

# STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

JACQUES DAUXOIS

JEANNE FINE-FONTAN

ALAIN POUSSE

## **Échantillonnage en segmentation. Étude de la convergence**

*Statistique et analyse des données*, tome 4, n° 3 (1979), p. 45-53

[http://www.numdam.org/item?id=SAD\\_1979\\_\\_4\\_3\\_45\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAD_1979__4_3_45_0)

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ECHANTILLONNAGE EN SEGMENTATION  
ETUDE DE LA CONVERGENCE

Jacques DAUXOIS, Jeanne FINE-FONTAN, Alain POUSSE

Laboratoire de Statistique et Probabilités  
E.R.A. - C.N.R.S. n° 591  
Université Paul Sabatier - 31077 TOULOUSE Cedex

1 - ECHANTILLON STATISTIQUE ET ECHANTILLON DE BASE EN ANALYSE DES DONNEES.

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé et  $X$  une v.a. définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans un espace probabilisable  $(\Omega', \mathcal{A}')$ . On suppose que  $\mathcal{A}$  est une tribu qui contient le singleton  $\{x\}$ , pour tout  $x$  de  $\Omega$ : ceci est notamment le cas si  $\Omega$  est fini ou dénombrable et si  $\mathcal{A}$  est la tribu de ses parties, ou si  $\Omega$  est un espace topologique muni de sa tribu borélienne.

On obtient, de façon classique, un échantillon statistique de taille  $n$  associé à  $X$  à partir de l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)^{\otimes \mathbb{N}^*}$ . Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et tout  $i$  de  $I_n = \{1, \dots, n\}$ , on note  $\Pi_i$  la  $i$ ème projection canonique :  $\omega = \{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}^*} \rightarrow \omega_i$ . Ces applications  $(\Pi_i)_{i \in I_n}$  sont des v.a. à valeurs dans  $(\Omega, \mathcal{A})$ , indépendantes et de même loi  $P$ . On pose :

$$\forall i \in I_n \quad X_i = X \circ \Pi_i$$

Les v.a.  $(X_i)_{i \in I_n}$  forment un échantillon statistique, c'est-à-dire sont indépendantes et de même loi  $P_X$  que  $X$ . On a par ailleurs, pour tout  $\omega$  de  $\Omega^{\mathbb{N}^*}$  :

$$X_i(\omega) = X(\omega_i)$$

Si  $\Omega_n^\omega$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\omega \in \Omega^{\mathbb{N}^*}$ ) est le sous-ensemble de  $\Omega$  image de la suite finie  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  et si on le munit de la tribu de ses parties, on voit que la valeur en  $\omega$  de la v.a.  $X_i$  ( $i \in I_n$ ) est effectivement la valeur prise en  $\omega_i$  par la restriction  $X^n$  de  $X$  à  $\Omega_n^\omega$ , ce qui légitime la pratique courante de l'Analyse des Données.

Cependant, comme ni  $P$ , ni même  $P_X$  ne sont connues, on probabilise  $(\Omega_n^\omega, \mathcal{P}(\Omega_n^\omega))$  par la probabilité  $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\omega_i}$ , où  $\delta_x$  est la mesure de Dirac au point  $x$  ( $\mu_n$  affecte donc à chaque "individu"  $\omega_i$  un "poids" égal à sa fréquence d'apparition). Cela revient implicitement à considérer la probabilité  $\nu_n^\omega = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\omega_i}$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Or, pour tout  $A$  de  $\mathcal{A}$  :

$$v_n^\omega(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_A(\omega_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_A \circ \Pi_i(\omega)$$

La suite  $\{1_A \circ \Pi_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de v.a. réelles, indépendantes, de même loi et intégrables (d'espérance mathématique  $P(A)$ ), donc, d'après la loi forte des grands nombres,  $v_n^\omega(A)$  converge presque sûrement vers  $P(A)$ . La probabilité image de  $\mu_n^\omega$  par  $X^n$ , qui est aussi l'image de  $v_n^\omega$  par  $X$ , converge donc de la même façon vers  $P_X$ .

On remarque qu'on peut sans difficulté considérer, non un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , mais une structure statistique  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ .

La formalisation ci-dessus a été implicitement utilisée en [3] pour établir la convergence d'analyses factorielles obtenues par échantillonnage.

