BENOÎT TRUONG-VAN

Une étude des processus ARIMA sous l'angle opératoriel

Statistique et analyse des données, tome 5, nº 2 (1980), p. 45-64
<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1980__5_2_45_0>

Statistique et Analyse des Données
2 - 1980 pp. 45-64

UNE ETUDE DES PROCESSUS ARIMA SOUS L'ANGLE OPERATORIEL

Benoît TRUONG-VAN

Laboratoire de Statistique et Probabilités
E.R.A. - C.N.R.S. n° 591
Université Paul Sabatier - 31062 TOULOUSE Cédex

Cet article a pour but principal d'étudier la nature de l'opérateur retard B_x associé à un processus ARIMA. Il contient les résultats principaux suivants : les processus ARIMA $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ne sont pas linéarisables (Théorème 1), l'opérateur B_x de ces processus n'est pas linéaire et de norme inférieure à l'unité (Théorème 3) et la nature de B_x, donc des processus $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ même dépend fortement des conditions initiales choisies pour $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ (théorème 4).

INTRODUCTION

Dans tout ce qui suit, tous les processus $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, $(y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ envisagés seront, si cela a un sens, des processus (à temps discret) dans $L^2(\Omega) = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Considérons pour un bruit blanc donné $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et pour $p,q,d \in \mathbb{N}^*$ l'équation :

$$(\blacktriangledown 1)\ x_t + \phi_1 x_{t-1} + \ldots + \phi_{p+d}\, x_{t-p-d} = a_t + \theta_1 a_{t-1} + \ldots + \theta_q a_{t-q} .$$

Factorisons la z-transformée $\phi(z)$ de l'équation ($\blacktriangledown$1)

$$\phi(z) = \sum_{j=o}^{p+d} \phi_j z^j = \phi_o(z)\, \phi_1(z) \text{ avec } :$$

$$\phi_o = 1$$

$$(\blacktriangledown 2)\ \phi_o(z) = \sum_{j=o}^{p} \phi_{oj} z^j = \prod_{j=1}^{p} (1 - \xi_j z)$$ contenant les zéros ξ_j^{-1} de $\phi(z)$ de module différent de 1

$$\phi_1(z) = \sum_{j=1}^{d} \phi_{1j} z^j = \prod_{j=1}^{d} (1 - e^{i\omega_j} z)$$ contenant les zéros de $\phi(z)$ de module unité .

Noter que $\phi_{oo} = \phi_{1o} = 1$.

Pour résoudre l'équation ($\blacktriangledown$1), on l'écrit en suivant [1] ou [1 bis] sous la forme du système :

$$\begin{cases} (\text{VI}.1) \quad y_t = \sum_{j=o}^{d} \phi_{1j} \; x_{t-j} \quad \text{avec } d \in \mathbb{N}^* \\ (\text{VI}.2) \quad \sum_{j=o}^{p} \phi_{oj} \; y_{t-j} = \sum_{k=o}^{q} \theta_k \; a_{t-k} \quad \text{avec } \theta_o = 1 \end{cases}$$

[1] NON-LINEARISABILITE EN MOYENNE QUADRATIQUE DES PROCESSUS ARIMA $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

■ On sait que (cf [2]) qu'il existe une solution unique stationnaire du second ordre $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ dans $L^2(\Omega)$ de l'équation (VI.2) qui soit un processus linéaire.

• Dans [1], Box et Jenkins supposent en fait une hypothèse supplémentaire, que la solution $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus inversible i.e. le polynôme $\theta(z) = \sum_{k=o}^{q} \theta_k z^k$ n'a que des zéros en dehors du cercle unité.

• Dans la suite, nous adopterons (à cause de la proposition 1) une hypothèse analogue mais moins restrictive en supposant que

(V3) le processus $(y_t)_{t\in Z}$ est inversible bilatéralement i.e. le polynôme $\theta(z)$ n'a pas de zéros de module unité.

■ Le cas particulier important, considéré par [1] quand $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est inversible, est celui où les zéros $e^{i\omega_j}$ de $\phi(z)$ sont tous égaux à 1 ; les solutions $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ de (VI) sont alors appelées par ces auteurs "processus ARIMA", et ils écrivent que les processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont linéarisables i.e. $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifient :

(V4) $x_t = S^d y(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{Z}$ où $S_y(t) = \sum_{k=o}^{\infty} y(t-k)$.

■ Nous allons montrer d'une part que l'expression $S_y(t)$ n'existe pas toujours dans $L^2(\Omega)$ (i.e en moyenne quadratique (M.Q)), d'autre part que même si $S_y(t)$ était défini dans $L^2(\Omega)$, le processus $x = (x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ne pourrait jamais vérifier l'équation (V4).

En effet prenons par exemple le modèle $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ appelé par Box-Jenkins [1] IMA (0,1,1) i.e. $y_t = x_t - x_{t-1} = a_t - \theta a_{t-1}$ avec $|\theta| < 1$.

Considérons alors la suite, pour $t \in \mathbb{Z}$ fixé, de terme général

$$S_N \, y(t) = \sum_{k=o}^{N} y(t-k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \left(\sum_{k=o}^{N} e^{-ik\lambda}\right) (1 - \theta e^{-i\lambda}) \, dZ_a(\lambda)$$

où Z_a est la mesure stochastique de $(a_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ dans sa représentation de CRAMER-LOEVE.

Notons par $|\eta|_{L^2(\Omega)}$ la norme de η dans $L^2(\Omega)$ et σ^2 la variance du bruit blanc (a_t).

Alors $|S_N \, y(t)|^2_{L^2(\Omega)} = \dfrac{\sigma^2}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |(1 - \theta e^{-i\lambda}) \sum_{k=o}^{N} e^{-ik\lambda}|^2 \, d\lambda$

or $(1 - \theta e^{-i\lambda}) \sum_{k=o}^{N} e^{-ik\lambda} = (1 + e^{-i\lambda} +\ldots+ e^{-iN\lambda}) - \theta(e^{-i\lambda} + \ldots + e^{-i(N+1)\lambda})$

$$= \sum_{k=o}^{N+1} \tilde{\theta}_j\, e^{-ik\lambda} \text{ avec } \begin{cases} \tilde{\theta}_o = 1 \\ \tilde{\theta}_j = (1 - \theta)\,,\ i < j < N+1 \\ \tilde{\theta}_{N+1} = -\theta \end{cases}$$

et $|(1 - \theta e^{-i\lambda}) \sum_{k=o}^{N} e^{-ik\lambda}|^2 = \sum_{k=-(N+1)}^{N+1} \theta'_k\, e^{ik\lambda}$ avec $\theta'_o = \sum_{k=o}^{N+1} \tilde{\theta}_k^2 = 1 + (1-\theta)^2 N + \theta^2$

donc ($\blacktriangledown$5) $\lim_{N\infty} \|S_N y(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \lim_{N\infty} \sigma^2\ [1 + \theta^2 + N(1-\theta)^2] = \infty$ (car $|\theta| \neq 1$) .

