STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

F. DROESBEKE

Quelques aspects de l'analyse spectrale de processus stochastiques non stationnaires

Statistique et analyse des données, tome 4, nº 2 (1979), p. 31-40
<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1979__4_2_31_0>

Statistique et Analyse des Données
2 - 1979 pp. 31, 40

QUELQUES ASPECTS DE L'ANALYSE SPECTRALE DE PROCESSUS STOCHASTIQUES NON STATIONNAIRES

F. DROESBEKE

Institut de Statistique de l'Université
Libre de Bruxelles

Campus de la Plaine - C.P. 210
Boulevard du Triomphe, B-1050 Bruxelles

RESUME

L'analyse spectrale des séries chronologiques non stationnaires a donné lieu à un certain nombre de développements intéressants. Certains ont retenu notre attention : ceux concernant les processus oscillatoires [11] et les processus purement indéterminables ([3] et [10]). Leur présentation et quelques aspects de leur analyse statistique constituent la matière de cet article (1).

SUMMARY

The spectral analysis of non stationary time series has generated some interesting works. Some of these have been considered by the author; they concern oscillatory processes [11] and purely non determinable processes ([3] and [10]). The presentation and study of statistical analysis of these processes constitute the matter of this paper (1).

---

(1) Ce texte constitue le support de l'exposé oral présenté dans le cadre des journées de l'A.S.U. (Nice, mai 1977).

1 - INTRODUCTION

En parcourant la littérature consacrée à l'analyse des séries chronologiques en tant que réalisation d'un processus stochastique, on constate depuis la dernière décade un souci de s'extraire du cadre restreint considéré jusqu'alors dans lequel le processus générateur était supposé stationnaire (au sens large) (1). Cette hypothèse simplificatrice était justifiée par la volonté de donner un sens aux problèmes d'analyse statistique posés, bien qu'elle soit dans une certaine mesure en contradiction avec la réalité. Dans le but de permettre une meilleure compréhension des paragraphes suivants, nous rappelerons quelques éléments fondamentaux d'analyse spectrale envisagée dans ce cas.

2 - ANALYSE SPECTRALE DE PROCESSUS STATIONNAIRES (AU SENS LARGE)

Soit une série chronologique *univariée* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ considérée comme réalisation d'un processus stochastique $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ ou $\{X_t, t \in Z\}$, selon qu'on envisage un processus générateur continu ou discret. Nous ne prendrons en considération dans la suite que ce dernier cas, celui-ci apparaissant plus adapté à l'étude des phénomènes économiques et sociaux (2). L'hypothèse de *stationnarité au sens large* implique que les moments des premier et second ordres du processus générateur sont invariants par translation dans le temps :

$$E[X_t] = \mu \quad , \quad E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)] = \gamma_k \qquad t,k \in \mathbf{Z}$$

où μ est la *moyenne* et γ_k *l'autocovariance d'ordre k* de $\{X_t\}$. On peut montrer (cf. par exemple [8]) que pour tout processus stationnaire, γ_k admet une *représentation spectrale* de la forme :

$$\gamma_k = \int_{-\Pi}^{\Pi} e^{i\omega k} \, d\,F(\omega) \qquad k \in Z$$

où $F(\omega)$, *la fonction de distribution* spectrale du processus générateur, est réelle, non décroissante et bornée. Si celle-ci est absolument continue et que l'on note $d\,F(\omega) = f(\omega)\,d\omega$, il vient

$$\gamma_k = \int_{-\Pi}^{\Pi} e^{i\omega k} \, f(\omega)\,d\omega \qquad k \in Z$$

où $f(\omega)$ est appelée la *fonction de densité spectrale* du processus générateur. Par transformée de Fourier inverse, on obtient :

---

(1) Nous mettons évidemment à part les travaux fondamentaux de Karhunen [9], Cramer [2], Wold,...

