

E. STEMMELEN

**Reconstruction d'un tableau d'échanges à partir d'un squelette et des marges**

*Statistique et analyse des données*, tome 2, n° 1 (1977), p. 60-101

[http://www.numdam.org/item?id=SAD\\_1977\\_\\_2\\_1\\_60\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAD_1977__2_1_60_0)

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

RECONSTRUCTION D'UN TABLEAU D'ÉCHANGES  
À PARTIR D'UN SQUELETTE ET DES MARGES.

*Des pratiques usuelles en économétrie...*

*...à l'Analyse Factorielle des Correspondances.*

par E. STEMMELEN<sup>(+)</sup>

(+) : *Laboratoire de Statistiques et d'Etudes Economiques  
et Sociales. Département de Protection.  
Commissariat à l'Energie Atomique.*

Reconstruction d'un tableau d'échanges  
à partir d'un squelette et des marges.

par Eric Stemmelen

Dans le domaine incertain de la prévision, la pratique économétrique consiste bien souvent à plaquer sur un phénomène des modèles plus ou moins cohérents; l'économiste semble penser que le réel s'adapte bien à une logique issue de considérations purement mathématiques : il ne contrôle pas toujours la rigueur de la méthode, ni surtout sa validité.

Mais on peut avoir bien des visions d'un phénomène suivant l'angle sous lequel on se place; ici l'angle est défini par l'intention : deviner un certain futur. Ayant précisé les objectifs avec une rigueur toute phénoménologique, il s'agit d'observer le phénomène, de le comprendre, d'en dégager l'essentiel, ..., pour aboutir éventuellement à un modèle qui pourra, lui, être considéré comme résultant non seulement de l'intention mais aussi du phénomène.

Nous confronterons ces deux approches dans le cas de la prévision des tableaux d'échanges, chapitre de l'Econométrie aux nombreuses applications pratiques :

- Evolution des coefficients techniques dans les tableaux de LEONTIEV
- Variation du commerce international
- Etude des migrations
- Economie des transports
- Echanges inter-régionaux en termes de produits ou d'emplois.
- Etc...

On dispose souvent de bonnes prévisions des "marges" des tableaux d'échanges; il en est ainsi par exemple des échanges commerciaux où les exportations et importations totales pour chaque pays ou chaque région sont en général bien prévues. Ces "prévisions" peuvent être parfois en fait des objectifs fixés par les décideurs, la prévision du tableau d'échanges fournissant alors une image des conséquences globales de ces objectifs ponctuels.

Il s'agit dans tous les cas de construire un tableau dont les marges sont fixées et qui tienne compte des données que l'on possède sur les échanges passés.

L'économiste écarte en général délibérément les hypothèses de bouleversements complets; il ne peut envisager que des phénomènes évolutifs, à déformation lente.

Encore faut-il pouvoir dégager ce qui évolue véritablement à moyen ou long terme, de ce qui ne fait que varier momentanément, voire accidentellement. Il s'agit donc de découvrir ce qui est déformable dans les tableaux d'échanges, sans présenter de rupture à un moment donné; on ne retiendra pas les brusques oscillations de faible amplitude qui ne correspondent à rien de significatif.

Nous appellerons "squelette" d'un tableau d'échanges l'ensemble des éléments qui caractérise cette structure évolutive des échanges et qui ne retient pas ce qui n'est que passager.

Il s'agit d'une conception dynamique de la structure d'un phénomène; le type de structure retenu sera toujours contrôlable à l'aide de critères simples, les différences entre les tableaux réels et les tableaux reconstruits à l'aide du squelette devant se comporter comme des résidus (au sens statistique). D'un point de vue statique le squelette doit résumer "l'essentiel" du tableau, c'est-à-dire éliminer l'accessoire et en particulier les échanges sans significations.

Ainsi la prévision des échanges revient-elle à la recherche d'un squelette, à l'étude de ses déformations successives et à la prévision de son état à l'horizon choisi. Le tableau recherché sera le tableau, de marges données, le plus proche - au sens d'un critère à préciser - du squelette projeté.

On peut regrouper les méthodes de prévision des tableaux d'échanges en deux catégories :

- 1) Celles qui utilisent un squelette théorique préexistant, et tentent de vérifier a-posteriori que le phénomène étudié relève bien du modèle présupposé.
- 2) Celles qui cherchent à dégager peu à peu de l'étude des données disponibles un squelette bien adapté à l'objectif et jouissant des propriétés exigées.

La première façon de procéder est usuelle en Econométrie; la deuxième façon, qui l'est malheureusement beaucoup moins, fait appel aux méthodes de l'Analyse des données.

Dans une première partie nous donnons une présentation unifiée des techniques usuelles; on constate en effet qu'elles relèvent finalement toutes du même principe : déterminer les termes d'échanges  $X_{ij}$  qui minimisent une certaine fonction sous les contraintes de respect des marges. La fonction retenue dépend à la fois du squelette utilisé a-priori et de la façon de mesurer l'écart entre le tableau et le squelette.

Dans une deuxième partie la prévision des tableaux d'échanges, selon les principes phénoménologiques dont nous venons de parler, est abordée à l'aide de l'Analyse factorielle des correspondances.

Les méthodes et techniques, les façons de faire, décrites dans cet article, empruntent évidemment très largement à la statistique; les tableaux d'échanges définissant des mesures positives sur des produits cartésiens, les traitements effectués sont souvent voisins de ceux que l'on fait ou que l'on pourrait faire sur les tableaux de contingence. Les méthodes qui sont ici exposées permettent l'analyse des tableaux carrés; elles se transposent immédiatement à l'analyse des tableaux rectangulaires.

NOTATIONS      UTILISEES

---

Un tableau d'échanges est une matrice carrée  $n \times n$  où le terme  $X_{ij}$  désigne la quantité de produit envoyé par la région (ou le pays) "i" vers la région "j" dans le cas d'échanges commerciaux, ou bien la valeur des consommations intermédiaires de la branche "j" en provenance de la branche "i" dans le cas des tableaux d'échanges interindustriels (T.E.I).

On notera les marges de ce tableau  $X_{i\bullet}$  et  $X_{\bullet j}$ , et le total  $X_{\bullet\bullet}$  :

$$X_{i\bullet} = \sum_{j=1}^n X_{ij} \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n$$

$$X_{\bullet j} = \sum_{i=1}^n X_{ij} \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, n$$

$$X_{\bullet\bullet} = \sum_{i,j} X_{ij} = \sum_i X_{i\bullet} = \sum_j X_{\bullet j}$$

On notera  $L_i$ ,  $C_j$  et  $T$  les prévisions à l'horizon voulu de ces marges et de ce total; elles vérifient toujours :

$$T = \sum_i L_i = \sum_j C_j$$

On notera enfin les probabilités associées:

$$P_{ij} = \frac{X_{ij}}{T}$$

$$P_{i\bullet} = \frac{X_{i\bullet}}{T}$$

$$P_{\bullet j} = \frac{X_{\bullet j}}{T}$$

## 1 - LA PRATIQUE CLASSIQUE

### 1.1 - GENERALITES : NOTION DE PROGRAMME DE PREVISION

Il s'agit de reconstruire le tableau d'échanges X à partir de la donnée d'un "squelette" S - qui sera soit une approximation de X, soit un ensemble de coefficients ou de paramètres qui rendent compte des idées a-priori que l'on peut avoir de X - et des marges de X, supposées connues,  $L_i$  et  $C_j$ .