Par conséquent la série $S_y(t)$ ne peut pas exister dans $L^2(\Omega)$, $\forall\, t \in \mathbb{Z}$

Remarque

Notons que même dans le cas où $\theta = 1$, les séries $\sum_{k=o}^{\infty} y(t - k)$ $(t \in \mathbb{Z})$ n'existent pas non plus dans $L^2(\Omega)$
car s'il existe un $t \in \mathbb{Z}$ tel que $\sum_{k=o}^{\infty} (a_{t-k} - a_{t-k-1})$ converge dans $L^2(\Omega)$, on a

$$2\,\sigma^2 = \|a_{t-n} - a_{t-n-1}\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\sum_{k=o}^{n} (a_{t-k} - a_{t-k-1}) - \sum_{k=o}^{n+1} (a_{t-k} - a_{t-k-1})\|^2_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

on aboutit ainsi à une contradiction.
Donc les séries $S_y(t)$ ne convergent pas toujours dans $L^2(\Omega)$ et même si elles convergeaient montrons maintenant que les processus ARIMA $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ne pourraient pas vérifier ($\blacktriangledown$4).
Nous pouvons nous placer dans un cadre plus général en considérant $\sum_{k=o}^{\infty} e^{ik\omega} y(t-k)$, pour $\omega \in \mathbb{R}$ et supposons la convergence dans $L^2(\Omega)$.
Alors si $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifiait ($\blacktriangledown$4), on aurait

($\blacktriangledown$6) $H(x) = H(y)$

où $H(x) = \overline{sp}\,(x)$ la fermeture dans $L^2(\Omega)$ de l'espace vectoriel $sp(x)$, engendré par $\{x_t ; t\in\mathbb{Z}\}$.

Considérons l'opérateur retard B_Y unitaire sur $H(y)$ définissant le processus stationnaire $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ on a $\forall\, t \in \mathbb{Z}$

$$B_Y(x_t) = B_Y\left[\lim_{N\infty} \sum_{k=o}^{N} e^{i\omega k}\, y(t-k)\right] = \lim_{N\infty} \sum_{k=o}^{N} e^{i\omega k}\, y_{(t-1-k)} = x_{t-1} \quad .$$

Par conséquent $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ serait défini par un opérateur unitaire donc serait un processus stationnaire, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse ($\blacktriangledown$3) et Théorème 1.4.2 de [2] on a ainsi le théorème suivant :

Théorème 1

Soit l'équation aux différences

$$\begin{cases} (\blacktriangledown 1.1)\ y_t = \sum_{j=0}^{q} \phi_{1j}\, x_{t-j} \\ (\blacktriangledown 1.2)\ \sum_{j=0}^{p} \phi_{0j}\, y_{t-j} = \sum_{k=0}^{q} \theta_k\, a_{t-k} \quad \text{avec } \theta_0 = 1 \end{cases}$$

où $\phi_0(z)$ et $\phi_1(z)$ vérifient la condition ($\blacktriangledown$2)

si on choisit pour $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *la solution linéaire stationnaire* ARMA (p,q) *alors aucune solution* $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *de l'équation* ($\blacktriangledown$1.1) *ne vérifie la relation* $x_t = S_d\, S_{d-1} \ldots S_1\, y_t$ *où*

$$S_j\, y_t = \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\omega_j k}\, y(t-k) \quad , \ j=1,\ldots,d \ .$$

[2] ETUDE DU MODELE ARIMA DU POINT DE VUE OPERATORIEL

Notre but dans ce paragraphe est d'étudier la nature des processus ARIMA $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, plus précisément la nature de l'opérateur retard B_x associé à un processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Définition

Nous appellons opérateur retard d'un processus $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\Omega)$ *l'opérateur* B_z *défini par* ($\blacktriangledown$7) $B_z(z_t) = z_{t-1} \qquad \forall\, t \in \mathbb{Z}$.

[2.1] Cas particulier

Considérons l'équation aux différences

($\blacktriangledown$8) $x_t - x_{t-1} = y_t \qquad \forall\, t \in \mathbb{Z}$

où $y = (y_t)_{t\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\Omega)$ est la solution stationnaire linéaire ARMA (p,q) de l'équation ($\blacktriangledown$1.2).

Donnons d'abord un résultat préliminaire :

Proposition 1

Supposons que la solution stationnaire du 2^{nd} ordre $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *de l'équation* ($\blacktriangledown$1.2) *soit bilatéralement inversible i.e. vérifie l'hypothèse* ($\blacktriangledown$3) *alors :*

(i) le processus $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *a le même opérateur unitaire retard* B_y *que celui du bruit blanc* $(a_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *et* $H(y) = H(a)$

(ii) la famille $\{y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ *forme une famille libre dans* $H(y) = \overline{sp}(y) = H(a)$

Preuve

(i) Soit B_u l'opérateur unitaire retard de processus stationnaire $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$u_t = \theta(B_a)\, a_t = \left(\sum_{j=o}^{q} \theta_j B_a^j\right)(a_t) \qquad \forall\ t\in\mathbb{Z}$$

d'où $B_a(u_t) = u_{t-1} = B_u(u_t) \qquad \forall\ t\in\mathbb{Z}$.

D'après l'hypothèse (▼3) l'opérateur $\theta(B_a)$ est inversible dans $\mathcal{L}(H(a))$

où on note $\mathcal{L}(V)$ l'espace habituel des opérateurs linéaires continus d'un espace vectoriel normé V dans lui-même.

De plus il est immédiat que $H(a) = H(u)$ d'où $B_u = B_a$

on montre de même que $B_u = B_y$ sur $H(u) = H(y)$ d'où le résultat.

(ii) Considérons une combinaison linéaire quelconque $\alpha_1 y_{t_1} + \ldots + \alpha_n y_{t_n}$ supposée nulle, donc on a

$$o = |\alpha_1 y_{t_1} + \ldots + \alpha_n y_{t_n}|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\alpha_1 e^{it_1\lambda} + \ldots + \alpha_n e^{it_n\lambda}|^2 \left|\frac{\theta(e^{-i\lambda})}{\phi_o(e^{-i\lambda})}\right|^2 d\lambda$$

d'où $(\alpha_1 e^{it_1\lambda} + \ldots + \alpha_n e^{it_n\lambda}) \dfrac{\theta(e^{-i\lambda})}{\phi_o(e^{-i\lambda})} = o$ $d\lambda$ - presque partout, or d'une part la fonction

précédente est continue sur $[-\pi, \pi]$ et d'autre part d'après l'hypothèse (▼3) $\theta(e^{-i\lambda}) \neq o$ $\forall\ \lambda\in[-\pi, \pi]$ d'où $\alpha_1 e^{it_1\lambda} + \ldots + \alpha_n e^{it_n\lambda} = o$ $\quad \forall\lambda\in[-\pi, \pi]$ les fonctions $\lambda \longmapsto e^{it\lambda}$

forment pour $t\in\mathbb{Z}$ une famille libre, donc on a bien $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = o$. □

(a) Considérons maintenant la résolution de l'équation (▼8) :

Pour toute valeur initiale x_o (par exemple) donnée dans $L^2(\Omega)$ l'équation (▼8) admet une solution $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ qui s'écrit :

$$(\blacktriangledown 9)\quad \begin{cases} x_t = x_o + y_1 + \ldots + y_t & \text{pour } t \geq 1 \\ x_o = x_o & \\ x_t = x_o - y_o - y_{-1} \ldots y_{t+1} & \text{pour } t \leq -1 \end{cases}$$

A chaque condition initiale correspond donc un seul processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ARIMA donc un seul opérateur retard B_x sur $\{x_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$.