## 2 - LA SEGMENTATION

En Analyse des Données, la méthode de segmentation répond au problème suivant : soit un échantillon de taille  $n$  sur lequel sont observées  $p$  variables statistiques qualitatives  $X_1, \dots, X_p$ , et une variable statistique  $Y$  qui peut être qualitative ou quantitative unidimensionnelle ou multidimensionnelle. On cherche à "expliquer"  $Y$  au moyen des autres variables. La segmentation conduit d'une part à une partition de l'échantillon en "segments", chacun le plus homogène possible, et les plus différenciés deux à deux, et d'autre part à un arbre dichotomique dont chaque branche met en évidence une hiérarchie entre les variables explicatives  $X_1, \dots, X_p$ , la première apparue (donc la plus haute dans l'arbre) étant considérée comme la plus liée au critère  $Y$ , et ainsi de suite.

Soient donc  $p$  v.a.  $X_1, \dots, X_p$  sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , "qualitatives" (c'est-à-dire que  $X_i$  est à valeurs dans un ensemble fini  $E_i$ , muni de la tribu de ses parties), et une v.a.  $Y$  de  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  dans  $(\Omega', \mathcal{A}')$ . A chaque étape, on va considérer l'une des v.a.  $(X_i)_{i=1, \dots, p}$ , que l'on notera  $X$ . Soit  $\mathcal{B}$  la sous-tribu de  $\mathcal{A}$  engendrée par  $X$ . En suivant [1] et [2], on se place sur  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  pour définir la segmentation.

### Cas où $Y$ est qualitative

$\Omega'$  est alors fini, et  $\mathcal{A}'$  est  $\mathcal{P}(\Omega')$ . Soit  $\mathcal{C}$  la sous-tribu de  $\mathcal{A}$  engendrée par  $Y$ . Par définition, une étape de segmentation est la recherche de la v.a. de Bernoulli  $X'$  ( $X'$  ne prend donc que deux valeurs distinctes) de  $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ , centrée et normée, la plus proche de  $L^2(\Omega, \mathcal{C}, P)$ . Comme  $\mathcal{B}$  est finie, il n'existe qu'un nombre fini de v.a. de Bernoulli dans  $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ , donc le problème admet toujours une solution.

La méthode est actuellement utilisée souvent sans aucune contrainte sur les variables explicatives (quant au nombre de leurs modalités, notamment) ; il nous a donc paru intéressant d'étudier ici la stabilité dans le cadre le plus général.

### Cas où $Y$ est quantitative

La définition est la même que ci-dessus, en remplaçant  $L^2(\Omega, \mathcal{C}, P)$  par le sous-espace  $F_Y$  de  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  des v.a. (centrées) combinaisons linéaires des composantes centrées de  $Y$ .

On peut considérer qu'on a ainsi défini la "segmentation exacte", qu'on ne peut obtenir que si  $P$  est connue (ou au moins  $P_{(X, Y)}$ ).

On travaille en Analyse des Données à partir d'un échantillon  $\omega_1, \dots, \omega_n$ . On peut alors utiliser les notations du paragraphe 1, que l'on applique aux v.a.  $X, Y$  ou  $Z = (X, Y)$ . La segmentation est alors obtenue comme ci-dessus en remplaçant  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  par  $(\Omega_n^\omega, \mathcal{P}(\Omega_n^\omega), \mu_n^\omega)$ ,  $X$  par  $X^n$  et  $Y$  par  $Y^n$ . Elle est implicitement regardée comme une "segmentation approchée par échantillonnage" de la segmentation exacte. On se propose d'examiner ici le bien-fondé de ce point de vue, par une étude de la convergence lorsque la taille  $n$  de l'échantillon augmente indéfiniment.