Le but étant de faire "coller" au mieux le tableau X au "squelette" S, tout en respectant les marges données, la reconstruction du tableau se fera à l'aide d'un critère du type :

rendre minimum  $F(X, S)$

sous les contraintes de respect des marges :

$$\sum_j X_{ij} = L_i \quad (\text{pour tout } i)$$

$$\sum_i X_{ij} = C_j \quad (\text{pour tout } j)$$

et sous les contraintes de signe :

$$X_{ij} \geq 0 \quad (\text{pour tout } i \text{ et pour tout } j)$$

F étant une fonction de X et de S qui mesurera en quelque sorte l'écart entre le tableau X et le squelette S.



En réalité, désirant dans un premier temps dresser un bilan des méthodes existantes, on s'est aperçu qu'il suffisait de ne considérer que les fonctions  $F$  telles que :

$$F(X, S) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(X_{ij})$$

en faisant intervenir le squelette au niveau de la définition de la fonction  $f$

On peut remarquer que le critère alors retenu donne des rôles équivalents aux différents éléments du tableau  $X$ ; cela revient dans le cas d'échanges commerciaux - à faire l'hypothèse d'une certaine cohérence dans les actions des agents économiques qui assurent les échanges, cohérence qui permettrait à la fois d'effectuer la même transformation sur chacun des termes  $X_{ij}$  et de minimiser la somme des résultats obtenus. On élimine ainsi toute idée de conflit au niveau des échanges, toute notion de déséquilibre au profit de certains agents économiques; les méthodes employées usuellement ne sont donc pas neutres puisqu'elles présupposent à la fois l'existence d'un squelette à-priori - donc d'une prétendue structure immuable - et un jeu d'acteurs économiques aboutissant à l'équilibre.

Nous regrouperons sous le vocable de "programme de prévision" d'un tableau d'échanges les méthodes qui se ramènent à un problème de la forme suivante :

	déterminer les $X_{ij}$ qui minimisent	
	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(X_{ij})$	
	sous les contraintes	
(L)	$\sum_j X_{ij} = L_i$	pour tout $i = 1, \dots, n$
(C)	$\sum_i X_{ij} = C_j$	pour tout $j = 1, \dots, n$
(S)	$X_{ij} \geq 0$	pour tout $i$ et tout $j$

On notera désormais les contraintes de marges "contraintes (L) et (C)" et les contraintes de signe "contraintes (S)". On ne rappellera pas les contraintes (S) lorsque celles-ci sont visiblement satisfaites.

Les différentes méthodes se distingueront à la fois par la forme analytique donnée à la fonction  $f$  et par les paramètres retenus pour la préciser qui caractériseront le squelette adopté.

Rappelons que ces paramètres n'ont d'intérêt que s'ils ne sont pas en nombre trop élevés et s'ils peuvent être considérés comme des "données sûres".

Remarquons enfin qu'on parlera toujours de "programme de prévision" si les contraintes à respecter sont seulement des conséquences ou des cas particuliers des contraintes de respect des marges ici indiquées pour le cas général.

## 1.2 - LES TECHNIQUES USUELLES

### 1.2.1 - Les méthodes "STRUCTURELLES".

Parler de méthodes prétendues "structurelles" ne signifie nullement dégager une quelconque structure; d'ailleurs "on retiendra que la notion de structure réduite à elle-même est trop vague pour que son utilisation n'entraîne pas inévitablement un certain nombre d'ambiguïtés" (P. Delattre. "Système, structure, fonction, évolution"). Il s'agit simplement ici d'une facilité de langage pour caractériser l'utilisation d'un certains nombres de coefficients construits à partir des termes  $X_{ij}$  d'un quelconque tableau d'échanges.

En ce sens, il est classique (1, 7, 23, 24, 28) de considérer les quatre types de coefficients :

$$\left(\frac{X_{ij}}{X_{..}}\right) \left(\frac{X_{ij}}{X_{i.}}\right) \left(\frac{X_{ij}}{X_{.j}}\right) \left(\frac{X_{ij} X_{..}}{X_{i.} X_{.j}}\right)$$

que nous noterons respectivement  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  et  $\delta_{ij}$ .

Les modèles alors construits en supposant constant l'un de ces coefficients postulent une relation de proportionnalité dont l'interprétation est immédiate dans les trois premiers cas, si  $X_{ij}$  est un tableau d'échanges commerciaux :

- (1)  $X_{ij} = \alpha_{ij} X_{..}$  suppose la conservation des parts dans le commerce total, qui seul évolue (modèle à un degré de liberté).
- (2)  $X_{ij} = \beta_{ij} X_{i.}$  suppose la conservation des parts des importateurs dans les exportations de chaque région  $i$ , qui seules évoluent (modèle à n degrés de liberté).
- (3)  $X_{ij} = \gamma_{ij} X_{.j}$  suppose la conservation des parts des exportateurs dans les importations de chaque région  $j$ , qui seules évoluent (modèle à n degrés de liberté).

Le quatrième coefficient mérite quelques explications; l'équation du modèle est la suivante :

$$(4) X_{ij} = \delta_{ij} \frac{X_{i.} X_{.j}}{X_{..}}$$

où  $\delta_{ij}$  est le coefficient supposé constant.

Ce coefficient  $\delta_{ij}$  a été utilisé à des fins d'analyse de tableaux d'échanges la première fois par LEONTIEF et STROUT (20, 21) et repris en particulier par NAGY (26) et par FROMENT et ZIGHERA (11, 12). On peut en donner une justification économique en écrivant :

$$\delta_{ij} = \frac{\frac{X_{ij}}{X_{i.}}}{\frac{X_{.j}}{X_{..}}} = \frac{\text{part du pays importateur } j \text{ dans les exportations de } i}{\text{part du pays importateur } j \text{ dans le commerce total}}$$

ou encore :

$$\delta_{ij} = \frac{\frac{X_{ij}}{X_{.j}}}{\frac{X_{i.}}{X_{..}}} = \frac{\text{part du pays exportateur } i \text{ dans les importations de } j}{\text{part du pays exportateur } i \text{ dans le commerce total}}$$

Sous l'un quelconque de ces deux points de vue, un état "normal" du commerce serait celui où tous les  $\delta_{ij}$  sont égaux à 1.