Remarque

Pour rester dans le cadre fixé, à savoir obtenir des processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\Omega)$ il faut et il suffit de choisir $x_o\in L^2(\Omega)$.

Nous allons étudier l'influence du choix de la condition initiale sur la nature de B_x.

(b) Condition suffisante pour que l'opérateur B_x ne soit pas linéaire

i) Montrons que l'on a $sp(y) = sp(x) \Longleftrightarrow \exists\, t_o \in \mathbb{Z} \;/\; x(t_o) \in sp(y)$

en effet

$\Longrightarrow$ évident car alors $\forall\, t \in \mathbb{Z} \quad x(t) \in sp(y)$

$\Longleftarrow$ on a $x(t_o) \in sp(y)$ or d'après (▼9) on a

$$\forall\, t > t_o \quad x(t) = x(t_o) + y\,(t_o + 1) + \ldots + y(t-t_o)$$

$$\forall\, t < t_o \quad x(t) = x(t_o) - y(t_o) - \ldots - y(t-t_o + t)$$

donc $x(t) \in sp(y) \quad \forall\, t \in \mathbb{Z}$.

ii) Supposons que l'on ait choisi la condition initiale

$$(▼10) \quad x_o = \sum_{j=o}^{n-1} C_j\, y(-j) \quad .$$

Montrons alors qu'il n'existe pas d'opérateur linéaire prolongeant B_x *sur* $sp(x)$

(1er) • d'abord le cas simple si $\forall\, j=o,\ldots,n-1 \quad C_j = o$ i.e. $x_o = 0$

si B_x était linéaire sur $sp(x)$ on aurait $B_x(o) = o$

donc $x_{-1} = B_x(o) = o$ (et par récurrence $x_t = o \quad \forall\, t \leq o$)

or d'après (▼9) $x_{-1} = y_o \neq o$.

(2e) • autrement il existe au moins un des C_j qui n'est pas nul soit C_{n-1} ,

montrons alors que les $x_o, x_{-1}, \ldots, x_{-n}$ sont linéairement dépendants considérons une combinaison linéaire $\lambda_o x_o + \lambda_1 x_{-1} + \ldots + \lambda_n x_{-n}$ égale à zéro :

$$(▼11) \quad 0 = \lambda_o x_o + \lambda_1(x_o - y_o) + \lambda_2(x_o - y_o - y_{-1}) + \ldots + \lambda_n(x_o - y_o - y_{-1} - \ldots - y_{-n+1})$$

$$= [(\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n)C_o - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)]\, y_o + [(\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n)\, C_1 - (\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)]\, y_{-1} + .$$

$$\ldots + [(\lambda_o + \ldots + \lambda_n)\, C_{n-2} - (\lambda_{n-1} - \lambda_n)]\, y_{-n+2} + [(\lambda_o + \ldots + \lambda_n)C_{n-1} - \lambda_n]\, y_{-n+1}$$

De l'indépendance linéaire de $\{y(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (cf Proposition I) on déduit

$$(\text{▼}12) \begin{cases} (\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n) C_o - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) = 0 \\ (\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n) C_1 - (\lambda_2 + \ldots + \lambda_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n) C_{n-1} - \lambda_n = 0 \end{cases}$$

Ce système s'écrit encore

$$(\text{▼}13) \begin{cases} C_o \lambda_o + (C_o - 1) \lambda_1 + \ldots + (C_o - 1) \lambda_{n-1} = -(C_o - 1)\lambda_n \\ C_1 \lambda_o + C_1 \lambda_1 + (C_1 - 1) \lambda_2 + \ldots + (C_1 - 1)\lambda_{n-1} = -(C_1 - 1) \lambda_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{n-1} \lambda_o + C_{n-1} \lambda_1 + \ldots\ldots + C_{n-1} \lambda_{n-1} = -(C_{n-1} - 1) \lambda_n \end{cases}$$

si λ_n est connu (▼13) est un système de Cramer de n équations à n inconnues $\lambda_o, \ldots, \lambda_{n-1}$ car le déterminant de système n'est pas nul; en effet

$$\text{Soit } \Delta_n = \begin{vmatrix} C_o & C_o - 1 & \ldots\ldots & C_o - 1 \\ C_1 & C_1 & C_1 - 1 \ldots & C_1 - 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1} & C_{n-1} & \ldots\ldots & C_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & C_o - 1 & C_o - 1 \ldots\ldots & C_o - 1 \\ 0 & C_1 & C_1 - 1 & C_1 - 1 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & C_{n-1} & C_{n-1} & C_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\text{d'où } \Delta_n = \Delta_{n-1} = \Delta_2 = \begin{vmatrix} C_{n-2} & C_{n-2} - 1 \\ C_{n-1} & C_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \Delta_1 = C_{n-1} \neq 0$$

(2[e]1) si $C_j = o \ \forall j = o, \ldots, n-1$, alors la solution $(\lambda_o, \ldots, \lambda_{n-1})$ du système de Cramer (▼13) est un vecteur nul, et $x_n = o$ (on le voit en choisissant $\lambda_n \neq o$) .

En fait montrons le directement, comme $C_j = o \ \forall j = o, \ldots, n-1$ alors $x_n = \sum_{j=o}^{n-1} y(-j) - \sum_{j=o}^{n-1} y(-j) = o$ d'après (▼9) et (▼10). On conclut alors de même qu'en (1[er]) que B_X n'est pas linéaire sur sp(x).

(2°2) . s'il existe au moins un des $\{C_j\ ;\ j=o,\dots,n-1\}$ différent de l'unité, alors la solution unique $(\lambda_o,\dots,\lambda_{n-1})$ du système de Cramer (▼13) n'est pas un vecteur nul en choisissant par exemple $\lambda_n=-1$. Donc il existe au moins des λ_j non tous nuls ($\lambda_n=-1$ et $\exists\ \lambda_k\neq o\ \ o\leq k\leq n-1$) tels que $\lambda_o x_o + \lambda_1 s_{-1}+\dots+\lambda_n x_{-n} = o$ i.e. les $x_o, x_{-1},\dots, x_{-n}$ sont linéairement liés, même plus en choisissant $\lambda_n = -1$ on peut écrire :