### 3 - CAS D'UN CRITERE Y QUALITATIF.

A chaque étape de la segmentation exacte, soit  $X'$  une v.a. de Bernoulli, de  $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ , qui engendre la tribu  $\mathcal{D}$ . On note  $\{D_1, D_2\}$  la partition de  $\Omega$  qui lui est associée. Il correspond à  $X'$  une seule v.a. de Bernoulli  $U'$  centrée et normée qui engendre  $\mathcal{D}$  (au signe près). La tribu  $\mathcal{C}$  est engendrée par une partition  $\{C_1, \dots, C_q\}$  de  $\Omega$ , et on note :

$$p_{jk} = P [ D_j \cap C_k ] \quad j = 1, 2 \quad k = 1, \dots, q$$

d'où, de façon classique :

$$p_{.k} = p_{1k} + p_{2k} \quad p_{j.} = \sum_{k=1}^q p_{jk}$$

Soit  $d$  la distance de  $U'$  à  $L^2(\Omega, \mathcal{C}, P)$ , et  $\rho$  l'unique coefficient de corrélation canonique de l'analyse canonique de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  (cf. [3] p. 79 à 81 ; on sait qu'on peut alors supposer, sans perte de généralité, que les  $p_{.k}$  et  $p_{j.}$  sont non nuls). On a :

$$d^2 = 1 - \rho^2$$

et, d'après [4] ou [3] :

$$1 + \phi^2 = \sum_{i=0}^1 \rho_i^2 = 1 + \rho^2 = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^q \left( \frac{p_{jk}}{p_{j.} p_{.k}} \right)^2 p_{j.} p_{.k}$$

d'où :

$$d^2 = 2 - \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^q \frac{p_{jk}^2}{p_{j.} p_{.k}}$$

On peut remarquer que  $d^2$  ne dépend que des tribus  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$ , et ne dépend donc de  $X'$ , v.a. de Bernoulli initiale, que par l'intermédiaire de  $\mathcal{D}$ .

Pour la segmentation approchée, on considère la restriction  $X'^n$  de  $X'$  à  $\Omega_n^\omega$  ;  $X'^n$  est mesurable par rapport à la tribu  $\mathcal{D}^n$  engendrée par la restriction  $X^n$  de  $X$  à  $\Omega_n^\omega$ . Il lui correspond la partition  $\{D_1^n, D_2^n\}$  de  $\Omega_n^\omega$ , où  $D_j^n = D_j \cap \Omega_n^\omega$  ( $j=1,2$ ), et on pose :  $C_k^n = C_k \cap \Omega_n^\omega$  ( $k=1, \dots, q$ ) ; la restriction  $Y^n$  de  $Y$  à  $\Omega_n^\omega$  engendre alors la tribu  $\mathcal{C}^n$  associée à la partition  $\{C_k^n\}_{k=1, \dots, q}$ .

On note :

$$\Pi_{jk}^{(n, \omega)} = \mu_n^\omega [ D_j^n \cap C_k^n ] = \nu_n^\omega [ D_j \cap C_k ]$$

et donc :

$$\Pi_{j.}^{(n, \omega)} = \nu_n^\omega (D_j) \quad \Pi_{.k}^{(n, \omega)} = \nu_n^\omega [ C_k ]$$

D'après le paragraphe 1, pour tout couple  $(j, k)$ , et pour presque tout  $\omega$  de  $\Omega^{\mathbb{N}^*}$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{j,k}^{(n,\omega)} = P[D_j \cap C_k] = P_{jk}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_j^{(n,\omega)} = p_j.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{.k}^{(n,\omega)} = p_{.k}$$

Comme  $p_j$  et  $p_{.k}$  sont non nuls, il existe  $n_0$  tel que  $\Pi_j^{(n,\omega)}$  et  $\Pi_{.k}^{(n,\omega)}$  sont non nuls, presque sûrement, pour  $n \geq n_0$ . Si  $V'$  est une v.a. de Bernoulli centrée et normée associée à  $X'^n$ , sa distance  $d_{n,\omega}$  à  $L^2(\Omega_n^\omega, \mathcal{G}_n^\omega, \mu_n^\omega)$  vérifie, comme ci-dessus :

$$d_{n,\omega}^2 = 2 - \frac{\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^q [\Pi_{jk}^{(n,\omega)}]^2}{\Pi_j^{(n,\omega)} \Pi_{.k}^{(n,\omega)}}$$

On en déduit, pour presque tout  $\omega$  de  $\Omega^{\mathbb{N}^*}$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{n,\omega} = d$$

En considérant toutes les sous-tribus  $\mathcal{D}$  de Bernoulli de  $\mathcal{B}$ , qui sont en nombre fini (on peut les indexer par  $i$  variant dans  $I$ ), on obtient toutes les sous-tribus  $\mathcal{D}^n$  de Bernoulli de  $\mathcal{B}^n$ . Donc, pour presque tout  $\omega$ , il existe  $n_1(\omega)$  tel que :

$$\forall n \geq n_1(\omega) \quad \inf_{i \in I} d_{n,\omega}^i = \inf_{i \in I} d^i$$

La sous-tribu  $\mathcal{D}$  "optimale" induit alors sur  $\Omega_n^\omega$  la sous-tribu  $\mathcal{D}^n$  "optimale".

