J. M. MONNEZ

Le processus d'approximation stochastique de Robbins-Monro : résultats théoriques ; estimation séquentielle d'une espérance conditionnelle

Statistique et analyse des données, tome 4, nº 2 (1979), p. 11-29

<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1979__4_2_11_0>

Statistique et Analyse des Données
2 - 1979 pp. 11, 29

LE PROCESSUS D'APPROXIMATION STOCHASTIQUE DE ROBBINS-MONRO : RESULTATS THEORIQUES ; ESTIMATION SEQUENTIELLE D'UNE ESPERANCE CONDITIONNELLE

J.M. MONNEZ
Laboratoire de Statistique - Université de Nancy I
IUT Informatique - Université de Nancy II

Nous donnons dans la première partie de cet article une généralisation d'un théorème de Blum [2] sur la convergence presque sûre du processus de Robbins-Monro dans $\mathbb{R}^k$; le résultat obtenu a pour corollaire le théorème classique de Gladyshev [7] ; il est en fait appliquable à une généralisation du processus de Robbins-Monro [3]. La démonstration repose sur l'utilisation du lemme de Robbins et Siegmund [17], qui fait intervenir la théorie des martingales ; c'est donc une démonstration classique, par rapport aux techniques introduites récemment d'une part par Kushner [11], [12], d'autre part par Ljung [13], [14], pour des processus stochastiques récursifs généraux ; nous indiquons dans la suite la différence entre les hypothèses de ces auteurs et celles faites ici.

Nous donnons également un théorème de rapidité de convergence, qui a pour cas particuliers les résultats énoncés dans [15] pour le processus de Robbins-Monro.

Dans la deuxième partie de l'article, nous faisons une présentation générale de l'estimation séquentielle d'une espérance conditionnelle par utilisation d'un processus d'approximation stochastique faisant intervenir plusieurs observations à chaque étape. Des applications de cette technique ont été étudiées par différents auteurs, qui ne font intervenir, à notre connaissance, qu'une observation à chaque étape du processus. Nous donnons un résultat de convergence presque sûre par application du résultat de la première partie, et un résultat de normalité asymptotique, obtenu à partir d'un théorème établi par Fabian [5] pour un processus général d'approximation stochastique.

PARTIE A : RESULTATS THEORIQUES

A.1. INTRODUCTION

A.1.1. Présentation du processus de Robbins-Monro

Soit $\{Y(x), x \in \mathbb{R}\}$ une famille de variables aléatoires réelles observables pour toute valeur du paramètre réel x ; $Y(x)$ a pour moyenne $M(x)$, inconnue. On cherche à estimer la solution θ, supposée unique, de l'équation $M(x) = 0$.

Pour cela, Robbins et Monro [16] ont construit le processus stochastique (X_n) défini par $X_{n+1} = X_n - a_n Y_n$, où Y_n est pour n fixé une variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité conditionnelle lorsque $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$, est la loi de $Y(x_n)$ (en pratique, la réalisation de Y_n est une observation de $Y(x_n)$), et (a_n) une suite de nombres réels positifs telle que $\sum_1^\infty a_n = \infty$, $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$. Sous certaines hypothèses portant sur la famille $\{Y(x),\ x \in \mathbb{R}\}$, le processus (X_n) converge presque sûrement vers θ.

Le problème a été étendu au cas où $x \in \mathbb{R}^k$, et où $Y(x)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, puis au cas où $x \in H$, espace de Hilbert réel séparable, et où $Y(x)$ est à valeurs dans H.

A.1.2. Théorème de Blum

Dans cet article, $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien usuel dans $\mathbb{R}^k$, et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Nous rappelons le théorème de convergence du processus de Robbins-Monro dans $\mathbb{R}^k$, établi par Blum dans [2].

Théorème 1.- *Soit f une fonction réelle non négative définie dans $\mathbb{R}^k$, continûment différentiable jusqu'à l'ordre 2. Soit D le gradient, A la matrice des dérivées partielles d'ordre 2 de f.*

On a, d'après la formule de Taylor : $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^k,$

$$f(x-a\,Y(x)) = f(x) - a(D(x),Y(x)) + \frac{a^2}{2}\,(Y(x),A(x-\mu a Y(x))Y(x)),$$

avec $0 < \mu < 1$.

Soit $V_a(x) = \frac{1}{2}\,E[(Y(x),A(x-\mu a Y(x))Y(x))]$.

On suppose les fonctions M et V_a mesurables.

On fait les hypothèses :

1.1 $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \inf_{\|x-\theta\|>\varepsilon} |f(x)-f(\theta)| > 0$;

1.2 $\quad \exists V < \infty : \forall a, \forall x,\ V_a(x) \leq V$;

1.2' $\quad \exists \delta > 0;\ \exists V < \infty : \forall a,\ \sup_{\|x-\theta\|<\delta} V_a(x) \leq V$;

1.3 $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \inf_{\|x-\theta\|>\varepsilon} (D(x),M(x)) > 0$;

1.3' $\quad \exists \lambda > 0 : \forall \varepsilon > 0,\ \forall a,\ \inf_{\|x-\theta\|>\varepsilon} ((D(x),M(x)) - \lambda V_a^+(x)) > 0$;

1.4 $\quad a_n > 0$; $\sum_1^\infty a_n = \infty$; $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$;

1.4' $\quad \forall n \geq 1,\ a_n \leq 2\lambda$.

Sous les hypothèses 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, X_1 étant une variable aléatoire telle que $E[f(X_1)] < \infty$, la suite de variables aléatoires (X_n) converge presque sûrement vers θ.

Sous les hypothèses 1.1, 1.2', 1.3', 1.4, 1.4', X_1 étant une variable aléatoire telle que $E[f(X_1)] < \infty$, la suite de variables aléatoires (X_n) converge presque sûrement vers θ.

A.1.3. Théorème de Daubèze

Daubèze a généralisé dans [4] le théorème de Blum sous les hypothèses 1.1, 1.2', 1.3', 1.4, 1.4', en introduisant à la place de la fonction f une suite de fonctions (f_n) ; pour n fixé, la fonction f_n atteint son minimum en un point θ_n, et la suite (θ_n) converge vers θ. Sous certaines hypothèses concernant la suite de fonctions (f_n) et la famille de variables aléatoires $\{Y(x), x \in \mathbb{R}^k\}$, Daubèze démontre la convergence presque sûre du processus de Robbins-Monro vers θ.

A.1.4. Présentation du processus de Burkholder

Soit une famille de variables aléatoires réelles observables $\{Y_n(x), n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}\}$, et $E[Y_n(x)] = M_n(x)$. On suppose maintenant qu'il existe un nombre réel θ tel que :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon), (|x-\theta| > \varepsilon) \Rightarrow ((x-\theta)M_n(x) > 0)$.

Pour estimer θ, Burkholder [3] propose le processus (X_n) défini par $X_{n+1} = X_n - a_n Y_n$, Y_n étant pour n fixé une variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité conditionnelle lorsque $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$, est la loi de $Y_n(x_n)$, et (a_n) une suite de nombres réels positifs. Ce processus a pour cas particuliers celui de Robbins-Monro et le processus d'optimisation stochastique de Kiefer-Wolfowitz [10]. Burkholder énonce le résultat suivant :

Théorème 2.- Soit $V_n(x) = Var[Y_n(x)]$. On suppose les fonctions M_n et V_n mesurables. On fait les hypothèses :

2.1 $\quad \exists V < \infty : \forall n, \forall x, V_n(x) \leq V$;

2.2 $\quad \exists A < \infty : \forall n, \forall x, |M_n(x)| \leq A(1+|x|)$;

2.3 $\quad \forall 0 < \delta_1 < \delta_2 < \infty, \sum_1^\infty a_n \inf_{\delta_1<|x-\theta|<\delta_2} |M_n(x)| = \infty$;

2.4 $\quad a_n > 0 ; \sum_1^\infty a_n^2 < \infty$.