Mais remarquons aussi que dans ce cas on aurait :

$$\frac{X_{ij}}{X_{..}} = \frac{X_{i.}}{X_{..}} \times \frac{X_{.j}}{X_{..}}$$

ce qui est la classique hypothèse d'indépendance entre lignes et colonnes d'un tableau statistique; les  $\delta_{ij}$  rendent donc compte ici de "l'écart à l'indépendance", écart que l'on suppose constant dans ce modèle.

On peut bien entendu inventer d'autres coefficients construits à partir des éléments  $X_{ij}$ ,  $X_{..}$ ,  $X_{i.}$  et  $X_{.j}$ . Par exemple R. TEEKENS (32) suggère :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{X_{ij} X_{..} - X_{i.} X_{.j}}{X_{..}^2}$$

qui est une autre façon de mesurer l'écart à l'indépendance.

Le modèle correspondant s'écrit :

$$(5) \quad X_{ij} = \varepsilon_{ij} X_{..} + \frac{X_{i.} X_{.j}}{X_{..}}$$

Il est également à  $2n - 1$  degrés de liberté

Les cinq modèles que nous venons d'envisager supposent chacun l'existence d'un coefficient constant pour toute matrice  $\{X_{ij}\}$  du phénomène étudié. Pour étudier la validité de tels modèles, il suffit de construire les matrices  $\{\alpha_{ij}\}$ ,  $\{\beta_{ij}\}$ , ... pour plusieurs années consécutives et de vérifier leur stabilité.

Il est bien rare dans la pratique de rencontrer de tels cas : les coefficients ont plutôt tendance à se modifier d'une année sur l'autre. Les graphiques donnant chacun des coefficients en fonction du temps nous renseignent sur leur évolution; si celle-ci n'est pas anarchique (croissances ou décroissances régulières) il est possible de prévoir les valeurs prises par ces coefficients dans le futur, et par là de prévoir les  $X_{ij}$  : on construit ainsi des "modèles à coefficients évolutifs". Un problème est alors celui de la cohérence des prévisions  $X_{ij}$  et des prévisions des marges : nous allons indiquer comment le résoudre pour chaque cas et surtout montrer que ces différents modèles relèvent tous des "programmes de prévision" introduits précédemment.

Indiquons auparavant que nous supposons connus les résultats concernant les extrêmes de fonctions de plusieurs variables avec contraintes sur les variables (25).

#### 1.2.1.1 - Modèle des "fréquences" ( $\alpha_{ij}$ )

Soient  $\alpha_{ij}$  des nombres positifs donnés tels que :

$$\sum_{ij} \alpha_{ij} = 1$$

Ce sont des coefficients de fréquences d'échanges, c'est-à-dire des termes correspondant à certains  $\left(\frac{X_{ij}}{X_{..}}\right)$

Les  $\alpha_{ij}$  ont pu être obtenus par extrapolation à partir de coefficients  $\left(\frac{X_{ij}}{X_{..}}\right)$  des années antérieures, extrapolations dont on a ramené la somme à 1.

Soit alors le programme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{ij} X_{ij} \operatorname{Log} \frac{X_{ij}}{\alpha_{ij}} \\ \text{sous } \sum_{ij} X_{ij} = T \end{array} \right.$$

où T est un nombre donné, qui correspond à l'échange total prévu à l'horizon où l'on se place pour la prévision.

La fonction à minimiser étant convexe et les contraintes linéaires la solution unique est donnée par la résolution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{Log} \frac{X_{ij}}{\alpha_{ij}} - 1 + \lambda = 0 \text{ (Pour tout } i \text{ et tout } j) \\ \sum_{ij} X_{ij} = T \end{array} \right.$$

En posant  $l = e^{\lambda - 1}$  on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{ij} = \alpha_{ij} l \text{ (pour tout } i \text{ et tout } j) \\ \sum_{ij} X_{ij} = T \end{array} \right.$$

d'où finalement :

$$X_{ij} = \alpha_{ij} T \text{ (pour tout } i \text{ et tout } j)$$

ce qui correspond à la solution espérée du modèle (1).

1.2.1.2 - Modèles des "profils"  $(\beta_{ij})$   $(\gamma_{ij})$ 

Soit le programme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i,j} X_{ij} \text{ Log } \frac{X_{ij}}{\beta_{ij}} \\ \text{sous la contrainte (L)} \end{array} \right.$$

où les  $\beta_{ij}$  sont des nombres positifs donnés tels que :

$$\text{pour tout } i : \sum_j \beta_{ij} = 1$$

Les  $\beta_{ij}$  sont considérés comme des "profils en ligne", ils peuvent être obtenus par extrapolation à partir des coefficients  $\left(\frac{X_{ij}}{X_{i.}}\right)$  des années antérieures, extrapolations dont on a ramené les n sommes en lignes à 1.

Le programme équivaut à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{Log } \frac{X_{ij}}{\beta_{ij}} - 1 + \rho_i = 0 \quad (\text{pour tout } i \text{ et pour tout } j) \\ \sum_j X_{ij} = L_i \quad (\text{pour tout } i) \end{array} \right.$$

dont les solutions sont celles "souhaitées" :

$$X_{ij} = L_i \beta_{ij} \quad (\text{pour tout } i \text{ et pour tout } j)$$

On aura de même un programme de prévision correspondant aux "profils en colonne", c'est-à-dire aux termes  $\gamma_{ij}$  obtenus par extrapolation de termes  $\left(\frac{X_{ij}}{X_{.j}}\right)$  correspondant aux années antérieures et corrigés de façon à ce qu'ils vérifient :

$$\sum_i \gamma_{ij} = 1 \quad (\text{pour tout } j)$$

Ce programme s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{ij} X_{ij} \text{ Log } \frac{X_{ij}}{\gamma_{ij}} \\ \text{sous la contrainte (C)} \end{array} \right.$$

et ses solutions sont bien sur :

$$X_{ij} = C_j \delta_{ij} \quad (\text{pour tout } i \text{ et pour tout } j)$$

### 1.2.1.3 - Premier modèle "d'écart à l'indépendance" ( $\delta_{ij}$ )

Soit le programme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{ij} X_{ij} \quad \text{Log} \left( \frac{X_{ij} \cdot T}{\delta_{ij}} \right) \\ \text{sous les contraintes (L), (C) et (S)} \end{array} \right.$$

où les coefficients  $\delta_{ij}$  sont des nombres positifs donnés tels que :

$$(K) \left\{ \begin{array}{l} \sum_i L_i \delta_{ij} = T \quad (\text{pour tout } j) \\ \sum_j C_j \delta_{ij} = T \quad (\text{pour tout } i) \end{array} \right.$$

La solution de ce programme s'obtient par résolution des équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{Log} \frac{X_{ij} \cdot T}{\delta_{ij}} + \rho_i + \sigma_j = 1 \quad (\text{pour tout } i \text{ et pour tout } j) \\ \sum_i X_{ij} = C_j \quad (\text{pour tout } j) \\ \sum_j X_{ij} = L_i \quad (\text{pour tout } i) \end{array} \right.$$