(▼14) $x_{-n} = \sum_{j=o}^{n-1} \lambda_j x_{-j}$ où tous les $\lambda_j \in \mathbb{C}$; $j=o,\dots n-1$ ne sont pas tous nuls. Si maintenant l'opérateur B_x se prolonge par linéarité à sp(x) alors

$$x_{-n-1} = B_X(x_{-n}) = \sum_{j=o}^{n-1} \lambda_j x_{-j-1}$$

donc on a $y_{-n} = x_{-n} - x_{-n-1} = \sum_{j=o}^{n-1} \lambda_j (x_{-j} - x_{-j-1}) = \sum_{j=o}^{n-1} \lambda_j y_{-j}$

ce qui signifie que les $y_o, y_{-1},\dots, y_{-n}$ sont linéairement liés, ce qui est impossible d'après la proposition 1. □

Formulons les résultats précédents sous forme de

Lemme 1

(i) $sp(y) = sp(x) \iff \exists\ t_o \in \mathbb{Z}\ /\ x(t_o) \in sp(y)$

(ii) $\exists\ t_o \in \mathbb{Z}\ \exists\ n \in \mathbb{N}/x(t_o) = \sum_{j=o}^{n} y(t_o-j) \Longrightarrow \exists\ t_1 \in \mathbb{Z}/t_1 \leq t_o$ *et les* $x(t_o),\dots, x(t_1)$ *sont linéairement liés.*

(iii) si les conditions initiales sont telles que $sp(y) = sp(x)$ *alors l'opérateur* B_X *n'admet pas de prolongement linéaire à* $sp(x)$.

(c) Conditions nécessaires pour que l'opérateur B_X soit linéaire

Lemme 2

Supposons que l'opérateur B_X *se prolonge par linéarité sur* $sp(x)$.
Alors

(i) B_X *est injectif sur* $sp(y)$ *et* $B_X(\eta) = B_Y(\eta)\quad \forall\ \eta \in sp(y)$

où B_Y *est l'opérateur retard unitaire du processus* $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

(ii) on a $sp(y) \neq sp(x)$.

Démonstration

(i) en effet on a

$B_X(y_t) = B_X(x_t - x_{t-1}) = B_X(x_t) - B_X(x_{t-1}) = y_{t-1} = B_Y(y_t) \qquad \forall\ t \in \mathbb{Z}$

d'où par linéarité de B_X et B_Y on a $B_X(\eta) = B_Y(\eta)\quad \forall\ \eta \in sp(y)$

donc B_X est injectif car B_Y l'est.

(ii) $E(y_t) = o \quad \forall\, t \in \mathbb{Z}$ alors

d'une part si $sp(y) = sp(x)$ on aura $\forall\, t \in \mathbb{Z} \quad x_t \in sp(y)$ d'où $E(x_t) = 0$

d'autre part $H(x) = \overline{sp(x)} = \overline{sp(y)} = H(y)$

d'après (i) $B_X(\eta) = B_Y(\eta) \quad \forall \eta \in sp(y) = sp(x)$, comme B_Y est borné sur $sp(y)$ de même de B_X i.e.

$|B_X(\eta)|_{L^2(\Omega)} = |B_Y(\eta)|_{L^2(\Omega)} = |\eta|_{L^2(\Omega)}$. (la dernière égalité étant due au fait que le processus $(y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire centré donc son opérateur B_Y est unitaire),

donc B_X se prolonge par continuité de façon unique à $H(x) = \overline{sp(x)}$ et l'égalité

$B_X(\eta) = B_Y(\eta) \quad \forall\, \eta \in sp(x)$ se prolonge à $\overline{sp(x)} = H(x)$ par conséquent $B_X = B_Y$ ce qui signifie que le processus $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ serait stationnaire du 2ᵉ ordre, ce qui contredit la relation (▼9). □

Dans la démonstration du lemme 2, nous avons prouvé un résultat important que nous pouvons spécifier de façon plus générale dans la proposition suivante.

Proposition 2

Soit $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\Omega)$ un processus vérifiant $x_t - x_{t-1} = y_t \quad \forall\, t \in \mathbb{Z}$ où $(y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire de second ordre d'opérateur retard unitaire B_Y.

Si l'opérateur retard B_X est linéaire sur $sp(x)$ et vérifie la relation de continuité i.e.

$$(\blacktriangledown 15) \quad \exists\, M \in \mathbb{R}_+ \ / \quad \forall\, \eta \in sp(x) \quad |B_X(\eta)|_{L^2(\Omega)} \le M\, |\eta|_{L^2(\Omega)}$$

alors $B_X(\eta) = B_Y(\eta) \quad \forall\, \eta \in H(y) = \overline{sp(y)}$.

La preuve est analogue à (ii) du lemme 2.

Une des conditions suffisantes pour que l'opérateur B_X puisse se prolonger par linéarité à l'espace $sp(x)$ est que les $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ forment une famille libre. Nous allons étudier cette condition dans le lemme suivant :

Lemme 3

Pour qu'un processus $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\Omega)$ vérifiant l'équation $x_t - x_{t-1} = y_t \quad \forall\, t \in \mathbb{Z}$ où $(y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus ARMA (p,q) linéaire, stationnaire du 2ᵉ ordre, inversible bilatéralement soit tel que (x_t) soit une base de $sp(x)$ il suffit que $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifie l'une des deux conditions suivantes :

(i) la condition initiale x_{t_0} est choisie linéairement indépendante de $\{y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$

(ii) $x_{t_0} \in H(y) \setminus sp(y)$.

Démonstration

(i) cette condition est évidente. Remarquons qu'elle est en pratique facilement réalisable dans le cas où $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc car il suffit alors de choisir par exemple la condition initiale x_o non corrélée à $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

(ii) La condition $x_{t_o} \in H(y) \setminus sp(y)$ équivaut à ce que $x(t_o)$ n'est pas une combinaison linéaire finie des $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et donc équivaut à :

(▼16) $x(t_o) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j\, y_j$ où seul un nombre fini de C_j sont nuls.

Montrons que cette condition implique que les $\{x_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ forment une famille libre :

a) Considérons d'abord le cas simple suivant où

$$x_o = \sum_{j=o}^{\infty} C_j\, y_{-j} \quad .$$

Montrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ les $x_o, x_{-1}, \ldots, x_{-n}$ sont linéairement indépendants.

Considérons $\lambda_o x_o + \lambda_1 x_{-1} + \ldots + \lambda_n x_{-n} = o$ alors

$$0 = [(\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n)\, C_o - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)]\; y_o + [(\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n)\, C_1 - (\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)]\, y_{-1}$$

$$+ \;[(\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n)\, C_{n-1} - \lambda_n\,]\, y_{-n+1} \;+ \ldots + (\lambda_o + \ldots + \lambda_n)\; C_m\; y_{-m} + \ldots\ldots$$

où $C_m \neq o$ pour au moins un $m \geq n-1$ ce qui est possible d'après le choix des $C_j : j \in \mathbb{Z}$ la famille $\{y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ étant libre on a :

$$(\blacktriangledown 17)\quad \begin{cases} (\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n)\, C_o - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) = o & (1) \\ (\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n)\, C_1 - (\lambda_2 + \ldots + \lambda_n) = o & (2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n)\, C_{n-1} - \lambda_n = o & (3) \\ (\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n) C_m = o & (4) \end{cases}$$

De l'équation (4) et (3) on déduit que $\lambda_n = o$ puis de proche en proche que $\lambda_{n-1} = \lambda_{n-2} = \ldots = \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_o = 0$

Autrement dit les $\{x_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ forment une famille libre

b) Dans le cas général, on peut supposer sans perdre de généralité que $t_o = o$, alors la relation (16) s'écrit sous la forme

$$x_o = \sum_{j=o}^{\infty} C_j\, y_{-j} + \sum_{j=1}^{\infty} d_j\, y_j$$

où une infinité des C_j ou des d_j sont non nuls.