Sous les hypothèses 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, X_1 étant une variable aléatoire réelle, la suite de variables aléatoires réelles (X_n) converge presque sûrement vers θ.

A.1.5. Présentation des résultats démontrés

Nous nous plaçons dans le cas où x appartient à $\mathbb{R}^k$ et où $Y_n(x)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^k$. Dans cette présentation, nous supposons que chaque fonction M_n a un zéro unique θ_n (en fait, nous verrons que l'hypothèse demandée, 3.3.i, est moins forte) et que la suite (θ_n) converge vers un élément θ de $\mathbb{R}^k$.

Nous donnons pour le processus (X_n) une généralisation du théorème de Blum sous les hypothèses 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, en introduisant à la place de la fonction f une suite de fonctions (f_n), comme dans [4].

Nous donnons un corollaire de ce théorème, pour un choix particulier de la suite de fonctions (f_n), puis un deuxième corollaire dans le cas particulier du processus de Robbins-Monro, qui est le théorème établi par Gladyshev [7].

Sous le même type d'hypothèses, nous donnons un théorème de rapidité de convergence, qui a pour cas particuliers les théorèmes de rapidité de convergence du processus de Robbins-Monro énoncés dans [15].

On peut écrire pour le processus étudié ici la relation de récurrence sous la forme $X_{n+1} = X_n - a_n(M_n(X_n)+Z_n)$, avec $Z_n = Y_n - M_n(X_n)$; il entre dans le cadre des processus récursifs généraux (X_n) étudiés par Kushner [11], [12] et Ljung [13], [14], soit $X_{n+1} = X_n - a_n Q_n(X_n,\xi_n)$, où a_n est un nombre positif, $Q_n(X_n,\xi_n)$ une fonction de X_n et de ξ_n, bruit aléatoire pouvant dépendre de X_n (ici, $\xi_n = Z_n$; on a $E[Z_n] = 0$). Cependant, ces auteurs font l'hypothèse que $E[Q_n(x,\xi_n)]$ converge vers $f(x)$, et étudient la convergence en probabilité et presque sûre du processus (X_n) vers l'ensemble des zéros de f, sous certaines hypothèses (en particulier sur f). Dans cet article, si l'on reste dans toute la généralité du problème, on ne suppose pas que $M_n(x)$ converge vers une fonction dont θ serait le zéro ; on fait seulement l'hypothèse que M_n a pour zéro θ_n, et que la suite (θ_n) converge vers θ.

A.2. THEOREMES

A.2.1. <u>Théorème de convergence</u>

<u>*Théorème 3.*</u>*- Soit* (f_n) *une suite de fonctions réelles non-négatives définies dans* $\mathbb{R}^k$, *continûment différentiables jusqu'à l'ordre 2. Soit* A_n *la matrice des dérivées partielles d'ordre 2 de* f_n.

On a, d'après la formule de Taylor, $\forall n$, $\forall x$,

$$f_n(x-a_nY_n(x)) = f_n(x)-a_n(\text{grad } f_n(x),Y_n(x))+\frac{a_n^2}{2}\Big(Y_n(x),A_n(x-\mu_na_nY_n(x))Y_n(x)\Big), \text{ avec } 0<\mu_n<1.$$

Soit $D_n(x) = \text{grad } f_n(x)$, $V_n(x) = \frac{1}{2}E[(Y_n(x),A_n(x-\mu_na_nY_n(x))Y_n(x))]$.

On suppose les fonctions M_n *et* V_n *mesurables.*

Soit (θ_n) *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}^k$ *qui converge vers* θ.

On fait les hypothèses :

3.1 *i* $\quad \forall\varepsilon > 0,\ \forall x,\ \exists\eta(\varepsilon,x) > 0 : (\|x-y\| < \eta(\varepsilon,x)) \Rightarrow (\forall n \geq 1, |f_n(x)-f_n(y)| \leq \varepsilon)$;

3.1 *ii* $\quad \forall n \geq 1, |f_{n+1}(x)-f_n(x)| \leq \delta_nf_n(x)+\gamma_n$, avec $\delta_n \geq 0, \gamma_n \geq 0, \Sigma\delta_n < \infty, \Sigma\gamma_n < \infty$;

3.1 *iii* $\quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists\nu(\varepsilon) > 0 : \forall n \geq 1,\ \inf_{\|x-\theta_n\|>\varepsilon}|f_n(x)-f_n(\theta_n)| \geq \nu(\varepsilon)$;

3.2 $\quad \exists d > 0 : \forall n \geq 1,\ \forall x,\ V_n(x) \leq d(1+f_n(x))$;

3.3 *i* $\quad \forall n \geq 1,\ (D_n(x),M_n(x)) \geq 0$;

3.3 *ii* $\quad \forall 0 < \varepsilon < 1,\ \sum_1^\infty a_n \inf_{\{x:\varepsilon<|f_n(x)-f_n(\theta_n)|<\frac{1}{\varepsilon}\}} (D_n(x),M_n(x)) = \infty$;

3.4 $\quad a_n > 0$; $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$.

Sous les hypothèses 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, X_1 *étant une variable aléatoire telle que* $E[f_1(X_1)] < \infty$, *la suite de variables aléatoires* (X_n) *converge presque sûrement vers* θ.

La suite de fonctions (f_n), telle que $f_n(x) = \|x-\theta_n\|^2$, satisfait à l'hypothèse 3.1, à condition que $\sum_{n=1}^\infty \|\theta_n-\theta_{n+1}\| < \infty$ (voir [4]).

<u>Remarque</u> : Les hypothèses 3.2 et $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$ ne sont pas strictement nécessaires. Il suffit que, pour tout n, $V_n(X_n)$ soit intégrable et que $\sum_1^\infty a_n^2(1+\delta_n)V_n(X_n) < \infty$ p.s.

A.2.2. Corollaires

En faisant $Y_n(x) = Y(x)$, $f_n = f$, pour tout n, on se trouve dans les conditions du théorème de Blum, dont les hypothèses 1.2 et 1.3 sont alors affaiblies.

En prenant $f_n(x) = \|x-\theta_n\|^2$, à condition que $\sum_{n=1}^{\infty} \|\theta_n-\theta_{n+1}\| < \infty$, on a le théorème suivant de convergence presque sûre du processus de Burkholder :

Corollaire 1.- On suppose les fonctions $M_n(x)$ et $E[\|Y_n(x)\|^2]$ mesurables.

Soit (θ_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^k$ qui converge vers θ.

On fait les hypothèses :

C1.1 $\exists d > 0 : \forall n, \forall x, E[\|Y_n(x)\|^2] \leq d(1+\|x-\theta_n\|^2)$;

C1.2 *i* $\forall n \geq 1, (x-\theta_n, M_n(x)) \geq 0$;

C1.2 *ii* $\forall 0 < \varepsilon < 1, \sum_1^{\infty} a_n \inf_{\varepsilon<\|x-\theta_n\|<\frac{1}{\varepsilon}} (x-\theta_n, M_n(x)) = \infty$;

C1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \|\theta_n-\theta_{n+1}\| < \infty$;

C1.4 $a_n > 0$; $\sum_1^{\infty} a_n^2 < \infty$.