équivalentes aux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{ij} = \frac{r_i \cdot s_j}{T} \delta_{ij} \quad (\text{pour tout } i \text{ et pour tout } j) \\ \sum_i X_{ij} = C_j \quad (\text{pour tout } j) \\ \sum_j X_{ij} = L_i \quad (\text{pour tout } i) \end{array} \right.$$

(on a posé :  $r_i = e^{\rho_i - 1}$  et  $s_j = e^{\sigma_j}$ )



Du fait de la propriété (K) une solution est donnée par :

$$r_i = L_i \quad (\text{pour tout } i)$$

$$s_j = C_j \quad (\text{pour tout } j)$$

car alors :

$$\sum_i X_{ij} = \sum_i \frac{L_i C_j}{T} \quad \delta_{ij} = C_j \frac{\sum_i L_i \delta_{ij}}{T} = C_j$$

et de même :

$$\sum_j X_{ij} = L_i \frac{\sum_j C_j \delta_{ij}}{T} = L_i$$

Cette solution est unique, la fonction à minimiser étant convexe et les contraintes linéaires.

On obtient donc bien le résultat :

$$X_{ij} = \frac{L_i C_j}{T} \delta_{ij} \quad (\text{pour tout } i \text{ et pour tout } j)$$

Si les coefficients  $\delta_{ij}$  sont tous égaux à 1 on retrouve :

$$X_{ij} = \frac{L_i C_j}{T}$$

C'est-à-dire la solution classique correspondant à l'hypothèse d'indépendance.

\* Remarque sur les conditions vérifiées par les  $\delta_{ij}$

On montre sans difficultés que les conditions (K) sont caractéristiques de ce premier modèle d'écart à l'indépendance; si on pose :

$$X_{ij} = \delta_{ij} \frac{L_i C_j}{T}$$

Les  $X_{ij}$  ayant bien - d'après (K) - pour marges  $L_i$  et  $C_j$ , et pour total  $T$ , s'écrivent en effet :

$$X_{ij} = \delta_{ij} \frac{X_{i.} X_{.j}}{X_{..}}$$

De plus, les conditions (K) peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \Delta' \underline{L} = T \underline{j} \\ \Delta \underline{C} = T \underline{j} \end{cases}$$

où  $\underline{C}$  et  $\underline{L}$  sont les vecteurs colonnes dont les coordonnées sont les  $C_i$  et les  $L_j$ , et où  $\Delta$  est la matrice des nombres donnés  $\delta_{ij}$ .

Si  $P$  désigne la matrice des probabilités définies par les  $\frac{X_{ij}}{T}$ , cette condition s'écrit encore :

$$\begin{cases} \Delta P' \underline{j} = \underline{j} \\ \Delta' P \underline{j} = \underline{j} \end{cases}$$

soit, si  $\Delta$  est inversible

$$\begin{cases} P' \underline{j} = \Delta^{-1} \underline{j} \\ P \underline{j} = \Delta'^{-1} \underline{j} \end{cases}$$

Les marges en colonnes de  $P$  ne sont autres que les marges en ligne de  $\Delta^{-1}$ , les marges en ligne de  $P$  ne sont autres que les marges en colonne de  $\Delta'^{-1}$ . Cette constatation montre que l'on peut obtenir directement les  $X_{ij}$  à partir des  $\delta_{ij}$  et de  $T$ , donc que le modèle issu des "coefficients de LEONTIEF" est à un seul degré de liberté (11, 12, 22, 23, 24).

En général, on obtient la matrice des  $\delta_{ij}$  permettant de construire le tableau à l'horizon voulu par extrapolation des coefficients  $\delta_{ij}$  associés aux tableaux connus aux années antérieures. Un problème se pose alors : comment obtenir une matrice de  $\delta_{ij}$  possédant les propriétés (K).

Cette question a été étudiée par R. FROMENT et J. ZIGHERA, puis par B. LENCLUD; les méthodes proposées consistent en d'assez complexes transformations à effectuer sur les matrices des coefficients obtenus par extrapolation. Ces transformations paraissent avoir la fâcheuse tendance de fournir des coefficients  $\delta_{ij}$  finalement assez éloignés de la réalité, quoique parfaitement corrects sur le plan théorique.

Il paraît préférable de procéder à des repondérations successives des coefficients  $\hat{\delta}_{ij}$  obtenus par extrapolation en procédant de la façon suivante :

$$\delta_{ij}^{(1)} = \hat{\delta}_{ij} \frac{T}{\sum_i L_i \hat{\delta}_{ij}}$$

$$\delta_{ij}^{(2)} = \delta_{ij}^{(1)} \frac{T}{\sum_j C_j \delta_{ij}^{(1)}}$$

.....

$$\delta_{ij}^{(2p+1)} = \delta_{ij}^{(2p)} \frac{T}{\sum_i L_i \delta_{ij}^{(2p)}}$$

$$\delta_{ij}^{2(p+1)} = \delta_{ij}^{(2p+1)} \frac{T}{\sum_j C_j \delta_{ij}^{(2p+1)}}$$

.....

Ainsi à l'ordre  $(2p+1)$  on aura :

$$\sum_i L_i \delta_{ij}^{(2p+1)} = T \quad (\text{pour tout } j)$$

et à l'ordre  $2(p+1)$  :

$$\sum_j C_j \delta_{ij}^{2(p+1)} = T \quad (\text{pour tout } i)$$

On interrompt l'itération lorsqu'on a atteint la précision souhaitée.

Cette méthode simple permettant d'obtenir de "véritables" coefficients  $\delta_{ij}$  n'est autre qu'une variante de la méthode RAS (cf. § 1.1.2), elle a l'avantage de modifier le plus faiblement possible les  $\delta_{ij}$  initiaux.

#### 1.2.1.4 - Deuxième modèle "d'écart à l'indépendance".

Soit le programme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{ij} \left( X_{ij} - \frac{L_i C_j}{T} \right) \text{Log} \left( \frac{X_{ij} - \frac{L_i C_j}{T}}{ij} \right) \\ \text{sous les contraintes (L), (C) et (S)} \end{array} \right.$$

où les coefficients  $\varepsilon_{ij}$  sont tels que :

$$\sum_i \varepsilon_{ij} = \sum_j \varepsilon_{ij} = 0 \text{ (pour tout } i \text{ et pour tout } j)$$

Une solution s'écrit :

$$X_{ij} = r_i s_j \varepsilon_{ij} + \frac{L_i C_j}{T} \text{ (pour tout } i \text{ et pour tout } j)$$

et d'après les contraintes et les propriétés des  $\varepsilon_{ij}$  :

$$r_i = r \text{ pour tout } i$$

$$s_j = s \text{ pour tout } j .$$

donc, si  $t = r s$  :

$$X_{ij} = t \varepsilon_{ij} + \frac{L_i C_j}{T} \text{ pour tout } i \text{ et pour tout } j$$

On remarque que la solution n'est pas ici unique, c'est-à-dire qu'il existe plusieurs systèmes de coefficients  $\varepsilon_{ij}$  vérifiant

$$\sum_i \varepsilon_{ij} = \sum_j \varepsilon_{ij} = 0 \text{ et fournissant une solution du type précédent.}$$

En fonction des  $\xi_{ij}$  choisis, le paramètre  $t$  peut prendre toute valeur réelle; on a en particulier la solution :

$$X_{ij} = T \xi_{ij} + \frac{L_i C_j}{T}$$

C'est cette solution qui est retenue, le "squelette" des  $\xi_{ij}$  pouvant être facilement obtenu par extrapolation des coefficients :

$$\xi_{ij} = \frac{X_{ij} X_{..} - X_{i.} X_{.j}}{X_{..}^2}$$

calculés aux dates antérieures, extrapolation dont les marges auront été ramenées à zéro.