(2) Nous pouvons dès lors représenter le processus générateur par $\{X_t\}$.

$$f(\omega) = \frac{1}{2\,\Pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \, e^{-i\omega k} \qquad\qquad - \Pi \leqslant \omega \leqslant \Pi$$

Par ailleurs, le processus générateur, lui aussi, admet une représentation spectrale de la forme

$$X_t = \int_{-\Pi}^{\Pi} e^{i\omega t} \; d\, Z(\omega) \qquad\qquad t \in Z$$

où $\{Z(\omega)\}$ est un processus complexe à accroissements non corrélés, tel que

$$E\,[d\, Z(\omega_1)\, d\, Z^\star\,(\omega_2)] = \begin{cases} 0 & \omega_1 \neq \omega_2 \\ d\; F(\omega) & \omega_1 = \omega_2 = \omega \end{cases}$$

L'estimation de la fonction de densité spectrale et son analyse statistique sont des problèmes devenus "classiques", sur lesquels nous ne reviendrons pas dans cet article (cf. par exemple [1], [7] et [8]).

L'approche envisagée ci-dessus a été étendue à l'étude de séries chronologiques *bivariées* et *multivariées*. Ainsi dans le cas d'un processus stationnaire bivarié $\{X_t\} = \{(X_{1t}, X_{2t})^\tau\}$, (1) outre la stationnarité de chaque composante, on impose que les *covariances croisées* soient invariantes par translation dans le temps :

$$\mathrm{Cov}\;(X_{1t}, X_{2,t+k}) = \gamma_{12}(k), \quad \mathrm{Cov}\;(X_{2t}, X_{1,t+k}) = \gamma_{21}(k), \; t,k \in Z$$

Sous ces hypothèses de stationnarité, on peut montrer (cf. par exemple [8]) que (2) :

$$\gamma_{12}(k) = \int_{-\Pi}^{\Pi} e^{i\omega k} \; d\; F_{12}(\omega) \qquad\qquad k \in Z$$

où $F_{12}(\omega)$ est une *fonction de distribution spectrale croisée* associée au processus générateur. Si $F_{12}(\omega)$ est absolument continue et est telle que $d\; F_{12}(\omega) = f_{12}(\omega)\; d\omega$, $f_{12}(\omega)$ étant appelée *fonction de densité spectrale croisée,* on peut estimer les parties réelle et imaginaire de cette dernière fonction selon des expressions semblables à celles obtenues dans le cas univarié (cf. par exemple [1], [7] et [8]). D'autre part, en plus des décompositions spectrales de chaque composante de $\{X_t\}$:

---

(1) où $(.)^\tau$ représente le vecteur transposé de (.).

(2) Comme $\gamma_{21}(k) = \gamma_{12}(-k)$, nous avons une représentation analogue pour $\gamma_{21}(k)\,(k \in Z)$.

$$X_{1t} = \int_{-\Pi}^{\Pi} e^{i\omega t} \, d\, Z_1(\omega) \qquad t \in Z$$

$$X_{2t} = \int_{-\Pi}^{\Pi} e^{i\omega t} \, d\, Z_2(\omega) \qquad t \in Z$$

On peut montrer que

$$E\,[d\, Z_1\ (\omega_1)\ \ d\, Z_2^{*}\ (\omega_2)] = \begin{cases} 0 & \omega_1 \neq \omega_2 \\ d\, F_{12}(\omega) & \omega_1 = \omega_2 = \omega \end{cases}$$

L'étude des concepts spectraux croisés permet d'introduire des mesures de dépendance dans le domaine fréquentiel, telle la *cohérence* K_{12} (ω) définie par

$$K_{12}^{2}\ (\omega) = \frac{|f_{12}(\omega)|^{2}}{f_1(\omega)\ f_2(\omega)} \qquad - \Pi \leqslant \omega \leqslant \Pi$$

où $f_1(\omega)$ et $f_2(\omega)$ sont les fonctions de densité spectrale associées à chaque composante de $\{X_t\}$. L'estimation de cette fonction, son analyse statistique et l'étude d'autres concepts spectraux associés (phase, ...) font partie des ouvrages de base de l'analyse des séries chronologiques (cf. par exemple [1] et [8]).