Sous les hypothèses C1.1, C1.2, C1.3, C1.4, X_1 étant une variable aléatoire telle que $E[\|X_1\|^2] < \infty$, la suite de variables aléatoires (X_n) converge presque sûrement vers θ.

En faisant $Y_n(x) = Y(x)$, $f_n(x) = f(x) = \|x-\theta\|^2$ pour tout n, on obtient le théorème classique de convergence presque sûre du processus de Robbins-Monro, établi par Gladyshev [7] :

Corollaire 2.- On suppose les fonctions $M(x)$ et $E[\|Y(x)\|^2]$ mesurables.

On fait les hypothèses :

C2.1 $\exists d > 0 : \forall x, E[\|Y(x)\|^2] \leq d(1+\|x-\theta\|^2)$;

C2.2 $\forall 0 < \varepsilon < 1, \inf_{\varepsilon<\|x-\theta\|<\frac{1}{\varepsilon}} (x-\theta, M(x)) > 0$;

C2.3 $a_n > 0$; $\sum_1^{\infty} a_n = \infty$; $\sum_1^{\infty} a_n^2 < \infty$.

Sous les hypothèses C2.1, C2.2, C2.3, X_1 étant une variable aléatoire telle que $E[\|X_1\|^2] < \infty$, la suite de variables aléatoires (X_n) converge presque sûrement vers θ.

A.2.3. Théorème de rapidité de convergence

Théorème 4.- On reprend l'introduction et les notations du théorème 3. On fait l'hypothèse 3.1ii ; ceci entraîne l'existence d'une fonction f telle que, $\forall x$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Soit $1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \nu_n$,

$\delta_n+\gamma_n+a_n^2(1+\delta_n)+a_n(1+\delta_n)\,|f(\theta)-f_n(\theta_n)| = c_n$, $\dfrac{c_n}{c_{n+1}} - 1 = \varepsilon_n$.

On fait les hypothèses :

4.1 $\forall n, \forall x, f_n(x) \geq f(\theta)$;

4.2 $\exists K > 0 : \forall n, \forall x, \ (D_n(x), M_n(x)) \geqslant 2K|f_n(x) - f_n(\theta_n)|$;

4.3 $E[f_1(X_1)] < \infty$;

4.4 $a_n > 0$; $\sum_1^\infty a_n = \infty$; $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$;

4.5 *soit* $2Kn\, a_n = u_n$;

4.5 *i* $\varepsilon_n - \nu_n = \gamma a_n + o(a_n)$, *avec* $2K - \gamma > 0$; $\varepsilon_n \nu_n = o(a_n)$;

4.5 *ii* $u_n \to u > 0$; $\exists 0 < p \leqslant 1$, $\exists a > 0 : \forall n, \ c_n < \frac{a}{n^{1+p}}$;

4.5 *iii* $u_n \to u^+$ *ou* $\sum_1^\infty \frac{|u_j - u|}{j} < \infty$.

Sous les hypothèses 3.1ii, 3.2, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5i, on a

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} \ E[f_n(X_n) - f(\theta)] < \infty.$$

Sous les hypothèses 3.1ii, 3.2, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5ii, pour $u > p$, *on a*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} n^p E[f_n(X_n) - f(\theta)] < \infty .$$

Sous les hypothèses 3.1ii, 3.2, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5ii, 4.5iii, pour $u = p$, *on a*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n^p}{\mathrm{Log}\ n} \ E[f_n(X_n) - f(\theta)] < \infty, \text{ et pour } u < p$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} n^u \ E[f_n(X_n) - f(\theta)] < \infty.$$

En faisant $Y_n(x) = Y(x)$, $f_n(x) = f(x) = \|x-\theta\|^2$, pour tout n, ce théorème a pour cas particuliers les théorèmes de rapidité de convergence du processus de Robbins-Monro énoncés dans [15] : on obtient alors le comportement asymptotique de $E[\|X_n - \theta\|^2]$.

A.3. DEMONSTRATIONS

A.3.1. Lemmes

Lemme 1.- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* (F_n) *une suite croissante de sous-tribus de* $\mathcal{A}$. *Soit pour tout* n, z_n, β_n, ξ_n *et* ζ_n *des variables aléatoires réelles* F_n *- mesurables, intégrables, non-négatives, telles que* $E[z_{n+1}|F_n] \leqslant z_n(1+\beta_n) + \xi_n - \zeta_n$ *(nous appellerons le processus* (z_n) *une pseudo-sur-martingale) ; on suppose que* $\sum_1^\infty \beta_n < \infty$, $\sum_1^\infty \xi_n < \infty$, *p.s.. Alors, la suite de variables aléatoires* (z_n) *converge presque sûrement vers une variable aléatoire* z *presque sûrement finie, et l'on a* $\sum_1^\infty \zeta_n < \infty$ *p.s.* .

Ce résultat a été établi par Robbins et Siegmund dans [17].

Lemme 2.- Sous l'hypothèse 3.1ii, $\exists f : \forall x, \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. *Si l'on fait en outre l'hypothèse 3.1i, alors,* $(\theta_n \to \theta) \Rightarrow (f_n(\theta_n) \to f(\theta))$.

Ce lemme est démontré dans [4].

A.3.2. Démonstration du théorème 3 de convergence

1) Soit $T_n = f_n(X_n)$. Nous allons appliquer le lemme 1 à la suite (T_n).

D'après 3.1ii, $T_{n+1} = f_{n+1}(X_{n+1}) \leq (1+\delta_n)f_n(X_{n+1})+\gamma_n =$

$$= (1+\delta_n)f_n(X_n-a_nY_n)+\gamma_n = (1+\delta_n)\Big(f_n(X_n)-a_n\Big(D_n(X_n),Y_n\Big)+\frac{a_n^2}{2}\Big(Y_n,A_n(X_n-\mu_na_nY_n)Y_n\Big)\Big)+\gamma_n.$$

Donc,
$$E\Big[T_{n+1}|X_1,X_2,\ldots,X_n\Big] \leq (1+\delta_n)\Big(T_n-a_n\Big(D_n(X_n),M_n(X_n)\Big)+$$

$$+ a_n^2V_n(X_n)\Big)+\gamma_n \leq (1+\delta_n)\Big(T_n-a_n\Big(D_n(X_n),M_n(X_n)\Big)+$$

$$+ da_n^2(1+T_n)\Big)+\gamma_n \text{ (d'après 3.2) } = T_n(1+\delta_n+da_n^2+d\delta_na_n^2)-$$

$$- a_n(1+\delta_n)\Big(D_n(X_n),M_n(X_n)\Big)+\gamma_n+da_n^2+da_n^2\delta_n \text{ p.s. .}$$

D'après 3.1ii, 3.3i, 3.4, les hypothèses du lemme 1 sont vérifiées. Donc, $\exists T < \infty$ p.s. : $T_n \xrightarrow{p.s.} T$, et

$$\sum_1^\infty a_n(1+\delta_n)\Big(D_n(X_n),M_n(X_n)\Big) < \infty \text{ p.s. .}$$

Remarque : On a $E[T_{n+1}|X_1,X_2,\ldots,X_n] \leq (1+\delta_n)T_n+a_n^2(1+\delta_n)V_n(X_n)+\gamma_n-a_n(1+\delta_n)\Big(D_n(X_n),M_n(X_n)\Big)$. On constate que, pour obtenir la conclusion $T_n \xrightarrow{p.s.} T$, il suffit que pour tout n, $V_n(X_n)$ soit intégrable et que $\sum_1^\infty a_n^2(1+\delta_n)V_n(X_n) < \infty$ p.s. ; les hypothèses 3.2 et $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$ ne sont pas strictement nécessaires ; ceci rejoint une préoccupation de L.Ljung [13], [14], qui affaiblit l'hypothèse $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$.