On voit ainsi que, pour presque tout  $\omega$ , il existe  $n_1(\omega)$  tel que, pour tout  $n$  supérieur ou égal à  $n_1(\omega)$ , la segmentation sur l'échantillon "coïncide" avec la segmentation exacte.

#### 4 - CAS D'UN CRITERE Y QUANTITATIF UNIDIMENSIONNEL

Comme précédemment, à chaque étape de la segmentation exacte, on note  $X'$  une v.a. de Bernoulli centrée normée de  $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ , et  $\{D_1, D_2\}$  la partition de  $\Omega$  associée à la tribu  $\mathcal{D}$  engendrée par  $X'$ .

Soit  $Y$  une v.a. réelle sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , de carré intégrable. Le sous-espace  $F_Y$  est alors de dimension 1, et engendré par  $Y - E(Y)$ . Soit  $W$  le vecteur unitaire de  $F_Y$  égal à  $\frac{Y - E(Y)}{\|Y - E(Y)\|}$ .

Minimiser la distance de  $X'$  à  $F_Y$  est équivalent à maximiser la valeur absolue du coefficient de corrélation de  $X'$  et  $W$ . Or,  $X'$  s'écrit :

$$X' = a 1_{D_1} + b 1_{D_2}$$

avec, comme  $X'$  est centrée et normée :

$$a = \sqrt{\frac{P(D_2)}{P(D_1)}}, \quad b = -\sqrt{\frac{P(D_1)}{P(D_2)}}.$$

Le coefficient de corrélation est donc :

$$\langle X', W \rangle = a \int_{D_1} W dP + b \int_{D_2} W dP$$

$W$  est centrée, d'où :

$$\int_{\Omega} W dP = \int_{D_1} W dP + \int_{D_2} W dP = 0$$

et ainsi :

$$\langle X', W \rangle = \left\{ \sqrt{\frac{P(D_2)}{P(D_1)}} + \sqrt{\frac{P(D_1)}{P(D_2)}} \right\} \int_{D_1} W dP = \frac{1}{\sqrt{P(D_1)P(D_2)}} \int_{D_1} W dP$$

Pour expliciter la segmentation approchée, on reprend les notations du paragraphe 3. Soit  $V^n$  la v.a.  $\frac{Y^n - E_n(Y^n)}{\|Y^n - E_n(Y^n)\|_n}$ , où  $E_n$  est l'intégrale sur  $\Omega_n^\omega$  pour la probabilité  $\mu_n^\omega$ , et  $\|\cdot\|_n$  la norme de  $L^2(\Omega_n^\omega, \mathcal{P}(\Omega_n^\omega), \mu_n^\omega)$ . On cherche la partition  $\{\Delta_1^n, \Delta_2^n\}$  de  $\Omega_n^\omega$  qui maximise, comme ci-dessus, la valeur absolue de :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_n^\omega(\Delta_1^n)\mu_n^\omega(\Delta_2^n)}} \int_{\Delta_1^n} v^n d\mu_n^\omega = I(\Delta_1^n, \Delta_2^n)$$

A chaque partition  $\{D_1, D_2\}$  de  $\Omega$ , on associe  $D_1^n = D_1 \cap \Omega_n^\omega$  et  $D_2^n = D_2 \cap \Omega_n^\omega$ .