3 - CONCEPTS SPECTRAUX ASSOCIES A DES PROCESSUS NON STATIONNAIRES

L'extension des concepts spectraux présentés ci-dessus s'est opérée dans des voies diverses. Nous retiendrons deux d'entre elles qui nous semblent intéressantes pour divers motifs :

a) PRIESTLEY [11] a introduit en 1965 une classe de processus non stationnaires dénommé *processus oscillatoires*. Leur extension au cas de *processus multivariés* a été considérée par DROESBEKE [5] en 1972 et PRIESTLEY et TONG [12] en 1973.

b) MELARD [10], en 1975, émettant certaines critiques vis-à-vis de l'approche mentionnée ci-dessus, s'est attaché à l'étude de *processus univariés purement indéterminables à paramètre discret*. L'extension de cette étude au cas *multivarié* a été entreprise par DE SCHUTTER-HERTELEER [3] en 1976.

3.1 - Cas univarié

Ces deux extensions conduisent toutes deux à l'étude de processus stochastiques admettant une représentation spectrale du type (cf. par exemple [6]) :

$$X_t = \int_{-\Pi}^{\Pi} A(\omega,t)\, e^{i\omega t}\, d\, Z(\omega) \qquad t \in \mathbb{Z} \qquad (3.1)$$

où $\{Z(\omega)\}$ est un processus à accroissements non corrélés.
La fonction $A(\omega,t)$, caractérisant la non stationnarité du processus générateur, est notamment choisie par PRIESTLEY comme ayant une transformée de Fourier $d\mathcal{A}(\omega,\lambda)$ telle que $|d\mathcal{A}(\omega,\lambda)|$ ait un maximum absolu en $\lambda = 0$. Cette fonction, non univoquement déterminée, permet d'introduire une fonction de densité spectrale $f(\omega,t)$ (cf. par exemple [6] et [11]). Au contraire, la seconde approche permet une décomposition unique. Si $H(\Lambda,\mathcal{F}, P)$ désigne l'espace de Hilbert des variables aléatoires du second ordre à valeurs complexes, définies sur $(\Lambda,\mathcal{F}, P)$, on note :

$$\begin{cases} L^2\,(X_t) & : \text{le sous-espace de } H\,(\Lambda,\mathcal{F}, P) \text{ sous-tendu par } \{X_t\}; \\ L^2\,(X,t) & : \text{le sous-espace de } L^2\,(X_t) \text{ sous-tendu par } \{X_u,\ u \leqslant t\}. \end{cases}$$

Si $\bigcap_t L^2\,(X,t) = 0$, $\{X_t\}$ est purement indéterminable.
Dans ce cas (cf. [10]), on a, en notant (1) $\eta_t = X_t - \hat{X}_{t-1}$, $\hat{X}_{t-1}$ constituant la meilleure prévision linéaire au sens des moindres carrés de X_t en fonction des variables appartenant à $\{X_u,\ u \leqslant t-1\}$:

$$X_t = \sum_{u=-\infty}^{t} g_{tu}\ \eta_u \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Cette décomposition unique est due à CRAMER [2]. Si $\sigma_u^2 = \text{var}\,(\eta_u)$, $u = t, t-1, \ldots$, tout processus purement indéterminable admet une décomposition du type (3.1) unique (cf. par exemple [10]), où

$$A(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \sum_{t=0}^{\infty} \Psi_{tj}\ e^{-i\omega j} \qquad -\Pi \leqslant \omega \leqslant \Pi,\ t \in \mathbb{Z}$$

avec

$$\Psi_{tj} = g_{t,t-j}\ \sigma_{t-j} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dans la première approche, la fonction de densité spectrale (2) est proportionnelle à $|A(\omega,t)|^2$. Dans la seconde, cette fonction vaut $|A(\omega,t)|^2$.

---

(1) η_t est appelée *innovation*.

(2) que nous supposerons exister.