2) Nous allons montrer que $T = f(\theta)$ p.s. .

Soit $C = \{\omega : T_n(\omega) \to T(\omega)\}$; soit

$$C_1 = \{\omega : \sum_1^\infty a_n(1+\delta_n)\Big(D_n(X_n(\omega)),M_n(X_n(\omega))\Big) < \infty\} \text{ ; } P(C \cap C_1) = 1.$$

Soit $\omega \in C \cap C_1$; supposons $T(\omega) \neq f(\theta)$.

$$T_n(\omega) \to T(\omega) \text{ ; d'après le lemme 2, } f_n(\theta_n) \to f(\theta).$$

Donc,
$$|T_n(\omega)-f_n(\theta_n)| \to |T(\omega)-f(\theta)| > 0 \text{ ; } \exists\varepsilon_1 > 0,$$

$$\exists N(\omega,\varepsilon_1) : \forall n > N(\omega,\varepsilon_1), \varepsilon_1 < |T_n(\omega)-f_n(\theta_n)| < \frac{1}{\varepsilon_1} \text{ .}$$

On a, avec $N = N(\omega,\varepsilon_1)$,

$$\sum_{N+1}^{\infty} a_n(1+\delta_n)\Big(D_n(X_n(\omega)),M_n(X_n(\omega))\Big) \geqslant \sum_{N+1}^{\infty} a_n\Big(D_n(X_n(\omega)),M_n(X_n(\omega))\Big) = \infty, \text{ d'après 3.3.}$$

Or, $\omega \in C_1$; il y a donc contradiction ; $\forall\omega \in C \cap C_1$, $T(\omega) = f(\theta)$.

3) Nous allons montrer que $X_n-\theta_n \xrightarrow{p.s.} 0$.

Soit $\omega \in C \cap C_1$; supposons que $X_n(\omega)-\theta_n \not\longrightarrow 0$.

Alors, $\exists\varepsilon_2 > 0$, $\exists(n_\ell)$: $\forall\ell$, $\|X_{n_\ell}(\omega)-\theta_{n_\ell}\| > \varepsilon_2$.

D'après 3.1iii, $\forall\ell$, $|T_{n_\ell}(\omega)-f_{n_\ell}(\theta_{n_\ell})| \geqslant \nu(\varepsilon_2) > 0$.

Comme $f_{n_\ell}(\theta_{n_\ell}) \to f(\theta)$, $\exists\delta > 0$, $\exists L$: $\forall\ell > L$, $|T_{n_\ell}(\omega)-f(\theta)| > \delta$.

Or, $T_{n_\ell}(\omega) \to f(\theta)$; il y a contradiction.

Donc, $\forall\omega \in C \cap C_1$, $X_n(\omega)-\theta_n \to 0$; comme $\theta_n \to \theta$, on en déduit que $X_n-\theta \xrightarrow{p.s.} 0$.

A.3.3. Démonstration du théorème 4 de rapidité de convergence

Nous citons simplement ici les étapes de la démonstration, qui est parallèle à celles données dans [15].

Soit $T_n = f_n(X_n)$. En utilisant 3.1ii, 3.2, 4.2, on montre que

$$E[T_{n+1}-f(\theta)] \leqslant E[T_n-f(\theta)](1-2K\ a_n-2K\ a_n\delta_n+da_n^2(1+\delta_n))+$$

$$+\delta_n E[T_n]+ 2K\ a_n(1+\delta_n)|f_n(\theta_n)-f(\theta)|+d(1+f(\theta))(1+\delta_n)a_n^2+\gamma_n.$$

En utilisant 3.1ii, 3.2, 4.3, 4.4, on montre que :

$\exists A$: $\forall n, E[T_n] < A$. On en déduit que : $\exists F > 0$:

$$E[T_{n+1}-f(\theta)] \leqslant E[T_n-f(\theta)](1-2K\ a_n)+F(\delta_n+\gamma_n+a_n^2(1+\delta_n)+a_n(1+\delta_n)|f_n(\theta_n)-f(\theta)|).$$

Pour obtenir les conclusions du théorème, on utilise les lemmes III-2 et III-3 de [15], dus respectivement à Schmetterer [18] et Venter [19].

PARTIE B : ESTIMATION SEQUENTIELLE D'UNE ESPERANCE CONDITIONNELLE

B.1. INTRODUCTION

B.1.1. Présentation de la méthode

Soit une variable aléatoire réelle observable Y. Soit une variable aléatoire observable X, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Soit $\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^p$ p fonctions réelles de m variables réelles, mesurables, connues.

On pose le problème suivant : trouver une combinaison linéaire des variables aléatoires réelles $\varphi^1(X),\varphi^2(X),\ldots,\varphi^p(X)$, $\theta^1\varphi^1(X)+\theta^2\varphi^2(X)+\ldots+\theta^p\varphi^p(X)$, qui approche $E[Y/X]$ au sens des moindres carrés.

Soit θ et φ deux matrices-colonnes, avec $\theta' = (\theta^1,\theta^2,\ldots,\theta^p)$, $\varphi' = (\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^p)$. On cherche θ qui rende minimal $E[(E[Y/X]-\theta'\varphi(X))^2]$, ou de façon équivalente $E[(Y-\theta'\varphi(X))^2]$. Comme $\mathrm{grad}_\theta\, E[(Y-\theta'\varphi(X))^2] = -2E[(Y-\theta'\varphi(X))\varphi(X)]$, on est conduit à introduire la famille de variables aléatoires $Z(\theta) = (Y-\theta'\varphi(X))\varphi(X)$. Le problème posé revient à résoudre l'équation $E[Z(\theta)] = 0$, dont on suppose la solution θ_o unique.

Pour estimer θ_o, on construit le processus de Burkholder (Θ_n),

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n - a_n \frac{1}{m_n} \sum_{j=1}^{m_n} \varphi(X_{nj})(\varphi'(X_{nj})\Theta_n - Y_{nj}),$$

où les (X_{nj},Y_{nj}), $n = 1,2,\ldots,j = 1,2,\ldots,m_n$, constituent un échantillon de (X,Y) obtenu à l'aide d'expériences indépendantes ; à l'étape n, on fait donc m_n observations indépendantes de la variable aléatoire (X,Y).

B.1.2. Présentation des résultats démontrés

Nous donnons un théorème de convergence presque sûre de ce processus, et un théorème de normalité asymptotique ; dans ce dernier résultat, si l'on prend a_n du type $\frac{c}{n}$, il apparaît que la matrice de covariances asymptotique est en $\frac{1}{nm_n}$; dans le cas où m_n ne dépend pas de n, elle dépend donc du nombre total d'individus observés au cours des n étapes, et non pas du nombre n d'étapes ; ceci justifie que l'on fasse plusieurs observations de la variable (X,Y) à chaque étape.