Montrons alors que $\forall$ n, $k \in \mathbb{N}$ les x_k , $x_{k-1}, \ldots, x_1, x_o, x_{-1}, \ldots, x_{-n}$ sont linéairement indépendants.

Considérons $\lambda_o x_o + \lambda_1 x_{-1} + \ldots + \lambda_n x_{-n} + \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_k x_k = o$ le même raisonnement qu'en a) nous montre qu'il existe un $h_m \in \{C_j, d_\ell ; j \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N} \quad j \geq n, \ell \geq k\}$ tel que l'on ait

$$(\text{V17 bis}) \begin{cases} (\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \mu_1 + \ldots + \mu_k) C_o - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) = o & (1') \\ (\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \mu_1 + \ldots + \mu_k) C_1 - (\lambda_2 + \ldots + \lambda_n) = o & (2') \\ \text{-----------------------------------} \\ (\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \mu_1 + \ldots + \mu_k) C_{n-1} - \lambda_n = o & (3') \\ (\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \mu_1 + \ldots + \mu_k) h_m = o & (4') \\ (\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \mu_1 + \ldots + \mu_k) d_1 + (\mu_1 + \ldots\ldots + \mu_k) = o & (1'') \\ \text{-----------------------------------} \\ (\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \mu_1 + \ldots + \mu_k) d_k + \mu_k = o & (3'') \end{cases}$$

on en déduit de même qu'en a) que $\lambda_{n-1} = \lambda_{n-2} = \ldots = \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_o = o$ et $\mu_k = \mu_{k-1} = \ldots = \mu_1 = o$ d'où le résultat. □

La condition (ii) du lemme 3 n'est pas suffisante pour assurer la linéarité de B_x.
C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 4

Supposons que $H(x) = H(y)$ et que le processus $(y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est ARMA (p,q) stationnaire du 2^{e} ordre inversible bilatéralement.
Alors l'opérateur B_X n'est pas linéaire sur $sp(x)$.

En effet d'abord $(y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ étant centré, on a $E(x_t) = E(x_o) = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{Z}$ car $x_o \in H(y)$.

Par ailleurs d'après lemme 2, si B_X était linéaire sur sp(x) alors

$B_X(\eta) = B_Y(\eta) \quad \forall\, \eta \in sp(y) \subsetneqq sp(x)$.

Par conséquent B_X étant borné sur sp(y), B_X se prolonge par continuité de façon unique à H(y) et $B_X = B_Y$ sur H(y), or H(y) = H(x) donc $B_X = B_Y$ donc il est immédiat que $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire de 2° ordre donc

$(x_t)_{t \in Z}$ admet pour densité spectrale $f(\lambda) = \dfrac{\sigma^2}{2\pi} \left| \dfrac{\theta(e^{-i\lambda})}{\phi_o(e^{-i\lambda})} \; \dfrac{1}{(1-e^{-i\lambda})} \right|^2$,

Cette dernière étant non $d\lambda$-intégrable sur $[-\pi, \pi]$ d'où contradiction. □

Remarque

Noter dans les lemmes 2 et 4 on a seulement $B_X(\eta) = B_Y(\eta)$ pour $\eta \in sp(y)$ mais $B_Y(x_t) \neq B_X(x_t)$ car x_t n'est pas nécessairement dans sp(y).

Résumons les résultats précédents dans le théorème suivant :

Théorème 2

soit $x : t \in \mathbb{Z} \longrightarrow x_t \in L^2(\Omega)$ *un processus vérifiant l'équation*

($\nabla 8$) $x_t - x_{t-1} = y_t \quad \forall\, t \in \mathbb{Z}$ *où* $(y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ *est le processus* ARMA (p,q) *stationnaire linéaire, inversible bilatéralement, d'opérateur retard unitaire* B_Y *et vérifiant l'équation* ($\nabla 1.2$) *alors*

(a) *à chaque condition initiale* x_{t_0} *donnée, il correspond une solution unique* $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ *de* ($\nabla 8$) *et le choix de la condition initiale influe sur la nature du processus, en particulier*

(b) *on a*

(i) $sp(y) = sp(x) \Rightarrow B_X$ *n'est pas linéaire sur* $sp(x)$

(ii) B_X *est linéaire sur* $sp(x)$ *alors* $H(y) \subsetneq H(x)$

L'exemple simple suivant permet d'illustrer l'influence de la condition initiale sur la nature des processus ARIMA : considérons l'équation

($\nabla 8$ bis) $x_t - x_{t-1} = a_t$ où $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc donné de $L^2(\Omega)$.

Au choix de la condition initiale $x_o \in L^2(\Omega)$ de norme unité et orthogonale à tout a_t ; $t \in \mathbb{Z}$ correspond un processus, solution de ($\nabla 8$ bis) dont l'opérateur retard B_X peut se prolonger par linéarité sur sp(x) tandis que l'opérateur B_U du processus $(u_t = x_t - x_o)_{t \in \mathbb{Z}}$ correspondant à la condition initiale $u_o = o$ n'est pas linéaire (D'ailleurs on peut vérifier directement que $B_U \neq B_X$).

2.2 Cas général

Nous allons généraliser dans cette section les résultats de [2.1] aux solutions des équations plus générales de la forme (▼1) que nous avons considérer dans l'introduction soit

$$\begin{cases} (▼1.1) \quad y_t = \sum_{j=o}^{q} \phi_{1j}\, x_{t-j} \quad \text{où } \phi_{10} = 1 \text{ et } d \in \mathbb{N}^* \\ (▼1.2) \quad \sum_{j=o}^{p} \phi_{oj}\, y_{t-j} = \sum_{k=o}^{q} \theta_k\, a_{t-k} \quad \text{avec } \theta_o = 1 = \phi_{oo}\ ,\ (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) il est immédiat que l'on peut écrire l'équation (▼1.1) sous la forme d'un système d'équations

$$(▼18) \begin{cases} x_t^{(1)} - e^{i\omega_1} x_{t-1}^{(1)} = y_t \\ x_t^{(2)} - e^{i\omega_2} x_{t-2}^{(2)} = x_t^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_t^{(d)} - e^{i\omega_d} x_{t-1}^{(d)} = x_t^{(d-1)} \qquad \forall\, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

avec $x_t = x_t^{(d)}$ $\forall\, t \in \mathbb{Z}$ et $\omega_j \in \mathbb{R}$ $j = 1,\dots, d$;

on voit facilement que la donnée de d valeurs initiales par exemple $x_o, x_{-1},\dots, x_{-d+1}$ correspond à la donnée d'une valeur initiale $x_o^{(j)}$ pour chacune des équations de (▼17). Donc tout revient à résoudre l'équation dans $L^2(\Omega)$

(▼19) $v_t - e^{i\omega} v_{t-1} = z_t$ $\forall\, t \in \mathbb{Z}$ avec pour condition initiale par exemple v_o

où $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus de $L^2(\Omega)$ que l'on s'est donné.