3.2 - Cas bivarié

Si on envisage le cas d'un processus bivarié, l'extension des notions présentées ci-dessous conduit à la définition d'une *matrice de densité spectrale*. Celle-ci repose sur la décomposition du processus $\{X_t\} = \{(X_{1t}, X_{2t})^T\}$:

$$X_t = \int_{-\Pi}^{\Pi} A(\omega,t)\, e^{i\omega t}\, Z(d\omega) \qquad t \in \mathbb{Z}$$

où $\{Z(\omega)\}$ est un processus à accroissements non corrélés bivariés tel que $E\,[Z(\omega)\ Z^*(\omega)]$ est une matrice diagonale. Ainsi, dans le cas d'un processus bivarié purement indéterminable (cf. par exemple [3]), la matrice de densité spectrale est définie par :

$$f(\omega,t) = |A(\omega,t)|^2 . \qquad -\Pi < \omega < \Pi,\ t \in \mathbb{Z}$$

Il est à noter que l'étude de ces processus ne peut s'effectuer valablement que si la matrice de variance-covariance des innovations est supposée de rang maximum égal à 2 (cf. par exemple [4]).

A partir de cette définition, on peut envisager l'introduction de concepts spectraux tels la cohérence, la phase, ... Une extension très intéressante de la cohérence au cas non stationnaire a été introduite par DE SCHUTTER-HERTELEER [3]. Soit $B = [\omega, \omega + d\omega]$.
La contribution, en l'instant t, de B à la jème composante de $X_t (j = 1,2)$ est fournie par :

$$X_{jt}\ (B) = \int_B e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{2} A_{jm}\ (\omega,t)\ d\ Z_m(\omega) \qquad j = 1,2 \quad ; t \in \mathbb{Z}$$

Cette expression est telle que :

$$\mathrm{Cov}\left[X_{js}\ (B),\ X_{kt}\ (B)\right] = \int_B e^{i\omega(s-t)} \sum_{m=1}^{2} A_{jm}(\omega,s)\ A^*_{mk}(\omega,t)\ d\omega \qquad j,k = 1,2\ ;\ s,\ t \in \mathbb{Z}$$

En considérant la matrice

$$f(\omega;\ s,t) = e^{i\omega(s-t)}\ A(\omega,s)\ A^*(\omega,t) \qquad -\Pi \leq \omega \leq \Pi;\ s,\ t \in \mathbb{Z} \qquad (3.2)$$

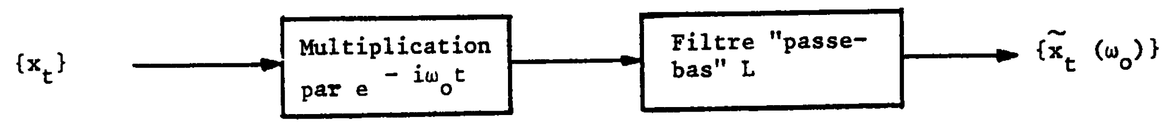
on peut définir une *cohérence bi-instantanée* $K_{jk}(\omega;\ s,t)$ telle que :

$$K^2_{j\,k}\,(\omega;\ s,t) = \frac{|f_{jk}(\omega,\ s,\ t)|^2}{f_{jj}(\omega,s)f_{kk}(\omega,t)} \qquad j,k = 1,2\ ;\ s,\ t \in \mathbb{Z};\ -\Pi < \omega < \Pi\ .$$

Si on pose s = t, cette notion conduit à celle de *cohérence instantanée* considérée dans [5] et [12]. L'extension de ces notions au cas d'un processus multivarié d'ordre $p(p \geqslant 3)$ est envisagée dans [3] et [5].