B.1.3. Quelques applications

1) Régression linéaire

Y est la variable expliquée ; les m variables aléatoires réelles explicatives $X^1,X^2,\ldots,X^m$ constituent la variable X. On peut approcher l'espérance conditionnelle $E[Y/X^1,X^2,\ldots,X^m]$ par une combinaison linéaire des p variables $\varphi^i(X^1,X^2,\ldots,X^m)$, $i = 1,2,\ldots,p$, en utilisant cette méthode séquentielle.

2) Détermination d'une fonction discriminante bayesienne

On dispose de r classes d'individus $C_1,C_2,\ldots,C_r$; pour classer un nouvel individu, on mesure m variables $X^1,X^2,\ldots,X^m$.

Soit, pour $i = 1,2,\ldots,r$, Z_i la variable indicatrice de la classe C_i. Soit $P(C_i/X)$ la probabilité a posteriori de la classe C_i lorsque l'on observe $X = (X^1,X^2,\ldots,X^m)$; on a $P(C_i/X) = E[Z_i/X]$. Pour approcher $P(C_i/X)$, pour $i = 1,2,\ldots,r$, et obtenir ainsi des estimations des fonctions discriminantes bayesiennes, on peut utiliser cette méthode séquentielle, avec $Y = Z_i$ et $X = (X^1,X^2,\ldots,X^m)$.

3) Estimation d'une fonction

Soit h une fonction réelle de m variables réelles. Soit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^m$; on suppose que l'on peut observer la variable aléatoire h(X).

On peut approcher h(X) par une combinaison linéaire des $\varphi^i(X)$, $i = 1,2,\ldots,p$, et estimer ainsi la fonction h, en utilisant cette méthode séquentielle avec $Y = h(X)$.

4) Estimation d'une fonction $h(x) = E[Z(x)]$

Soit une famille de variables aléatoires réelles $\{Z(x), x \in \mathbb{R}^m\}$; soit $E[Z(x)] = h(x)$. Soit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^m$; on suppose que l'on peut observer la variable aléatoire Z(X). Pour estimer la fonction h, on procède comme en 3, en prenant $Y = Z(X)$.

Ceci peut s'appliquer en particulier à l'estimation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, en prenant pour Z(x) la fonction de répartition empirique.

Le problème 1, dans le cas d'une variable explicative, est étudié dans [7] ; le problème 2, dans le cas de deux classes, les problèmes 3 et 4, ainsi que d'autres applications, sont étudiés dans [9] et [1] ; les auteurs y ont utilisé un processus de Robbins-Monro avec une observation à chaque étape. Nous faisons ici une présentation de ces applications dans le cadre général de l'estimation d'une espérance conditionnelle, en utilisant un processus faisant intervenir plusieurs observations à chaque étape.

B.2. THEOREMES

B.2.1. Théorème de convergence

Théorème 5.- On fait les hypothèses :

5.1 *il n'existe pas de relation linéaire entre* $\varphi^1(X), \varphi^2(X), \ldots, \varphi^p(X)$;

5.2 *les moments d'ordre 4 de la variable aléatoire* $(\varphi^1(X), \varphi^2(X), \ldots, \varphi^p(X), Y)$ *existent ;*

5.3. $a_n > 0$; $\sum_1^\infty a_n = \infty$; $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$.

Sous les hypothèses 5.1, 5.2, 5.3, Θ_1 *étant une variable aléatoire telle que* $E[\|\Theta_1\|^2] < \infty$, *la suite de variables aléatoires* (Θ_n) *converge presque sûrement vers* θ_0.

B.2.2. Théorème de normalité asymptotique

On considère dans ce théorème des suites (a_n) particulières, qui vérifient l'hypothèse 5.3.

Théorème 6.- Soit $Z(\theta) = \varphi(X)(\varphi'(X)\theta - Y), M(\theta) = E[Z(\theta)]$.

Soit $E[\varphi(X)\varphi'(X)] = B$; *soit* Λ *la réduite diagonale de* B, P *la matrice orthogonale de passage :* $\Lambda = P'BP$; *soit* λ *la plus petite valeur propre de* B.

On fait les hypothèses :

6.1 *il existe* $r > 0$ *tel que la variable aléatoire* $(\varphi^1(X), \varphi^2(X), \ldots, \varphi^p(X), Y)$ *admette des moments d'ordre* $4+r$;

6.2 $\exists \pi : \lim_{\theta \to \theta_0} E[(Z(\theta)-M(\theta))(Z(\theta)-M(\theta))'] = \pi$;

6.3 $\exists m : \lim_{n\to\infty} m_n = m$;

6.4 $\exists \frac{1}{2} < \beta \leqslant 1,\ \exists c > 0 : n^\beta a_n \to c$;
pour $\beta = 1,\ c > \frac{1}{2\lambda}$.

On définit la matrice $M = c^2 \left(\dfrac{(P'\pi P)_{ij}}{c\Lambda_{ii}+c\Lambda_{jj}-\gamma^+} \right)$,

avec $\gamma^+ = \begin{cases} 1 & \text{pour } \beta = 1 \\ 0 & \text{pour } \beta \neq 1. \end{cases}$

Sous les hypothèses 5.1, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, on a :

$$\sqrt{m_n}\, n^{\frac{\beta}{2}} (\theta_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0, PMP').$$

B.3. DEMONSTRATIONS

B.3.1. Lemmes

Lemme 3.- *Soit* $\alpha \geqslant 1$. *Soit* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n *variables aléatoires dans* $\mathbb{R}^p$, *définies sur un même espace probabilisé, telles que* $E[\|X_i\|^\alpha]$ *existe, pour* $i = 1,2,\ldots,n$. *Alors,*

$$E\left[\left\| \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \right\|^\alpha \right] \leqslant \frac{1}{n} \left(E[\|X_1\|^\alpha] + \ldots + E[\|X_n\|^\alpha] \right).$$

Lemme 4.- *On considère le processus de Burkholder dans* $\mathbb{R}^p$. *On reprend les notations définies en A.1.4. et A.1.5.. Soit* $Y_n(x) - M_n(x) = Z_n(x)$, $Y_n - M_n(X_n) = Z_n$. *On suppose les fonctions* $M_n(x)$ *et* $E[\|Y_n(x)\|^2]$ *mesurables. Soit* (θ_n) *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}^p$ *qui converge vers* θ.

On fait les hypothèses :

L4.1 $\lim_{R\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_n \sup_{\|x-\theta\|<\varepsilon} \displaystyle\int_{\{\|Z_n(x)\| \geqslant R\}} \|Z_n(x)\|^2 dP = 0$;

L4.2 $\sup_n \sup_x E[\|Z_n(x)\|^2] < \infty$.

Sous les hypothèses L4.1, L4.2, C1.1, C1.2, C1.3, C1.4, on a :

$$\lim_{R\to\infty} \sup_n \int_{\{\|Z_n\| \geqslant R\}} \|Z_n\|^2 dP = 0.$$

Ce lemme est une extension au cas du processus de Burkholder du lemme II.2 de [15] pour le processus de Robbins-Monro ; nous n'en reprendrons pas la démonstration.

Lemme 5.- Soit une famille de variables aléatoires dans $\mathbb{R}^p$, $\{Z_n(x),\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^p\}$. *On fait l'hypothèse :*

L5.1 $\exists\theta,\ \exists\varepsilon_0 > 0,\ \exists\nu > 0 : \sup_n \sup_{\|x-\theta\|<\varepsilon_0} E[\|Z_n(x)\|^{2+\nu}] < \infty.$

Sous l'hypothèse L5.1, on a :

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_n \sup_{\|x-\theta\|<\varepsilon} \int_{\{\|Z_n(x)\| \geq R\}} \|Z_n(x)\|^2 dP = 0.$$

La démonstration de ce lemme ne présente pas de difficulté.