On a donc bien retrouvé l'expression du modèle (5) comme solution d'un "programme de prévision".

### 1.2.2 - La méthode R.A.S.

Nous venons de voir que la résolution de programmes de la forme :

$$\min \sum_{ij} X_{ij} \text{ Log } \frac{X_{ij}}{a_{ij}}$$

sous les contraintes (L), (C) et (S)

fournit des solutions classiques dans la mesure où les paramètres  $a_{ij}$  introduits correspondent à des coefficients vérifiant certaines propriétés caractéristiques. Que se passe-t-il si ces paramètres  $a_{ij}$  ne sont autres que des termes " $X_{ij}$ " correspondant à une année antérieure ou encore des estimations provisoires des termes  $X_{ij}$  à l'horizon voulu ?

La résolution du programme nous donne alors, en procédant de même que précédemment (les  $a_{ij}$  sont des termes positifs) :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{ij} = r_i a_{ij} s_j \quad (\text{pour tout } i \text{ et tout } j) \\ \sum_j X_{ij} = L_i \quad (\text{pour tout } i) \\ \sum_i X_{ij} = C_j \quad (\text{pour tout } j) \end{array} \right.$$

Les termes  $a_{ij}$  ne possédant pas ici de propriétés particulières, la résolution directe s'avère impossible mais on a reconnu dans ce nouveau programme celui de la méthode R.A.S (1, 3, 7, 13, 17, 18, 27, 30, 31, 37, 38, 39).

Celle-ci suppose que chaque élément  $a_{ij}$  est soumis à deux effets interprétés ainsi en terme d'échanges interrégionaux :

- 1) Une correction de l'offre globale de la région  $i$ , la part de chaque région dans les exportations de  $i$  restant constante.
- 2) Une correction de la demande globale de la région  $j$ , la part de chaque région dans les importations de  $j$  restant constante.

L'interprétation en termes de coefficients techniques d'un T.E.I. (tableau d'échanges interindustriels) est du même type :

- 1) Un "effet de substitution" : le produit  $i$  est remplacé par d'autres produits - ou les remplace - comme intermédiaire dans le processus de fabrication.
- 2) Un "effet de fabrication" : le produit  $j$  absorbe une plus ou moins grande part de produits intermédiaires.

On suppose que les deux effets jouent indépendamment l'un de l'autre et simultanément, d'où l'application de la double correction par le coefficient  $r_i s_j$ .

Le problème ainsi posé se résoud par un procédé itératif qui était connu dès 1940 (6) bien avant son application à la prévision des coefficients techniques par les économistes de Cambridge (31) et qui consiste en une simple succession de règles de trois.

A l'itération (p-1), pour obtenir  $X_{ij}^{2p+1}$  on ajustera les marges en ligne de la matrice  $X^{2p}$  par la formule :

$$X_{ij}^{2p+1} = X_{ij}^{2p} \frac{L_i}{X_{i.}^{2p}}$$

On obtient ensuite la matrice  $X^{2(p+1)}$  en ajustant les marges en colonne de la matrice  $X^{2p+1}$  à l'aide de la formule :

$$X_{ij}^{2(p+1)} = X_{ij}^{2p+1} \frac{C_j}{X_{.j}^{2p+1}}$$

La matrice  $X^0$  permettant d'effectuer la première itération sera la matrice des  $a_{ij}$  donnés. Les itérations se poursuivent jusqu'à ce que les marges de la matrice obtenue soient suffisamment proches des marges  $C_j$  et  $L_i$ ; dans la pratique l'approximation est excellente au bout de 5 à 6 itérations pour peu que les marges du tableau des  $a_{ij}$  ne diffèrent pas trop des marges données. La convergence théorique de la méthode a été étudiée par FRIEDLANDER (10), mais en tant que solution d'un problème différent (cf. § 1.3.3) et surtout par BACHARACH (40); une preuve de la convergence de l'itération vers la solution  $X_{ij} = r_i a_{ij} s_j$  a été fournie par IRELAND et KULLBACK (15, 16) à l'aide de la théorie de l'information de KULLBACK (19); une approche de démonstration plus classique a été tentée par CAUSSINUS (3); enfin les cas particuliers intéressants de non-convergence ont été traités par THIONNET (36, 37).

## 1.2.3 - Bilan

On a vu que la résolution d'un programme de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i, j} X_{ij} \operatorname{Log} \frac{X_{ij}}{a_{ij}} \\ \text{sous les contraintes (L), (C) et (S)} \end{array} \right.$$

fournit, selon les caractéristiques des  $a_{ij}$  des solutions connues qui correspondent à des hypothèses économiques cohérentes.

Le critère utilisé permet de minimiser l'écart entre un squelette caractérisé par les  $a_{ij}$  et le tableau recherché  $X_{ij}$ , écart mesuré selon un indice qui rappelle ceux utilisés en théorie de l'information.

On sait que le "degré d'indétermination" ou "entropie" - selon la terminologie de SHANNON - d'un système d'événements S est donné par :

$$H = - \sum_{k=1}^n p_k \log_2 p_k$$

où  $p_k$  est la probabilité associée à l'événement  $S_k$  (il s'agit de l'espérance mathématique des informations apportées par la détermination de chaque événement). Cette entropie est comprise entre 0 (si l'une des probabilités est égale à 1) et  $\log_2 n$  (si toutes les probabilités sont égales à  $\frac{1}{n}$ ).