4 - ESTIMATION DES CONCEPTS SPECTRAUX NON STATIONNAIRES ET PROPRIETES

L'estimation des concepts spectraux considérés selon l'une des deux approches mentionnées ci-dessus peut être développée en recourant à la méthode de démodulation complexe (cf. [4], [6] et [10]), qui peut être schématisée comme suit :



où ω_o est une fréquence choisie a priori. De façon explicite, si $\{x_t\}$ est engendré par un processus p-varié :

$$\tilde{x}_{jt}(\omega_o) = \sum_{u \in U_j} g_{ju}\, x_{j,t-u}\, e^{-i\omega_o(t-u)} \qquad j = 1,2,\ \ldots,\ p \qquad (4.1)$$

où $\{g_{ju},\ u \in U_j\}$ est l'ensemble des coefficients définissant le filtre passe-bas L et $\{0\} \subset U_j \subset T = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Si $f(\omega;s,t)$ est la matrice spectrale introduite en (3.2), l'estimateur de $f_{jk}(\omega,t)$ - $j,k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p$ - basé sur la série des démodulés complexes est fourni par la relation :

$$\hat{f}_{jk}(\omega;s,t) = \sum_{q \in Q} w_q\ \tilde{x}_{j,s+q}(\omega_o)\ \tilde{x}_{k,t+q}(\omega_o) \qquad (4.2)$$

où $\{0\} \subset Q \subset T$ et $\{w_q \in Q\}$ est un ensemble de coefficients de pondération non négatifs dont la somme vaut 1. Notons qu'il est nécessaire de multiplier $\hat{f}_{jk}(\omega,s,t)$ par un coefficient constant de normalisation (cf. [3]).

En remplaçant dans l'expression (4.1) chaque composante du processus générateur par sa représentation spectrale, on constate que

$$E\left[\hat{f}_{jk}(\omega;s,t)\right] = \sum_{q\in Q}\sum_{m=1}^{p}\int_{-\Pi}^{\Pi} G_j(\theta-\omega)\, G_k^{\star}(\theta-\omega)\, A_{jm}(\theta,s+q) A^{\star}_{mk}(\theta,t+q)\, e^{i(\theta-\omega)(s-t)} d\theta + E$$

où $G_j(\theta) = \sum_{u\in U_j} g_{ju}\, e^{-i\theta u}$ $(j = 1,2,\dots,p)$. Si le caractère de non stationnarité n'est pas trop marqué, on peut montrer que E est "négligeable" (cf. [3] et [5]). Dans ce but, on introduit des hypothèses limitant cette non stationnarité (cf. [5]) :

a) <u>Processus oscillatoires</u> : Il existe un nombre ε positif arbitrairement petit tel que

$$\left|\sum_{u\in U_j} g_{ju}\, A_{jk}(\omega, t+u) - A_{jk}(\omega,t)\sum_{u\in U_j} g_{ju}\right| < \varepsilon \qquad j,k = 1, 2, \dots, p$$

b) <u>Processus purement indéterminables</u> :

$$|A_{jk}(\omega,t+u) - A_{jk}(\omega,t)| \leqslant |u|\, B_{jk}(\omega) \qquad j,k = 1, 2, \dots, p$$

où $\{B_{jk}(\omega)\}$ est un ensemble de fonctions bornées sur $(-\Pi, \Pi)$.

Dans ces conditions, $\hat{f}_{jk}(\omega;s,t)$ est un estimateur approximativement non biaisé d'une moyenne dans les domaines fréquentiel et temporel de $f_{jk}(\omega;s,t)$:

$$E\left[\hat{f}_{jk}(\omega;s,t)\right] = \int_{-\Pi}^{\Pi} G_j(\theta-\omega)\, G_k^{\star}(\theta-\omega) \sum_{q\in Q} f_{jk}(\omega;s+q,t+q)\, d\theta$$

On peut mesurer ainsi l'influence des filtres utilisés au cours de la procédure d'estimation sur les propriétés de l'estimateur obtenu.

Il est également possible d'obtenir une valeur approchée de la variance des parties réelle et imaginaire de $\hat{f}_{jk}(\omega,t,s)$ ainsi que les covariances entre ces estimateurs pour des fréquences et des instants distincts (cf. [4], [5] et [6]). L'obtention de ces résultats, qu'il serait trop long de présenter ici, nécessite deux remarques :

a) ils reposent sur des hypothèses complémentaires concernant à nouveau le cas de non stationnarité du processus générateur; c'est ainsi qu'on demandera à la matrice A (ω,t) d'être "peu variable" dans le domaine de lissage considéré;

b) deux estimateurs $\hat{f}_{jk}(\omega,t)$ et $\hat{f}_{jk}(\omega',t')$ (1) sont approximativement non corrélés quand

(1) Nous avons posé ici $s = t$.