B.3.2. Théorème de Fabian

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé ; toutes les variables aléatoires intervenant dans la suite sont définies sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Soit (V_n) et (T_n) deux suites de variables aléatoires dans $\mathbb{R}^p$, (Γ_n) et (Φ_n) deux suites de variables aléatoires dans $\mathbb{R}^{p\times p}$. Soit β et γ deux nombres réels. Fabian définit dans [5] le processus (U_n) dans $\mathbb{R}^p$ par :

$$U_{n+1} = \left(I - \frac{\Gamma_n}{n^\beta}\right)U_n + \frac{1}{n^{(\beta+\gamma)/2}}\ \Phi_n V_n + \frac{1}{n^{\beta+\gamma/2}}\ T_n.$$

Théorème 7.- Soit $(\mathcal{F}_n)$ *une suite non-décroissante de sous-tribus de* $\mathcal{A}$. *On fait les hypothèses :*

7.1 $\forall n \geq 2$, Γ_n, Φ_{n-1}, V_{n-1} *sont* $\mathcal{F}_n$*-mesurables ;*

7.2 $\exists\Gamma$ *définie positive* $\in \mathbb{R}^{p\times p}$: $\Gamma_n \xrightarrow{p.s.} \Gamma$; *soit* Λ *la réduite diagonale de* Γ, P *la matrice orthogonale de passage :* $\Lambda = P'\Gamma P$; *soit* λ *la plus petite des valeurs propres de* Γ ;

7.3 $\exists\Phi \in \mathbb{R}^{p\times p} : \Phi_n \xrightarrow{p.s.} \Phi$;

7.4 $\exists T \in \mathbb{R}^p : T_n \xrightarrow{p.s.} T$ *ou* $E[\|T_n - T\|] \to 0$;

7.5 $\forall n,\ E[V_n \mid \mathcal{F}_n] = 0$;

7.6 $\exists\Sigma \in \mathbb{R}^{p\times p} : \|E[V_n V_n' \mid \mathcal{F}_n] - \Sigma\| \xrightarrow{p.s.} 0$;

7.7 $\exists C > 0 : \forall n,\ \|E[V_n V_n' \mid \mathcal{F}_n] - \Sigma\| < C$ *p.s.* ;

7.8 $\forall r > 0,\ \lim_{j\to\infty} \int_{\{\|V_j\|^2 \geq r j^\beta\}} \|V_j\|^2 dP = 0$

ou $\beta = 1,\ \forall r > 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{\{\|V_j\|^2 \geq r j\}} \|V_j\|^2 dP = 0$;

7.9 $0 < \beta \leq 1$;

7.10 $\gamma \geq 0$;
soit $\gamma^+ = \gamma$ *pour* $\beta = 1$, $\gamma^+ = 0$ *pour* $\beta \neq 1$; $\gamma^+ < 2\lambda$;

Sous les hypothèses 7.1 à 7.10, on a :

$$n^{\gamma/2}U_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left((\Gamma-\frac{\gamma^+}{2}I)^{-1}T,\ PMP'\right),\ \text{avec}\ M=\left(\frac{(P'\Phi\Sigma\Phi'P)_{ij}}{\Lambda_{ii}+\Lambda_{jj}-\gamma^+}\right).$$

B.3.3. <u>Démonstration du théorème de convergence</u>

1) Soit, pour tout n, $\left((X_{nj},Y_{nj}),\ j=1,2,\dots,m_n\right)$ un échantillon formé de variables indépendantes de la variable aléatoire (X,Y). On définit la famille de variables aléatoires

$$\{\bar{Z}_n(\theta),\ n\in\mathbb{N},\ \theta\in\mathbb{R}^p\},\ \text{telle que}\ \bar{Z}_n(\theta)=\frac{1}{m_n}\sum_{j=1}^{m_n}\varphi(X_{nj})\left(\varphi'(X_{nj})\theta-Y_{nj}\right).$$

On a $E[\bar{Z}_n(\theta)]=M(\theta)=E[\varphi(X)\varphi'(X)]\theta-E[\varphi(X)Y]$. D'après 5.1, la matrice $E[\varphi(X)\varphi'(X)]$ est définie positive ; l'équation $M(\theta)=0$ admet pour solution unique $\theta_o=\left(E[\varphi(X)\varphi'(X)]\right)^{-1}E[\varphi(X)Y]$, et on a $M(\theta)=E[\varphi(X)\varphi'(X)](\theta-\theta_o)$.

Pour montrer la convergence presque sûre du processus (Θ_n) vers θ_o, nous allons vérifier les hypothèses du corollaire 1. On a ici : $\forall n, \theta_n=\theta_o$; l'hypothèse C1.3 est vérifiée ; d'après 5.3, l'hypothèse C1.4 est vérifiée.

2) Montrons que : $\exists d>0 : \forall n,\ \forall\theta,\ E[\|\bar{Z}_n(\theta)\|^2]\leq d(1+\|\theta-\theta_o\|^2)$.

D'après le lemme 3, on a

$$E[\|\bar{Z}_n(\theta)\|^2]\leq E[\|\varphi(X)(\varphi'(X)\theta-Y)\|^2]=\theta'E[(\varphi(X)\varphi'(X))^2]\theta-$$

$$-2E[Y\varphi'(X)\varphi(X)\varphi'(X)]\theta+E[\varphi'(X)\varphi(X)Y^2]\ ;$$

d'après 5.2, les matrices introduites existent. Donc,

$$E[\|\bar{Z}_n(\theta)\|^2]\leq\|E[(\varphi(X)\varphi'(X))^2]\|\ \|\theta\|^2+$$

$$+2\|E[Y\varphi'(X)\varphi(X)\varphi'(X)]\|\ \|\theta\|+\|E[\varphi'(X)\varphi(X)Y^2]\|\ ;$$

on en déduit la proposition. L'hypothèse C1.1 est vérifiée.

3) Montrons que : $\forall\varepsilon>0,\ \inf_{\varepsilon<\|\theta-\theta_o\|<\frac{1}{\varepsilon}}(\theta-\theta_o,M(\theta))>0$.

Soit λ la plus petite valeur propre de la matrice définie positive $E[\varphi(X)\varphi'(X)]$.

On a $(\theta-\theta_o,M(\theta))=(\theta-\theta_o,E[\varphi(X)\varphi'(X)](\theta-\theta_o))\geq\lambda\|\theta-\theta_o\|^2$.

On en déduit la proposition.

L'hypothèse C1.2i est vérifiée ; comme $\sum_1^{\infty}a_n=\infty$, l'hypothèse C1.2ii est également vérifiée.

B.3.4. Démonstration du théorème de normalité asymptotique

1) Le processus s'écrit : $\Theta_{n+1} = \Theta_n - a_n\bar{Z}_n$, avec

$$\bar{Z}_n = \frac{1}{m_n}\sum_{j=1}^{m_n}\varphi(X_{nj})\left(\varphi'(X_{nj})\Theta_n - Y_{nj}\right).$$

On a : $E[\bar{Z}_n|\Theta_n] = M(\Theta_n) = B(\Theta_n-\theta_o)$.