D'après le paragraphe 1, pour  $i = 1$  ou  $2$  :

$$\mu_n^\omega(D_i^n) = v_n^\omega(D_i) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^\omega(D_i) = P(D_i) \quad \text{presque sûrement.}$$

De plus

$$E_n(Y^n) = \int_{\Omega_n^\omega} Y^n d\mu_n^\omega = \int_{\Omega} Y d\nu_n^\omega = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y \circ \pi_i(\omega)$$

Comme  $Y$  appartient à  $L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ , on déduit de la loi forte des grands nombres la convergence presque sûre de  $E_n(Y^n)$  vers  $E(Y)$ . En outre :

$$\|Y^n - E_n(Y^n)\|_n^2 = \text{var}_n Y_n = E_n[Y_n^2] - [E_n(Y_n)]^2,$$

qui converge presque sûrement (loi forte appliquée à  $Y_n^2$  cette fois) vers

$$E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \|Y - E(Y)\|^2$$

Enfin, la loi forte appliquée à  $Y \mathbb{1}_{D_1}$  établit la convergence presque sûre de  $\int_{D_1^n} Y^n d\mu_n^\omega = \int_{D_1} Y d\nu_n^\omega$  vers  $\int_{D_1} Y dP$ . Comme  $I(D_1^n, D_2^n)$  s'écrit :

$$I(D_1^n, D_2^n) = \frac{1}{\sqrt{\mu_n^\omega(D_1^n)\mu_n^\omega(D_2^n)}} \cdot \frac{1}{\|Y^n - E_n(Y^n)\|_n} \left[ \int_{D_1^n} Y^n d\mu_n^\omega - E_n(Y^n) \mu_n^\omega(D_1^n) \right]$$

on en déduit la convergence presque sûre, lorsque  $n$  augmente indéfiniment, de  $I(D_1^n, D_2^n)$  vers

$$\frac{1}{\sqrt{P(D_1)P(D_2)}} \int_{D_1} W dP.$$

De la même façon qu'au paragraphe 3, on voit donc que, si  $\{D_1, D_2\}$  est la partition optimale de la segmentation exacte, la segmentation approchée, pour  $n$  suffisamment grand, conduit presque sûrement à la partition  $\{D_1^n, D_2^n\}$ , où  $D_i^n$  est la trace de  $D_i$  sur  $\Omega_n^{\omega}$  ( $i=1,2$ ).

##### 5 - CAS D'UN CRITERE QUANTITATIF MULTIDIMENSIONNEL.

Dans le cadre du paragraphe précédent, on peut voir que la distance  $d$  de  $X'$  à  $F_Y$  vérifie :

$$\|Y - E(Y)\|^2 \cdot d^2 = \int_{D_1} (Y - \bar{Y}_1)^2 dP + \int_{D_2} (Y - \bar{Y}_2)^2 dP$$

où

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{P(D_1)} \int_{D_1} Y dP \quad \text{et} \quad \bar{Y}_2 = \frac{1}{P(D_2)} \int_{D_2} Y dP$$

En effet, si  $Z$  est  $Y - E(Y)$ , on a :

$$\int_{D_1} (Y - \bar{Y}_1)^2 dP = \int_{D_1} (Z - \bar{Z}_1)^2 dP = \int_{D_1} Z^2 dP - \frac{1}{P(D_1)} \left( \int_{D_1} Z dP \right)^2$$

d'où, comme  $Z$  est centrée

$$\|Z\|^2 \cdot d^2 = \int_{\Omega} Z^2 dP - \frac{1}{P(D_1)P(D_2)} \left( \int_{D_1} Z dP \right)^2$$

c'est-à-dire, puisque  $Z = W \|Z\|$  :

$$d^2 = [1 - \langle X', W \rangle^2] \quad , \quad \text{d'où le résultat.}$$

C'est la généralisation de cette expression qui va être utilisée dans le cas d'un critère multidimensionnel.

Soit, pour  $q$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $Y = (Y_1, \dots, Y_q)$  une v.a. sur  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ , à valeurs dans  $(\mathbb{R}^q, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q})$  où  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^q}$  est la tribu borélienne de  $\mathbb{R}^q$ . On suppose que chaque composante  $Y_{\ell}$  de  $Y$  est de carré intégrable. Etant donné la définition de  $F_Y$ , on ne restreint pas la généralité en supposant  $Y$  centrée.

