. (1979b).

G. LECALVE ; "Problèmes d'analyse des données", thèse d'état (2ème partie), Université de Rennes I, (1976).

I.C. LERMAN ; "Etude distributionnelle de statistiques de proximité entre structures finies de même type ; application à la classification automatique", Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle, série recherche, n°19 (1973).

I.C. LERMAN ; "Formal analysis of a general notion of proximity between variables", Actes du colloque : "Congrès Européen des Statisticiens", Grenoble, Sept.(1976), parus chez North-Holland en 1977.

I.C. LERMAN ; "Croisement de classifications "floues", Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, XXIV, fasc. 1-2, Paris (1979).

I.C. LERMAN ; "Classification et analyse ordinale des données", Dunod, Paris (1981).

I.C. LERMAN ; "Analyse classificatoire d'une correspondance multiple ; typologie et régression", rapport interne IRISA n° 186, Rennes, Janvier 1983.

I.C. LERMAN ; "Justification et validité statistique d'une échelle [0,1] de fréquence mathématique pour une structure de proximité sur un ensemble de variables observées", Publication Interne IRISA n° 221, 47 pages, Janvier 1984.

N. MANTEL ; "The detection of disease clustering and a generalized regression approach" ; Cancer research, 27, 209-220 (1967).

A. MOREAU ; "Calcul d'indices d'association entre variables qualitatives nettes ou floues ; application à l'interprétation d'une classification de données épidémiologiques", thèse de 3ème cycle en préparation, Université de Rennes I.

B. TALLUR ; "Méthode d'interprétation d'une classification hiérarchique d'attributs-modalités pour l'explication d'une variable ; application à la recherche d'un seuil critique de la tension systolique et des indicateurs de risques cardiovasculaires", rapport interne IRISA n° 159, Université de Rennes I, (1982), à paraître dans Rev. Stat. Appl.).

A. WALD and J. WOLFOWITZ ; "Statistical tests based on permutations of the observations", Annals of Mathematical Statistics 15, p.358-372, (1944).

L.A. ZADEH ; "Fuzzy sets", Information and Control 8 (1965).