Soit $W(\theta) = Z(\theta)-M(\theta) = \varphi(X)\left(\varphi'(X)\theta-Y\right)-M(\theta)$,

$$W_{nj}(\theta) = \varphi(X_{nj})\left(\varphi'(X_{nj})\theta-Y_{nj}\right)-M(\theta),$$

$$\bar{W}_n(\theta) = \frac{1}{m_n}\sum_{j=1}^{m_n} W_{nj}(\theta),\ W_{nj} = W_{nj}(\Theta_n),$$

$$\bar{W}_n = \bar{W}_n(\Theta_n) = \bar{Z}_n - M(\Theta_n).$$

On peut écrire le processus sous la forme :

$$\Theta_{n+1}-\theta_o = (I-a_nB)(\Theta_n-\theta_o)-a_n\bar{W}_n.$$

Nous allons vérifier pour ce processus les hypothèses du théorème de Fabian, en posant $\Theta_n-\theta_o = U_n$, $n^\beta a_n B = \Gamma_n$, $\gamma = \beta$, $-n^{(\beta+\gamma)/2}a_n I = \Phi_n$, $\bar{W}_n = V_n$, $T_n = 0$, et en prenant pour $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $\Theta_1,\Theta_2,\ldots,\Theta_n$.

2) Les hypothèses 7.1 à 7.5 sont vérifiées, avec $\Gamma = cB$, $\Phi = -cI$ (d'après 6.4), $T = 0$.

3) Montrons que : $\exists\Sigma \in \mathbb{R}^{p\times p}$: $\|E[\bar{W}_n\bar{W}_n'|\mathcal{F}_n]-\Sigma\| \xrightarrow{p.s.} 0$.

$$E[\bar{W}_n\bar{W}_n'|\mathcal{F}_n] = \frac{1}{(m_n)^2}\sum_i\sum_j E[W_{ni}W_{nj}'|\mathcal{F}_n] = \frac{1}{(m_n)^2}\sum_i E[W_{ni}W_{ni}'|\mathcal{F}_n],$$

car pour $i \neq j$, les variables $W_{ni}(\theta)$ et $W_{nj}(\theta)$ sont indépendantes et $E[W_{ni}(\theta)] = 0$.

Sous les hypothèses 5.1, 6.1 et 6.4, $\Theta_n \xrightarrow{p.s.} \theta_o$; d'après 6.2, $E[W_{ni}W_{ni}'|\mathcal{F}_n] \xrightarrow{p.s.} \pi$.
D'après 6.3, $\exists m_o$: $m_n < m_o$; donc,

$$\left\|\frac{1}{(m_n)^2}\sum_{i=1}^{m_n}\left(E[W_{ni}W_{ni}'|\mathcal{F}_n]-\pi\right)\right\| \leqslant \frac{1}{(m_n)^2}\sum_{i=1}^{m_o}\|E[W_{ni}W_{ni}'|\mathcal{F}_n]-\pi\| \xrightarrow{p.s.} 0\ ;$$

comme $m_n \to m$, $E[\bar{W}_n\bar{W}_n'|\mathcal{F}_n] \xrightarrow{p.s.} \frac{\pi}{m}$.

L'hypothèse 7.6 est vérifiée avec $\Sigma = \frac{\pi}{m}$.

4) Nous supposons provisoirement (voir la fin de la démonstration) que $\sup_\theta\|E[W(\theta)W'(\theta)]-\pi\| < \infty$ (1). En faisant des majorations, on en déduit facilement que $\exists C > 0$: $\forall n, \|E[\bar{W}_n\bar{W}_n'|\mathcal{F}_n]-\frac{\pi}{m}\| < C$.
L'hypothèse 7.7 est vérifiée.

5) Pour vérifier que, $\forall r > 0$, $\lim_{j\to\infty} \int_{\{\|\bar{W}_j\|^2 \geq r\, j^{\beta}\}} \|\bar{W}_j\|^2 dP = 0$,

on utilise le lemme 4. D'après 5.1, 6.1, 6.4, les hypothèses C1.1, C1.2, C1.3, C1.4 sont vérifiées.

Vérifions l'hypothèse L4.2. Supposons provisoirement (voir la fin de la démonstration) que $\sup_\theta E[\|W(\theta)\|^2] < \infty$ (2). Alors, d'après le lemme 3, $\forall n$, $\forall\theta$, $E[\|\bar{W}_n(\theta)\|^2] \leq E[\|W(\theta)\|^2] \leq$ $\leq \sup_\theta E[\|W(\theta)\|^2] < \infty$.

Vérifions l'hypothèse L4.1. Pour cela, nous appliquons le lemme 5 et vérifions que : $\exists\varepsilon_o > 0$, $\exists v > 0$:

$$\sup_n \sup_{\|\theta-\theta_o\|<\varepsilon_o} E[\|\bar{W}_n(\theta)\|^{2+v}] < \infty.$$

D'après le lemme 3, on a

$$E[\|\bar{W}_n(\theta)\|^{2+v}] \leq E[\|W(\theta)\|^{2+v}].$$

On a $\quad W(\theta) = \varphi(X)\Big(\varphi'(X)\theta - Y\Big) - B(\theta-\theta_o)$; donc, pour $\|\theta-\theta_o\| < \varepsilon_o$,

$$E[\|W(\theta)\|^{2+v}] \leq E\Big[\Big(\|\varphi(X)\varphi'(X)\|\,(\|\theta_o\|+\varepsilon_o)+\|\varphi(X)Y\|+\|B\|\,\varepsilon_o\Big)^{2+v}\Big] < \infty$$

pour un $v > 0$ d'après 6.1.

Toutes les hypothèses du lemme 4 sont vérifiées. On a donc

$$\lim_{R\to\infty}\sup_n \int_{\{\|\bar{W}_n\| \geq R\}} \|\bar{W}_n\|^2 dP = 0.$$ Comme

$$\int_{\{\|\bar{W}_j\|^2 \geq r\, j^{\beta}\}} \|\bar{W}_j\|^2 dP \leq \sup_n \int_{\{\|\bar{W}_n\|^2 \geq r\, j^{\beta}\}} \|\bar{W}_n\|^2 dP,$$

on en déduit la proposition cherchée.

6) Vérifions que, pour $\beta = 1$, $\forall r > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{\{\|\bar{W}_j\|^2 \geq r\, j\}} \|\bar{W}_j\|^2 dP = 0.$$

D'après le résultat de 5,

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_o : \forall j > n_o,\ \int_{\{\|\bar{W}_j\|^2 \geq r\, j\}} \|\bar{W}_j\|^2 dP < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

D'autre part, $\sup_n \sup_\theta E[\|\bar{W}_n(\theta)\|^2] < \infty$, d'après l'hypothèse (2), $\sup_\theta E[\|W(\theta)\|^2] < \infty$, et d'après le lemme 3 ; donc, $\sup_j E[\|\bar{W}_j\|^2] < \infty$; par conséquent,

$$\exists n_1 \ : \ \forall n > n_1, \ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n_o} \int_{\{\|\bar{W}_j\|^2 \geq r\, j\}} \|\bar{W}_j\|^2 dP < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Donc, $\forall n > \sup(n_o, n_1)$, $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{\{\|\bar{W}_j\|^2 \geq r\, j\}} \|\bar{W}_j\|^2 dP < \varepsilon$;

la proposition est vérifiée.

7) Nous allons montrer dans cette partie que l'on peut supprimer les hypothèses (1) et (2) :

$$(1) \ : \ \sup_\theta \|E[W(\theta)W'(\theta)] - \pi\| < \infty \ ;$$

$$(2) \ : \ \sup_\theta E[\|W(\theta)\|^2] < \infty.$$

Pour cela, nous allons appliquer la méthode de troncature introduite par Hodges et Lehmann [8].