Soit  $\Lambda$  la matrice des covariances de  $Y$  ; on suppose  $Y_1, \dots, Y_q$  linéairement indépendantes dans  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$  (cas auquel on se ramène systématiquement par suppression éventuelle de certaines variables qui, étant combinaisons linéaires des autres, n'apportent aucune information supplémentaire pour la segmentation) ; cela implique que  $\Lambda$  est inversible. On munit alors  $\mathbb{R}^q$  de la "métrique de Mahalanobis", de matrice  $\Lambda^{-1}$ , et on sait (cf [1]) que minimiser la distance de  $X'$  à  $F_Y$  équivaut à minimiser sur  $\{D_1, D_2\}$ , partition de  $\Omega$ , l'expression :

$$D^2 = \int_{D_1} \|Y - \bar{Y}_1\|_{\Lambda^{-1}}^2 dP + \int_{D_2} \|Y - \bar{Y}_2\|_{\Lambda^{-1}}^2 dP$$

où  $\bar{Y}_j$  est l'élément de  $\mathbb{R}^q$  :  $\frac{1}{P(D_j)} \int_{D_j} Y dP$  ( $j=1,2$ )

La segmentation approchée conduit à minimiser sur  $\{\Delta_1^n, \Delta_2^n\}$ , partition de  $\Omega_n^\omega$  :

$$D_n^2 = \int_{\Delta_1^n} \|Y^n - \bar{Y}_1^n\|_{\Lambda_n^{-1}}^2 d\mu_n^\omega + \int_{\Delta_2^n} \|Y^n - \bar{Y}_2^n\|_{\Lambda_n^{-1}}^2 d\mu_n^\omega$$

où, pour  $j = 1, 2$  :

$$\bar{Y}_j^n = \frac{1}{\mu_n^\omega(\Delta_j^n)} \int_{\Delta_j^n} Y^n d\mu_n^\omega$$

et où  $\Lambda_n$  est la matrice des covariances de  $Y^n$  (matrice que l'on suppose provisoirement inversible). Si on note  $m_{ij}$  (resp.  $m_{ij}^n$ ) ( $1 \leq i \leq q$ ,  $1 \leq j \leq q$ ) le terme général de  $\Lambda^{-1}$  (resp.  $\Lambda_n^{-1}$ ), on a :

$$\|Y - \bar{Y}_1\|_{\Lambda^{-1}}^2 = \sum_{i,j=1}^q m_{ij} (Y - \bar{Y}_1)_i (Y - \bar{Y}_1)_j$$

d'où :

$$D^2 = \sum_{i,j=1}^q m_{ij} \left[ \int_{D_1} (Y - \bar{Y}_1)_i (Y - \bar{Y}_1)_j dP + \int_{D_2} (Y - \bar{Y}_2)_i (Y - \bar{Y}_2)_j dP \right]$$

et, de la même façon :

$$D_n^2 = \sum_{i,j=1}^q m_{ij}^n \left[ \int_{\Delta_1^n} (Y^n - \bar{Y}_1^n)_i (Y^n - \bar{Y}_1^n)_j d\mu_n^\omega + \int_{\Delta_2^n} (Y^n - \bar{Y}_2^n)_i (Y^n - \bar{Y}_2^n)_j d\mu_n^\omega \right]$$

Or, pour  $k = 1, 2$ , si  $D_k^n = D_k \cap \Omega_n^\omega$  :

$$\begin{aligned} \int_{D_k^n} (Y^n - \bar{Y}_k^n)_i (Y^n - \bar{Y}_k^n)_j d\mu_n^\omega &= \int_{D_k} Y_i Y_j d\nu_n^\omega - (\bar{Y}_k^n)_i \int_{D_k} Y_j d\nu_n^\omega - (\bar{Y}_k^n)_j \int_{D_k} Y_i d\nu_n^\omega + \nu_n^\omega(D_k) (\bar{Y}_k^n)_i (\bar{Y}_k^n)_j \\ &= \int_{D_k} Y_i Y_j d\nu_n^\omega - \nu_n^\omega(D_k) (\bar{Y}_k^n)_i (\bar{Y}_k^n)_j \end{aligned}$$

avec, d'après la loi forte des grands nombres ( $Y_i$  et  $Y_j$  appartiennent à  $L^2$ , donc  $Y_i Y_j$  est intégrable, ainsi que  $Y_i \mathbb{1}_{D_k}$ ,  $Y_j \mathbb{1}_{D_k}$  et  $Y_i Y_j \mathbb{1}_{D_k}$ ) :

$$\forall i, j = 1, \dots, q \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_k} Y_i Y_j d\nu_n^\omega = \int_{D_k} Y_i Y_j dP \quad \text{presque sûrement}$$