Si l'on considère un tableau de contingence dont les probabilités associées sont  $p_{ij}$ , l'entropie de la partition croisée  $P = P_1 \times P_2$  est :

$$H = - \sum_{i, j} p_{ij} \log_2 p_{ij}$$



Les entropies associées aux partitions  $P_1$  et  $P_2$  correspondant aux marges du tableau -les lois de probabilités marginales associées définies par les probabilités  $p_{i.}$  et  $p_{.j}$  sont notées  $P_I$  et  $P_J$  - sont données par :

$$\begin{cases} H_1 = - \sum_i p_{i.} \log_2 p_{i.} \\ H_2 = - \sum_j p_{.j} \log_2 p_{.j} \end{cases}$$

L'entropie  $H$  est inférieure ou égale à la somme  $H_1 + H_2$  et l'égalité est atteinte si et seulement si :

$$P_{ij} = p_{i.} p_{.j} \text{ pour tout } i \text{ et pour tout } j$$

L'"information mutuelle" entre les partitions  $P_1$  et  $P_2$  est notée  $I(P_1, P_2)$ :

$$I(P_1, P_2) = H_1 + H_2 - H$$

Elle s'écrit encore :

$$I(P : P_I \times P_J) = \sum_{i, j} P_{ij} \log_2 \left( \frac{P_{ij}}{p_{i.} p_{.j}} \right)$$

L'information mutuelle est nulle si  $p_{ij} = p_{i.} p_{.j}$ ; l'indice  $I(P : P_I \times P_J)$  mesure l'écart à l'indépendance de la distribution des  $p_{ij}$ .

Par analogie, S. KULLBACK (19) a introduit un indice permettant de mesurer l'écart entre les  $p_{ij}$  et une distribution quelconque de référence; l'"information de discrimination" entre la distribution des  $p_{ij}$  et la distribution de référence des  $\pi_{ij}$  est donnée par :

$$I(p : \pi) = \sum_{i, j} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{\pi_{ij}}$$

(Remarquons ici l'utilisation du logarithme népérien).

On montre que cette quantité est positive ou nulle et ne s'annule que si  $p_{ij} = \pi_{ij}$  pour tout  $i$  et pour tout  $j$  (cf. BENZECRI (41)).

Enfin, si  $p_{ij}$  est proche de  $\pi_{ij}$  l'information de discrimination est équivalente à une distance du  $\chi^2$  (de centre  $\pi$ ), puisqu'on a alors :

$$I(p : \pi) \sim \sum_{i,j} p_{ij} \left( \frac{p_{ij}}{\pi_{ij}} - 1 \right)$$

et

$$\left[ d_{\chi^2}(p, \pi) \right]^2 \sim \sum_{i,j} \pi_{ij} \left[ \left( \frac{p_{ij}}{\pi_{ij}} \right)^2 - 1 \right]$$

### 1.3 - AUTRES TECHNIQUES

La présentation théorique globale précédente permet une compréhension plus approfondie des méthodes usuelles qui obéissent en réalité aux mêmes principes; on vient de le voir en particulier dans l'interprétation de la méthode RAS, qui apparaissait trop souvent comme une simple "recette" sans réelles justifications. Mais la théorisation peut aussi ouvrir la voie à de nouvelles méthodes; nous présentons ici deux exemples construits sur le schéma général des "programmes de prévision" et utilisant des fonctions à minimiser particulièrement simples, ainsi qu'un exemple classique qui fournit une nouvelle interprétation de la méthode RAS. Nous espérons bien entendu que des développements sont à envisager, par la recherche de fonctions à minimiser qui proposeraient d'autres explications des phénomènes d'échanges, c'est-à-dire d'autres "squelettes".

## 1.3.1 - Les programmes de transport

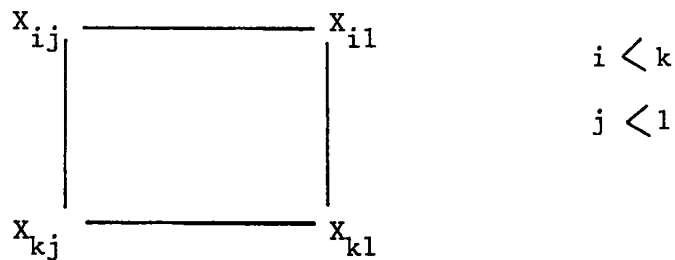
Le programme suivant :

$$\begin{aligned} \min \sum_{ij} X_{ij} C_{ij} \\ \text{sous } \sum_i X_{ij} &= C_j && \text{pour } j = 1, \dots, n \\ \sum_j X_{ij} &= L_i && \text{pour } i = 1, \dots, n \\ X_{ij} &\geq 0 && \text{pour } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

est bien connu; il s'agit d'un classique programme linéaire de transport (2, 4) où la fonction à minimiser  $f(X_{ij}) = \sum_{ij} X_{ij} C_{ij}$  représente le coût des transports de la région  $i$  à la région  $j$ , le terme  $C_{ij}$  étant le coût unitaire d'échange de  $i$  vers  $j$ . On suppose que les échanges ont lieu de telle sorte que leur coût global soit minimum, en admettant que ce critère rend bien compte de l'ensemble des comportements des agents économiques. Mais si les comportements individuels sont assez faciles à deviner (volonté de vendre ou d'acheter au meilleur prix, donc nécessité pour tous de minimiser les coûts d'échanges), leur agrégation pose sans doute quelques problèmes car, comme nous l'avons déjà signalé (cf § 1.1) les agents sont très loin d'être des "centres de décision autonomes", hypothèse qui est pourtant à la base de toute la théorie néoclassique (cf. Malinvaud "Leçons de théorie microéconomique" : p.3), comme de la réflexion "libérale" (cf. Peyrefitte : "Le mal français" : p. 200). On suppose de plus que le coût unitaire d'échange, qui ne dépend que des régions de départ et d'arrivée, exprime l'ensemble des termes à prendre en compte dans l'expression du profit (du point de vue du producteur) ou des coûts (du point de vue du consommateur). On conçoit donc l'importance que prend la construction d'un indice  $C_{ij}$  qui sera en fait un "coût généralisé d'échange" dans lequel on aura introduit un certain nombre de paramètres caractérisant le phénomène. La construction de cet indice  $C_{ij}$  dépend totalement du problème traité; pour le construire les techniques d'Analyse des données peuvent être utilisées.

On rappelle simplement ici que la résolution du programme linéaire de transport s'opère en général à l'aide de l'algorithme de FORD-FULKERSON (5) et qu'on obtient un nombre de solutions  $X_{ij}$  non nulles inférieur ou égal au nombre de contraintes, soit  $2n - 1$  (rappelons que les nombres donnés  $C_j$  et  $L_i$  sont liés par une relation :  $\sum_j C_j = \sum_i L_i$ ) : cette faiblesse est souvent sans gravité, car la plupart des tableaux d'échanges sont suffisamment bien "approchés" par la donnée de  $(2n - 1)$  termes sur les  $(n^2)$  termes théoriques.

Une autre particularité - signalée par M. FRECHET (8) - de la solution de ce programme est à noter. Si l'on considère un "rectangle" extrait du tableau solution :



l'un au moins de ses termes est nul. Ce qui signifie que les programmes de transport ne peuvent rendre compte de situations d'échanges où deux pays ( $i$  et  $k$ ) se trouveraient chacun fournisseur de deux autres pays ( $j$  et  $l$ ); cette restriction peut être gênante dans certains cas et il est bon d'avoir étudié si une telle situation peut se produire dans le phénomène d'échanges considéré avant de se lancer dans la recherche d'un "coût généralisé d'échanges" et la résolution du programme de transport correspondant.