On déduit les hypothèses 5.1, 6.1 et 6.2 qu'il existe un voisinage de θ_o, défini par $\|\theta-\theta_o\| < A$, dans lequel (1) et (2) sont vérifiées ; si elles ne le sont pas pour tout θ, définissons la famille de variables aléatoires $\{Z^1(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}^p\}$, telle que $Z^1(\theta) = Z(\theta)$ pour $\|\theta-\theta_o\| < A$ et telle que $Z^1(\theta)$ soit une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(B(\theta-\theta_o), I)$ pour $\|\theta-\theta_o\| \geq A$; (1) et (2) sont vérifiées quel que soit θ pour cette famille.

Le processus (Θ_n) converge presque sûrement vers θ_o. Donc, $\forall 0 < \varepsilon < 1$, $\exists N(\varepsilon)$: $P(\bigcap_{n>N(\varepsilon)} \{\|\Theta_n-\theta_o\| < A\}) > 1-\varepsilon (3)$. Définissons alors le processus (Θ_n^1), dépendant de ε, par

$$\Theta_1^1 = \Theta_{N(\varepsilon)+1},\ \Theta_{n+1}^1 = \Theta_n^1 - a_{N(\varepsilon)+n} \bar{Z}^1{}_{N(\varepsilon)+n},$$

construit à partir de la famille $\{Z^1(\theta)\}$ comme (Θ_n) l'est à partir de la famille $\{Z(\theta)\}$. En reprenant la démonstration, on constate que toutes les hypothèses du théorème de Fabian sont vérifiées pour ce processus (nous aurions pu l'introduire au début de la démonstration ; nous ne l'avons pas fait pour ne pas alourdir les notations). On conclut donc, d'après Fabian, que $\sqrt{m}\, n^{\beta/2}(\Theta_n^1-\theta_o) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, PMP')$, M étant défini dans l'énoncé du présent théorème.

Pour $\|\theta-\theta_o\| < A$, $Z^1(\theta) = Z(\theta)$; donc d'après (3), on a

$$P\left(\forall n \geq 1,\ \Theta_n = \Theta_{N(\varepsilon)+n}\right) > 1-\varepsilon.$$

Notons $F_X(t) = P(X < t)$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ; on a

$$\forall n,\ \forall\theta,\ \left|F_{\Theta_{N(\varepsilon)+n}}(\theta)-F_{\Theta^1_n}(\theta)\right| = \left|P\left(\Theta_{N(\varepsilon)+n} < \theta\right)-P\left(\Theta^1_n < \theta\right)\right|$$

$$\leqslant \left|P\left(\Theta_{N(\varepsilon)+n} < \theta \middle| \forall n \geqslant 1,\ \Theta^1_n = \Theta_{N(\varepsilon)+n}\right)-\right.$$

$$\left.-P\left(\Theta^1_n < \theta \middle| \forall n \geqslant 1,\ \Theta^1_n = \Theta_{N(\varepsilon)+n}\right)\right| P\left(\forall n \geqslant 1,\ \Theta^1_n = \Theta_{N(\varepsilon)+n}\right) +$$

$$+P\left(\exists n : \Theta^1_n \neq \Theta_{N(\varepsilon)+n}\right) < 0 + \varepsilon.$$

Donc, $\forall 0 < \varepsilon < 1,\ \exists N(\varepsilon) : \forall n,\ \forall\theta, \left|F_{\Theta_{N(\varepsilon)+n}}(\theta)-F_{\Theta^1_n}(\theta)\right| < \varepsilon$;

d'autre part, $\forall 0 < \varepsilon < 1$, $\sqrt{m}\, n^{\frac{\beta}{2}}(\Theta^1_n-\theta_o) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,PMP')$; on en déduit que

$$\sqrt{m}\, n^{\frac{\beta}{2}}\ (\Theta_n-\theta_o) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,PMP').$$

Comme $m_n \to m$, on peut aussi écrire

$$\sqrt{m_n}\ n^{\frac{\beta}{2}}\ (\Theta_n-\theta_o) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,PMP').$$

BIBLIOGRAPHIE

1 - C.C. BLAYDON, R.L. KASHYAP, K.S. FU
Applications of the stochastic approximation methods.
Adaptive, learning and pattern recognition systems ; theory and applications, edited by J.M. Mendel, K.S. Fu, Academic Press 1970, 357-392.

2 - J.R. BLUM
Multidimensional stochastic approximation methods.
Ann. Math. Stat., 1954, Vol. 25, 737-744.

3 - D.L. BURKHOLDER
On a class of stochastic approximation processes.
Ann. Math. Stat., 1956, Vol. 27, 1044-1059.

4 - P. DAUBEZE
Une extension d'un théorème de C. MACCHI.
Annales Scientifiques de l'Université de Clermont, 1975, Mathématiques, 12ème fascicule, 64-93.

5 - V. FABIAN
On asymptotic normality in stochastic approximation.
Ann. Math. Stat., 1968, Vol. 39, 1327-1332.

6 - B. FICHET

Sur l'approximation et l'optimisation stochastiques.
Thèse de docteur-ingénieur, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1970.

7 - E.G. GLADYSHEV

On stochastic approximation.
Theory of Probability and its applications, 1965, Vol. 10, 275-278.

8 - J.L. HODGES, E.L. LEHMANN

Two approximations to the Robbins-Monro process.
Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, 1956, Vol. 1, 95-104.

9 - R.L. KASHYAP, C.C. BLAYDON, K.S. FU

Stochastic approximation.
Adaptive, learning and pattern recognition systems ; theory and applications, edited by J.M. Mendel, K.S. Fu, Academic Press, 1970, 329-355.

10 - J. KIEFER, J. WOLFOWITZ

Stochastic estimation of the maximum of a regression function.
Ann. Math. Stat., 1952, Vol. 23, 462-466.

11 - H.J. KUSHNER

General convergence results for stochastic approximations via weak convergence theory.
Journ. Math. Anal. and applic., 1977, 61, 490-503.

12 - H.J. KUSHNER

Convergence of recursive adaptive and identification procedures via weak convergence theory.
IEEE Trans. Autom. Contr., dec. 1977, Vol. AC-22, N° 6, 921-930.

13 - L. LJUNG

Analysis of recursive stochastic algorithms.
IEEE Trans. Autom. Contr., aug. 1977, Vol. AC-22, N° 4, 551-575.

14 - L.LJUNG

Strong convergence of a stochastic approximation algorithm.
Ann. Stat., 1978, Vol. 6, N° 3, 680-696.

15 - J.M. MONNEZ

Approximation stochastique : le processus de Robbins-Monro ; mise à jour des résultats et quelques compléments.

Thèse de $3^{\text{ème}}$ cycle, Université de Nancy I, 1975.

16 - H. ROBBINS, S. MONRO

A stochastic approximation method.

Ann. Math. Stat., 1951, Vol. 22, 400-407.

17 - H. ROBBINS, D. SIEGMUND

A convergence theorem for non-negative almost supermartingales and some applications.

Optimizing methods in Statistics, J.S. Rustagi ed., Academic Press, 1971, 233-257.

18 - L. SCHMETTERER

Multidimensional stochastic approximation.

Multivariate Analysis, II, Proc. 2nd Int. Symp., Dayton, Ohio, Academic Press, 1969, 443-460.

19 - J.H. VENTER

On Dvoretzky stochastic approximation theorems.

Ann. Math. Stat., 1966, Vol. 37, 1534-1544.