La solution de cette équation est alors unique et s'écrit

$$(▼20) \begin{cases} v_t = e^{i\omega t} v_o + e^{i\omega(t-1)} z_1 + \dots + e^{i\omega} z_{t-1} + z_t \qquad \forall\, t \geq 1 \\ v_o = v_o \\ v_t = e^{i\omega t} v_o - e^{i\omega t} z_o - e^{i\omega(t+1)} z_{-1} - \dots - e^{-i\omega} z_{t+1} \quad \forall\, t \leq -1 \end{cases}$$

Donc pour une condition initiale donnée la solution de l'équation (▼1.1) est unique.

<u>Proposition 3</u>

Etant donné une équation aux différences (▼1), soit $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in L^2(\Omega)$ le processus stationnaire du second ordre, linéaire, ARMA (p,q) inversible bilatéralement, solution de l'équation (▼1.2) alors *(i) à chaque condition initiale correspond une solution unique* $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *dans* $L^2(\Omega)$ *qui est non stationnaire*

* *on dira par la suite que* $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est un processus de type ARIMA*

(ii) si on suppose que l'opérateur retard B_X *d'un processus* $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *précédent se prolonge par linéarité à l'espace vectoriel* $sp(x)$ *alors* B_X *est un injectif sur* $sp(x)$ *et on a* $B_X(\eta) = B_y(\eta) \quad \forall\, \eta \in sp(y) \subsetneq sp(x)$, *où* B_y *est l'opérateur retard unitaire associe au processus stationnaire* $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

(iii) si on suppose que l'opérateur B_X *soit linéaire sur* $sp(x)$ *alors* $H(y)$ *admet un supplémentaire orthogonal* $H^\perp(y)$ *non nul dans* $H(x)$ *i.e.* $H^\perp(y) \neq \{0\}$ *et* $B_X(\eta) = B_y(\eta) \quad \forall \eta \in H(y)$.

La preuve est évidente et analogue aux démonstrations du lemme 2 et proposition 2. □

Box-Jenkins [1] évoque la possibilité que "$|B| \leq 1$" (suivant la notation même de ces auteurs) et même plus explicitement que

a) $(1 - B)^{-1} = 1 + B + B^2 + \ldots.$ [1] p 89 puis

b) $\nabla z_t = (1 - B)\, z_t = \lambda\, a_{t-1} + \nabla\, a_t \implies z_t = \lambda(1 - B)^{-1}\, a_{t-1} + a_t$ [1] p 105

Il pourrait alors venir l'idée d'émettre l'hypothèse que les processus ARIMA $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ puissent être définis par un opérateur B_X linéaire et de norme inférieure à l'unité.

Cette hypothèse est très attrayante car ainsi les processus ARIMA seraient des processus linéairement stationnarisables (L.S) i.e transformés de processus stationnaires par un opérateur linéaire continu et à inverse continu (Pour une définition précise de ces processus L.S, on peut se référer à MARTIN [3] ou à TJÖSTHEIM-THOMAS [4]. Malheureusement le théorème suivant montre que cette hypothèse ne peut pas être vérifiée, ni l'inversibilité de l'opérateur $(I - B_X)$.

<u>Théorème 3</u>

Soit $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *une solution de type ARIMA de l'équation* (▼1), *quelque soit la condition initiale chosisie*

(i) l'opérateur retard B_X *des processus* $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *ne peut pas être linéaire et de norme inférieure à l'unité sur* $H(x)$

(ii) si de plus $E(x_t) = \mu \quad \forall\, t \in \mathbb{Z}$, *l'opérateur retard* B_X *ne peut pas être linéaire sur* $sp(x)$ *et vérifier la condition que* $\Phi_1(B_X) = \sum_{j=0}^{d} \Phi_{1j}\, B_X^j$ *est inversible dans* $\mathcal{L}(H(x))$

* $\mathcal{L}(V)$ *note l'espace vectoriel de Banach habituel des opérateurs linéaires bornés d'un espace vectoriel normé* V *dans lui-même.*

Démonstration

a) d'abord si $\|B_X\| = \sup \left\{ \frac{|B_X(\eta)|_{L^2(\Omega)}}{|\eta|_{L^2(\Omega)}} \; ; \; \eta \in sp(x) \right\} < 1$

donc $\|B_X\| < 1$ sur $H(x)$ car B_X se prolonge à $H(x)$ en conservant sa norme

d'où $\phi_1(B_X) = \prod_{j=1}^{d} (I - e^{i\omega_j} B_X)$ est un opérateur inversible dans $\mathcal{L}(H(x))$ où I est l'opérateur unité de $\mathcal{L}(H(x))$.

b) si donc $\phi_1^{-1}(B_X)$ existe (donc linéaire) et est continu sur $\mathcal{L}(H(x))$ il est immédiat que $H(y) = H(x)$ et d'après proposition 3, on aurait $B_X = B_Y$.

c) par conséquent dans le cas (i) on avait $\|B_X\| < 1$ et $\|B_X\| = \|B_Y\| = 1$ ce qui est impossible tandis que dans le cas (ii) la relation $B_X = B_Y$ signifie que le processus $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ serait stationnaire du 2ᵉ ordre donc le processus $(\dot{x}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ où $\dot{x}_t = x_t - \mu$ admet pour densité spectrale

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{\theta(e^{-i\lambda})}{\phi_o(e^{-i\lambda})\phi_1(e^{-i\lambda})} \right|^2$$ qui est $d\lambda$ -non intégrale sur $(-\pi, \pi)$

(cf Théorème 1.4.2 de [2]) d'où contradiction. $\square$

Remarque 1 sur la condition $E(x_t) = \mu \quad \forall t \in \mathbb{Z}$ dans le théorème 3

(α) si $\exists j \in \{o, \ldots, d-1\} / \omega_j \neq o$, on pourra prendre des conditions initiales par exemple $x_{-d+1}, \ldots, x_o$ telles que $E(x_{-k}) = o \quad k=o, \ldots, d-1$ alors $E(x_t) = o$ car $x_t = \sum_{k=o}^{d-1} \mu_k x_{-k} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \theta_j(t) y_j$.

(β) si $\forall j=o, \ldots, d-1; \omega_j = o$ la condition $E(x_t) = \mu$ n'est pas en contradiction avec le fait que $(y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus centré car dans les équations (V18) $x_t - x_{t-1} = x_t^{(d-1)}$ d'où $E(x_t^{(d-1)}) = o$ don $E(x_t^{(j)}) = o \quad \forall j = 1, \ldots, d-1$ d'où $E(y_t) = o \qquad \forall t \in \mathbb{Z}$.