## 1.3.2 - Modèle du commerce minimal

Soit le programme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min \sum_{ij} X_{ij}^2 & \\ \text{Sous : } \sum_j X_{ij} = L_i & \text{pour tout } i \\ \sum_i X_{ij} = C_j & \text{pour tout } j \\ X_{ij} \geq 0 & \text{pour tout } i \text{ et tout } j \end{array} \right.$$

On peut encore le concevoir sous l'angle d'un programme de transport où les coûts unitaires seraient directement proportionnels aux quantités transportées. Sous cette hypothèse - qui a heureusement peu de chance d'être réalisée - les agents économiques chercheraient évidemment à réduire les échanges à leur strict minimum : la solution de ce programme correspondra donc, à marges données, au minimum d'échanges nécessaires pour assurer l'équilibre global offre-demande. Ce résultat, quelque peu abstrait, du "commerce minimal" n'est cependant pas inutile par exemple pour étudier les limites "physiques" d'une politique protectionniste généralisée.

La résolution donne, si on ne considère pas la contrainte (S) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -2X_{ij} + \rho_i + \sigma_j = 0 & \text{pour tout } i \text{ et pour tout } j \\ \sum_j X_{ij} = L_i & \text{pour tout } i \\ \sum_i X_{ij} = C_j & \text{pour tout } j \end{array} \right.$$

d'où on extrait les solutions :

$$\rho_i = \frac{2 L_i}{n} \quad \text{pour tout } i$$

$$\sigma_j = \frac{2}{n} \left[ C_j - \frac{T}{n} \right] \text{ pour tout } j$$

et finalement :

$$X_{ij} = \frac{L_i}{n} + \frac{C_j}{n} - \frac{T}{n^2}$$

solution unique puisque la fonction à minimiser est convexe et les contraintes linéaires.

### 1.3.3 - De nouveau RAS...

Un programme du type suivant a été proposé (6, 10, 30) pour résoudre des problèmes d'estimation de tableau de contingence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{ij} \frac{(P_{ij} - \pi_{ij})^2}{\pi_{ij}} \\ \text{sous : } \sum_i X_{ij} = C_j \quad \text{pour tout } j \\ \sum_j X_{ij} = L_i \quad \text{pour tout } i \\ P_{ij} \geq 0 \quad \text{pour tout } i \text{ et tout } j \end{array} \right.$$

où  $p_{ij} = \frac{X_{ij}}{T}$  et où les  $\pi_{ij}$  sont les probabilités associées à des résultats d'observation sur un échantillon. On peut adapter cette méthode aux problèmes de prévision en prenant ici pour termes  $\pi_{ij}$  les probabilités associées à un tableau d'échanges connu ou des probabilités supposées assez voisines de celles recherchées, et obtenues éventuellement par extrapolation.

La fonction à minimiser est la distance du  $X^2$  (de centre la distribution des  $\pi_{ij}$ ) entre la distribution des  $P_{ij}$  et la distribution des  $\pi_{ij}$ .

Les solutions s'obtiennent par :

$$-\frac{2(p_{ij} - \pi_{ij})}{\pi_{ij}} + p_i + \sigma_j = 0$$

d'où :

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_{ij}}{T} &= \pi_{ij} (r_i + s_j) && \text{pour tout } i \text{ et tout } j \\ \sum_i x_{ij} &= C_j && \text{pour tout } j \\ \sum_j x_{ij} &= L_i && \text{pour tout } i \end{aligned} \right\}$$

La solution de ce programme peut encore s'obtenir par la méthode RAS

(6, 30) ou par une méthode similaire (10); on pouvait s'en douter, la quantité  $\sum p_{ij} \text{Log} \frac{p_{ij}}{\pi_{ij}}$  étant équivalente à  $\sum \frac{(p_{ij} - \pi_{ij})^2}{\pi_{ij}}$  quand

les  $p_{ij}$  sont proches des  $\pi_{ij}$ .

## 2 - UTILISATION DE L'ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES (AFC)

Jusqu'à présent, on a souvent interprété chacun des termes  $p_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_{..}}$  comme la probabilité pour une unité du produit considéré d'aller de la région  $i$  à la région  $j$ ; ceci vient du fait que le tableau d'échanges définit une mesure positive sur un produit cartésien : on peut réduire le tableau en sommant des lignes et des colonnes. La technique la mieux adaptée à la description des tableaux  $X_{ij}$  de ce type (tableaux de contingence) est l'analyse factorielle des correspondances (AFC). L'économiste qui envisage de construire un modèle de prévision a tout intérêt à utiliser cette technique afin de bien observer les données dont il dispose, c'est-à-dire les tableaux d'échanges correspondant aux années antérieures à la date à laquelle il désire effectuer la prévision.

Les analyses de correspondance effectuées sur les différents tableaux disponibles fournissent des images parlantes de l'ensemble des échanges. Regarder ces images et les comparer entre elles permet de dégager quelques idées sur le phénomène étudié.

Peut-on de plus utiliser ces images pour faire de la prévision quantitative ?

On sait que, connaissant les valeurs propres  $\lambda_1$  et les facteurs principaux  $\underline{a}_1$  et  $\underline{b}_1$  obtenus à partir d'une AFC, on peut reconstruire le tableau des probabilités  $P_{ij}$  associées aux  $X_{ij}$  à l'aide de la formule :

$$P_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j} \left( 1 + \sum_{l=1}^{n-1} \sqrt{\lambda_l} a_l^i b_l^j \right)$$



où les  $a_1^i$  et  $b_1^j$  sont les coordonnées des facteurs associées aux lois conditionnelles définies sur les lignes et les colonnes du tableau X, et où  $p_{i.}$  et  $p_{.j}$  désignent les probabilités marginales  $\frac{X_{i.}}{X_{..}}$  et  $\frac{X_{.j}}{X_{..}}$  ([CP] p. 442/460; [B2] p. 31/34, p. 158/159; [LF] p. 204/205, p. 239).

Cette formule permet d'envisager la prévision dans la mesure où certaines conditions, que nous allons préciser, sont respectées par les valeurs propres  $\lambda_1$  et les facteurs  $a_1$  et  $b_1$ .

## 2.1 - ETUDE DES STRUCTURES ET PROJECTION A L'AIDE DE L'AFC

### 2.1.1 - Recherche et projection du squelette.

Si on veut utiliser les résultats de l'analyse des correspondances pour faire de la prévision à l'horizon t, les marges (et donc le total) du tableau à prévoir étant connues, il est nécessaire de disposer des estimations des valeurs propres et des facteurs principaux à l'instant t.