$|\omega \pm \omega'|$ et $|t - t'|$ sont relativement grands.

Notons enfin qu'il est possible d'utiliser les estimateurs présentés ci-dessus pour obtenir ceux relatifs à d'autres fonctions spectrales (cohérence, ...) et, d'autre part, de déterminer les distributions échantillonnées de certains de ces estimateurs, en supposant que le processus générateur est gaussien (cf. [6]).

5 - REMARQUES ET CONCLUSIONS

Plusieurs remarques doivent être formulées :

a) le mérite des approches considérées ici est évident : elle permettent de se rendre compte de la façon (parfois délicate) de s'extraire de l'hypothèse de stationnarité et soulignent le type de difficultés rencontrées;

b) la non stationnarité du processus générateur a une influence sur le choix des filtres utilisés dans la procédure d'estimation; en particulier le processus devra être d'autant plus stationnaire que la série observée sera courte;

c) il est à noter que les voies suivies permettent de retrouver les "résultats classiques" si le processus générateur est stationnaire.

De ces quelques remarques découlent l'enthousiasme et la déception : le premier pour avoir "quitté le tyran stationnaire", la seconde pour avoir été tenu de faire le voyage en tirant derrière soi des hypothèses qui modèrent cet enthousiasme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHATFIELD, C. (1975), *The Analysis of Time Series : Theory and Practice*, Chapman and Hall, London.

[2] CRAMER, H. (1961), "On some classes of nonstationary stochastic processes. In : *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 2*, pp. 57-78. Berkeley and Los Angeles, University of California Press.

[3] DE SCHUTTER-HERTELEER, A. (1976), *Analyse spectrale de processus multivariés non stationnaires à paramètre discret*, Thèse de doctorat en Sciences, Université Libre de Bruxelles.

[4] DE SCHUTTER-HERTELEER, A. (1977), "Une généralisation de concepts spectraux non stationnaires", Comptes rendus du Colloque "Séries chronologiques : approches fréquentielle et temporelle", Bruxelles, mai 1977 - publiés par les *Cahiers du C.E.R.O., vol. 19, n° 3-4.*

[5] DROESBEKE, F. (1972), *Processus oscillatoires - Théorèmes de représentation et analyse spectrale*, Thèse de doctorat en Sciences, Université Libre de Bruxelles.

[6] DROESBEKE, F. (1977),"Analyse fréquentielle de processus stochastiques non stationnaires : estimation et propriétés", Comptes rendus du Colloque "Séries chronologiques : approches fréquentielle et temporelle", Bruxelles, mai 1977 - publiés par les *Cahiers du C.E.R.O., vol. 19, n° 3-4.*

[7] HUYBERECHTS, S., "Introduction à l'analyse statistique des séries chronologiques (1ère partie)", *Cahiers du C.E.R.O., vol. 16, n° 2, 1974, pp. 87-105.*

[8] JENKINS, C.M. and WATTS, D.G., *Spectral Analysis and its Applications*, Holden Day, San Francisco, 1969.

[9] KARHUNEN, K. (1947), Uber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung" *Ann. Acad. Scient. Fennicae, Ser. A-I, 37, 7-79.*

[10] MELARD, G (1975), *Processus purement indéterminable à paramètre discret : approches fréquentielle et temporelle*, Thèse de doctorat en Sciences, Université Libre de Bruxelles.

[11] PRIESTLEY, M.B. (1965), "Evolutionary spectra and non-stationary processes", *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 27*, pp. 204-237.

[12] PRIESTLEY, M.B. and TONG, H. (1973), "On the analysis of bivariate non-stationary processes", *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 35*, pp. 153-166.