Remarque 2

On peut voir le résultat (i) du théorème précédent plus simplement :

En effet considérons par exemple (par commodité, bien que la preuve reste valable dans le cas général) que $\phi_1(B_X) = I - e^{i\omega} B_X$ avec $\|B_X\| < 1$ i.e. que $y_t = x_t - e^{i\omega} x_{t-1} \quad \omega \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$.

d'où par récurrence $x_t - \sum_{k=o}^{N} e^{ik\omega} y_{t-k} = e^{i(N+1)\omega} x_{t-N-1}$

$$\text{donc } \left| x_t - \sum_{k=o}^{N} e^{ik\omega} y_{t-k} \right|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|B_X\|^{N+1} \left| x_t \right|^2_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[N\,\infty]{} o$$

ce qui est en contradiction avec le théorème 1.

Théorème 4

Etant donné une équation aux différences (VI), dans laquelle on a choisi pour $(y_t)_{t\in \mathbb{Z}}$ le processus ARMA (p,q) stationnaire du second ordre, linéaire, inversible bilatéralement, comme solution de l'équation (VI.2).

Considérons les solutions de type ARIMA $(x_t)_{t\in \mathbb{Z}}$ de cette équation (VI) :

Alors

(i) si les conditions initiales sont choisies telles que l'on ait $sp(x) = sp(y)$ alors l'opérateur retard B_X du processus $(x_t)_{t\in \mathbb{Z}}$ ne peut pas se prolonger par linéarité à $sp(x)$.

(ii) si les conditions initiales sont choisies telle que l'on ait $H(x) = H(y)$ alors B_X ne peut pas être un opérateur linéaire sur $sp(x)$ autrement dit si B_X est linéaire sur $sp(x)$ alors $H(y)$ admet un supplémentaire orthogonal non trivial dans $H(x)$.

Commentaire

Le théorème montre que sous la condition $H(x) = H(y)$ il est complètement inutile d'espérer que les processus de type ARIMA puissent être des processus linéairement stationnarisables ou plus généralement des processus définis par un groupe d'opérateurs linéaires continus, considérés par Getoor [5] si ces derniers sont de moyenne constante.

Démonstration

Remarquons d'abord que sous les conditions initiales de (i) ou la condition $H(y)=H(x)$, $(x_t)_{t\in \mathbb{Z}}$ est centré car $(y_t)_{t\in \mathbb{Z}}$ l'est, le reste de la démonstration est analogue à celle des lemmes 2 et 4 :

(i) supposons que l'on ait $sp(x) = sp(y)$ et que B_X soit linéaire sur $sp(x)$, alors d'après proposition 3 $B_X(\eta) = B_Y(\eta)$ $\forall\, \eta \in sp(y)$, or l'opérateur B_Y est unitaire sur $H(y)$ et comme $sp(x) = sp(y)$, on a $B_X(x_t) = B_Y(x_t)$ $\forall\, t \in \mathbb{Z}$ d'où $B_X = B_Y$ sur $H(y) = H(x)$ d'où $(x_t)_{t\in \mathbb{Z}}$ serait un processus stationnaire ce qui est contradictoire.

(ii) supposons que $H(x) = H(y)$. Si B_X était un opérateur linéaire continu sur $sp(x)$, B_X serait linéaire et continu sur $H(x)$ et par prolongement unique on a $B_X = B_Y$ sur $\overline{sp(y)} = H(y) = H(x)$ d'où la même conclusion qu'en (i). □

Conclusion

Etant donné un processus de type ARIMA $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ d'opérateur retard B_X

(1) il n'est pas possible que B_X soit linéaire et $\|B_X\| < 1$.

(2) si on note $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus ARMA associé à $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

alors

(i) $sp(y) = sp(x) \Longrightarrow B_X$ non linéaire sur $sp(x)$

(ii) $H(y) = H(x) \Longrightarrow B_X$ n'est pas linéaire et continu sur $sp(x)$.

Donc si on veut obtenir un processus de type ARIMA $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tel que B_X soit linéaire et continu sur $sp(x)$ il faut choisir les conditions initiales en dehors de $H(y)$.

Cette dernière conclusion a un sens puisqu'il existe des processus ARIMA possédant un opérateur retard linéaire et borné.

En effet considérons l'exemple simple suivant :

Soit $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus ARIMA, solution dans $L^2(\Omega)$ de l'équation (▼8 bis) $x_t - x_{t-1} = a_t$, correspondant à la condition initiale $x_o \in L^2(\Omega)$ de norme unité et orthogonale à tout a_t, $\forall t \in \mathbb{Z}$ (où $(a_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc donné de $L^2(\Omega)$) tel que $|a_t|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$).

On sait alors d'après le lemme 3 et la remarque précédant ce lemme que l'opérateur retard B_X du processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est linéaire. Il nous reste à montrer que B_X est borné i.e.

$$\exists M > o \quad / \forall \eta \in sp(x) \quad |B_X(\eta)|_{L^2(\Omega)} \leq |\eta|_{L^2(\Omega)}$$

a) considérons d'abord le cas simple où

$\eta = \lambda x_o + \mu x_n = \lambda x_o + \mu (x_o + a_1 + \ldots + a_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$B_X(\eta) = \lambda x_{-1} + \mu x_{n-1} = \lambda (x_o - a_o) + \mu(x_o + a_1 + \ldots + a_{n-1})$

d'où $|\eta|^2_{L^2(\Omega)} = (\lambda + \mu)^2 + n\mu^2$

$$|B_X|^2_{L^2(\Omega)} = (\lambda + \mu)^2 + \lambda^2 + (n-1)\mu^2$$

• si $\lambda = o$ il est trivial que $|B_X\eta|^2_{L^2(\Omega)} \leq |\eta|^2_{L^2(\Omega)}$

• si $\lambda \neq o$, il nous faut chercher une constante $M > o$ telle que

$$|B_X\eta|^2_{L^2(\Omega)} \leq M|\eta|^2_{L^2(\Omega)} \iff (\lambda+\mu)^2+\lambda^2+(n-1)\,\mu^2 \leq M\,[(\lambda+\mu)^2+n\mu^2]$$

(▼21) $$\iff \mu^2\,[M(n+1)-n] + \lambda^2(M-2) + 2\,\lambda\mu(M-1) \geq o$$

(▼22) $$\iff \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 [M(n+1)-n] + 2\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)(M-1) + M-2 \geq o$$

Pour montrer l'inégalité (▼22) il suffit de choisir M tel que le discriminant Δ' de (▼22) soit négatif
or $\Delta' = -\,n\,M^2 + 3\,n\,M + (1-2n)$
et le discriminant Δ du trinôme (en M) Δ' est $\Delta = n(n+4) > o$

Donc Δ' admet 2 racines $M_1 = \dfrac{3\,n-\sqrt{n(n+4)}}{2n}$ et $M_2 = \dfrac{3+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}{2}$ telles que si $M > M_2$ alors $\Delta' < o$

or $M_2 < \frac{6}{2} = 3$

Donc il suffit de choisir $M = 3$ pour que l'on ait $|B_X\eta|^2_{L^2(\Omega)} \leq M|\eta|^2_{L^2(\Omega)}$