$$\forall i = 1, \dots, q \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_k} Y_i d\nu_n^\omega = \int_{D_k} Y_i dP \quad \text{presque sûrement}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n^\omega(D_k) = P(D_k) \quad \text{presque sûrement}$$

$$\forall i = 1, \dots, q \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{Y}_k^n)_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n^\omega(D_k)} \int_{D_k} Y_i \, dv_n^\omega = \frac{1}{P(D_k)} \int_{D_k} Y_i \, dP = (\bar{Y}_k)_i \quad \text{presque sûrement}$$

ce qui entraîne :

$$\forall i, j = 1, \dots, q \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_k^n} (Y_i^n - \bar{Y}_k^n)_i (Y_j^n - \bar{Y}_k^n)_j \, d\mu_n^\omega = \int_{D_k} (Y_i - \bar{Y}_k)_i (Y_j - \bar{Y}_k)_j \, dP \quad \text{presque sûrement.}$$

Par ailleurs, le terme général de  $\Lambda_n$  est :

$$\lambda_{ij}^n = \langle Y_i^n, Y_j^n \rangle_n = \int_{\Omega_n^\omega} Y_i^n Y_j^n \, d\mu_n^\omega = \int_{\Omega} Y_i Y_j \, dv_n^\omega$$

$$\text{d'où :} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{ij}^n = \int_{\Omega} Y_i Y_j \, dP = \lambda_{ij} \quad \text{presque sûrement.}$$

Le déterminant de  $\Lambda^n$  converge donc vers celui de  $\Lambda$ , qui est non nul puisque  $\Lambda$  est inversible. Donc, pour  $n$  suffisamment grand, le déterminant de  $\Lambda^n$  est non nul, et  $\Lambda^n$  est inversible (ce qui justifie l'hypothèse faite plus haut) ; comme on l'obtient par composition d'applications continues à partir des  $\lambda_{ij}^n$ , chaque terme  $m_{ij}^n$  de  $\Lambda_n^{-1}$  converge donc presque sûrement vers le terme correspondant  $m_{ij}$  de  $\Lambda^{-1}$ . On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n^2 = D^2 \quad \text{presque sûrement.}$$

Il y a un nombre fini de partitions  $\{D_1, D_2\}$  de  $\Omega$  qui conduisent, par restriction, à toutes les partitions  $\{D_1^n, D_2^n\}$  de  $\Omega_n^\omega$  ; ceci démontre, comme au § 3., mais ici dans le cas d'un critère  $Y$  multidimensionnel, que, pour presque tout  $\omega$ , il existe encore  $n_1(\omega)$  tel que, pour tout  $n$  supérieur ou égal à  $n_1(\omega)$ , la segmentation sur l'échantillon coïncide avec la segmentation exacte.

## 6 - CONCLUSION

On a établi, dans tous les cas, la convergence par échantillonnage, et donc la stabilité pour un échantillon de taille suffisamment grande, de la méthode de segmentation, à chacune des étapes. Cependant, il demeure qu'une modification minimale à une étape peut avoir des répercussions très importantes sur les étapes suivantes. Il faut noter qu'on obtient ici presque sûrement, à partir d'un certain rang  $n_0$ , non une approximation, mais précisément la restriction à  $\Omega_n^\omega$  de la variable  $X$  et de la dichotomie  $\{D_1, D_2\}$  correspondant à la segmentation exacte : cela parce qu'il y a un nombre fini de v.a. explicatives  $X_i$ , ayant chacune un nombre fini de modalités. Pour un échantillon de taille supérieure à  $n_0$ , le risque de perturbation des étapes suivantes est donc nul, presque sûrement.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BACCINI et A. POUSSE - Segmentation aux moindres carrés : un aspect synthétique -  
Revue de Statistique Appliquée. 1975. Vol. XXIII N°3.
- [2] A. BACCINI - Aspect synthétique de la segmentation et traitement de variables qualitatives  
à modalités ordonnées.  
Thèse de 3ème cycle - Université Paul Sabatier - Toulouse - 1975.
- [3] J. DAUXOIS et A. POUSSE - Les analyses factorielles en Calcul des Probabilités et en  
Statistique : essai d'étude synthétique.  
Thèse - Université Paul Sabatier - Toulouse - 1976.
- [4] H.O. LANCASTER - The Chi-squared Distribution - Wiley Publications in Statistics - 1969.