Notons que pour la valeur $M = 3$ la relation (▼21) devient

(▼23) $\mu^2(2\,n+3) + \lambda^2 + 4\,\lambda\mu > o$

b) cas général : $\forall\ \eta\in sp(x)$ on peut toujours l'écrire sous la forme suivante

$$\eta = \theta_k\,x_{-t_1,\ldots-t_k}+\ldots+\theta_2\,x_{-t_1-t_2}+\theta_1\,x_{-t_1}+\lambda_o\,x_o+\lambda_1\,x_{\ell_1}+\lambda_2\,x_{\ell_1+\ell_2}+\ldots+\lambda_n x_{\ell_1+\ell_2+\ldots+\ell_n}$$

où θ_j, $\lambda_{j'} \in \mathbb{R}$; t_j, $\ell_{j'} \in \mathbb{N}^*$ $\quad j=1,\ldots,k \quad j'=o,\ldots,n$

donc

$$\eta = \theta_k\left(x_o - a_o-\ldots-a_{-t_1-\ldots-t_k+1}\right)+\ldots+\theta_2\left(x_o-a_o-\ldots-a_{-t_1-t_2+1}\right)+\theta_1\left(x_o-a_o-\ldots-a_{-t_1+1}\right)+$$
$$+\lambda_o\,x_o+\lambda_1\left(x_o+a_1+\ldots+a_{\ell_1}\right)+\lambda_2\left(x_o+a_1+\ldots+a_{\ell_1}+a_{\ell_1+1}+\ldots+a_{\ell_1+\ell_2}\right)+\ldots+$$
$$\ldots\ldots+\lambda_n\left(x_o+a_1+\ldots+a_{\ell_1+\ldots+\ell_n}\right)$$

d'où

$$B_X(\eta) = \theta_k\left(x_o-a_o-\ldots-a_{-t_1-\ldots-t_k}\right)+\ldots+\theta_2\left(x_o-a_o-\ldots-a_{-t_1-t_2}\right)+\theta_1\left(x_o-a_o-\ldots-a_{-t_1}\right)$$
$$+\lambda_o\left(x_o-a_o\right)+\lambda_1\left(x_o+a_1+\ldots+a_{\ell_1-1}\right)+\lambda_2\left(x_o+a_1+\ldots+a_{\ell_1-1}+\ldots+a_{\ell_1-1+\ell_2}\right)+\ldots$$
$$\ldots\ldots+\lambda_n\,x_o+a_1+\ldots+a_{\ell_1-1}+\ldots+\ell_n$$

par conséquent

$$|\eta|^2_{L^2(\Omega)} = \left(\lambda_o+\theta_1+\ldots+\theta_k+\lambda_1+\ldots+\lambda_n\right)^2+\left(\lambda_1+\ldots+\lambda_n\right)^2\ell_1+\left(\lambda_2+\ldots+\lambda_n\right)^2\ell_2+\ldots+\lambda_n^2\,\ell_n+$$
$$+(\theta_1+\ldots+\theta_k)^2\,(t_1)+(\theta_2+\ldots+\theta_n)^2\,t_2+\ldots+\theta_k^2\,t_k$$

en posant $\begin{cases} \lambda = (\lambda_o + \theta_1 + \ldots + \theta_k) \\ \mu = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) \end{cases}$

on a

$$|\eta|^2_{L^2(\Omega)} = (\lambda+\mu)^2 + \mu^2 \ell_1 + (\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)^2 \ell_2 + \ldots + \lambda_n^2 \ell_n + (\theta_1 + \ldots + \theta_k)^2 t_1 + (\theta_2 + \ldots + \theta_k)^2 t_2 + \ldots + \theta_k^2 t_k .$$

$$|B_X(\eta)|^2_{L^2(\Omega)} = (\lambda + \mu)^2 + \lambda^2 + \mu^2(\ell_1 - 1) + (\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)^2 \ell_2 + \ldots + \lambda_n^2 \ell_n + (\theta_1 + \ldots + \theta_k)^2 t_1 + $$
$$+ (\theta_2 + \ldots + \theta_k)^2 t_2 + \ldots + \theta_k^2 t_k .$$

on a bien la relation $|B_X(\eta)|^2_{L^2(\Omega)} \leq 3 \, |\eta|^2_{L^2(\Omega)}$

car cette relation s'écrit :

$$(\lambda + \mu)^2 + \lambda^2 + \mu^2(\ell_1 - 1) + (\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)^2 \ell_2 + \ldots + \ldots + \lambda_n^2 \ell_n + (\theta_1 + \ldots + \theta_k)^2_{t_1} + \ldots + \theta_k^2 t_k \leq$$

$$\leq 3 \, [(\lambda + \mu)^2 + \mu^2(\ell_1) + (\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)^2 \ell_2 + \ldots + \lambda_n^2 \ell_n + (\theta_1 + \ldots + \theta_k)^2 t_k + \ldots + \theta_k^2 t_k]$$

cette inégalité équivaut à la suivante

$$\mu^2(2\ell_1 + 3) + \lambda^2 + 4 \lambda\mu + 2 \, [(\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)^2 \ell_2 + \ldots + \lambda_n^2 \ell_n + (\theta_1 + \ldots + \theta_k)^2 t_1 + \ldots + \theta_k^2 t_k] \geq o$$

or d'après (▼23) on a $\mu^2(2\ell_1 + 3) + \lambda^2 + 4 \lambda\mu \geq o$

d'où le résultat. □

Je tiens enfin à exprimer mes sincères remerciements à Monsieur Le Professeur ETTINGER P, de m'avoir signalé la relation entre les conditions initiales [2.1] et la linéarité de B_X et de m'avoir incité à étudier l'existence de processus ARIMA ayant un opérateur retard linéaire et borné.

ABSTRACT

The present work is mainly concerned to study the nature of the shift operator B_X of ARIMA processes. It is concluded that the ARIMA processes are unlinearisable (theorem 1). The shift operator B_X of such processes cannot be linear and normed by a value inferior to one (theorem 3). Also it is revealed that the nature of B_X (linearity or linearity and boundedness) is strongly dependant on the choice of the prevailing conditions of such processes (theorem 4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOX, G.-JENKINS, G. : Time Series Analysis, forecasting and control. Holden Day, San Francisco, 1970.

[1 bis] HANNAN, E.J. : Multiple Time series - Wiley (1970).

[2] DOSSOU-GBETE, S. - ETTINGER, P. - de FALGUEROLLES, A. : Contribution à l'étude des processus ARMA. Publication du Laboratoire de Statistique - Université P. Sabatier - Toulouse N°5 (1976).

[3] MARTIN, M. : Utilisation des méthodes de l'analyse spectrale à la prévision linéaire de certains processus stationnaires. Rev. CETHEDEC 16 (1968) (137-148).

[4] TJOSTHEIM, D. - THOMAS, J.B. : Some properties and examples of random processes that are almost wide sense stationary. I.E.E.E. Trans. Information th.21 (1975) (257-262).

[5] GETOOR, R.K. : The shift operator for non-stationary stochastic processes. Duke Math. J. 23 (1956) (175-187).