Ne retenant en fait que les "p" premiers facteurs, on utilise la formule de reconstruction approchée :

$$\hat{p}_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j} \left( 1 + \sum_{l=1}^p \sqrt{\lambda_l} a_1^i b_1^j \right)$$

Tout en réduisant le nombre de termes à estimer, on espère éliminer le "bruit" et saisir ainsi "l'essentiel" du phénomène. On peut considérer que l'on élimine bien le bruit si, pour chacun des couples (i,j), les différences  $\hat{e}_{ij} = p_{ij} - \hat{p}_{ij}$  aux dates précédant l'instant t ont les propriétés statistiques classiques des erreurs ([CP] p. 332/335; [BR] p. 26/44) : la différence  $\hat{e}_{ij}$  à un instant donné peut être alors considérée comme représentant le "passager" à cet instant. Si on admet que le bruit n'est pas important, le nombre de facteurs conservés (qu'on pourra appeler "degré de complexité" de la structure du

tableau X) doit permettre, pour chaque tableau connu, de reconstituer les  $P_{ij}$  avec une bonne précision.

Ce but sera atteint si les "p" premières Valeurs propres contribuent à une large part de l'inertie totale. Plus précisément, le carré de la distance du  $X^2$  (de centre la distribution des  $p_{i.}$ ,  $p_{.j}$ ) entre les distributions des  $p_{ij}$  et des  $\hat{p}_{ij}$  est égal à :

$$d^2 = \sum_{ij} \frac{(p_{ij} - \hat{p}_{ij})^2}{p_{i.} p_{.j}} = \sum_{ij} \left( \sum_{l > p} \sqrt{p_{i.} p_{.j}} \sqrt{\lambda_l} a_l^i b_l^j \right)^2$$

Or les facteurs  $\underline{a}_1$  forment un système  $D_{P_I}$  - orthonormé ([CP] p. 437 et 379), c'est-à-dire vérifient :

$$D_{P_I} (\underline{a}_{1_1}, \underline{a}_{1_2}) = \sum_i p_{i.} a_{1_1}^i a_{1_2}^i = \delta_{1_1}^{1_2}$$

où  $\delta_{1_1}^{1_2}$  est le symbole de Kronecker.

De même les facteurs  $\underline{b}_1$  forment un système  $D_{P_J}$  - orthonormé et vérifient donc :

$$D_{P_J} (\underline{b}_{1_1}, \underline{b}_{1_2}) = \sum_j p_{.j} b_{1_1}^j b_{1_2}^j = \delta_{1_1}^{1_2}$$

Ce qui permet d'obtenir

$$d^2 = \sum_{l > p} \lambda_l$$

Ce qu'on peut encore exprimer sous la forme :

$$d^2 = (1 - I_p) \times \text{Tr}$$

où Tr désigne la somme de toutes les valeurs propres (trace) et  $I_p$  la part d'inertie expliquée par les "p" premières valeurs propres.

Ainsi, la reconstruction  $p_{ij}$  sera jugée de bonne qualité si les " $p$ " valeurs propres retenues sont assez élevées et expriment une forte part de l'inertie totale.

Les estimations à l'instant " $t$ " des " $p$ " valeurs propres et des facteurs principaux associés ne seront considérées comme satisfaisantes que si ces termes ont évolué dans le passé de façon régulière, ce qui est facile à contrôler. Ceci exige que les Valeurs propres obtenues pour une année donnée soient suffisamment éloignées entre elles, sous peine de voir leur classement changer d'une année sur l'autre. Si la structure est suffisamment stable les facteurs d'ordre " $l$ " auront une même signification aux différentes dates; on peut alors envisager de les projeter à l'horizon " $t$ ". Ceci interdit de retenir un "degré de complexité" " $p$ " trop grand car les petites valeurs propres ne sont jamais bien séparées. (un test peut être fait pour juger de l'égalité des Valeurs propres non retenues : cf. )

Les conditions "expliquer une large part de l'inertie" et "être suffisamment distinctes" que doivent satisfaire les " $p$ " premières Valeurs propres peuvent parfois être difficilement conciliables. Mais rien n'empêche l'économiste, qui domine maintenant ses données grâce aux descriptions issues de l'AFC, d'effectuer certaines transformations simples sur les tableaux dont il dispose, de façon à accroître la part d'inertie expliquée et à séparer les valeurs propres (tout en conservant l'essentiel de l'information contenue dans le tableau). L'extrapolation des Valeurs propres et des facteurs permet alors, à l'aide de la formule de reconstruction, d'obtenir un tableau sur lequel il suffit de procéder à la transformation inverse pour reconstituer le tableau d'échanges à l'horizon " $t$ ".

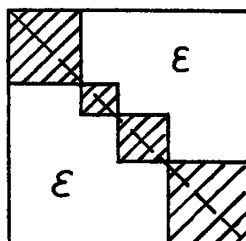
Les tableaux qui nous intéressaient plus particulièrement concernaient des échanges de produits agricoles entre régions françaises; les termes diagonaux de ces tableaux sont en général très importants relativement aux termes non diagonaux (l'autoconsommation l'emporte sur la distribution au niveau national). Or l'AFC appliquée sur des tableaux à diagonale chargée donne de nombreuses Valeurs propres élevées et peu différentes; si bien que dans l'exemple considéré on n'obtient une part d'inertie expliquée appréciable (de l'ordre de 90 %) qu'avec un grand nombre de Valeurs propres (11 sur un total de 15). Aussi s'est-on efforcé de rééquilibrer la matrice en réduisant le poids des termes diagonaux; plus précisément on a fait en sorte que le poids moyen d'un terme diagonal soit égal au poids moyen d'un terme non diagonal, en divisant chaque terme  $X_{ii}$  par le nombre :

$$k = (n - 1) \frac{D}{T - D}$$

où  $D = \sum_i X_{ii}$  et  $T = \sum_{i, j} X_{ij}$

Après transformation, la part d'inertie expliquée par les cinq premiers facteurs était de l'ordre de 90 % (pour chacun des tableaux d'échanges disponibles) contre environ 55 % avant repondération de la diagonale; on a de plus constaté que les Valeurs propres étaient mieux séparées.

Pour le type de tableaux qui nous intéresse (nombreuses Valeurs propres élevées) on peut généraliser la transformation précédente. Ayant réorganisé les lignes et les colonnes du tableau de façon à faire apparaître le long de la diagonale des pavés bien chargés :



On effectue la transformation consistant à repondérer non pas la diagonale, mais -éventuellement de façon différente- les pavés précédents.

D'autres modifications simples (i.e. réversibles) peuvent être envisagées pour optimiser les résultats fournis par l'AFC. On se souciera toujours de contrôler la permanence de la structure du squelette que l'on tente de dégager des échanges passés.

### 2.1.2 - Estimation du tableau à l'horizon "t"

En résumé, la méthode que nous venons de voir consiste à construire un squelette (les  $\hat{p}_{ij}$ ), le plus proche possible de la réalité, au moyen des images résumées que fournissent les AFC. La construction du squelette est contrôlée à tout moment par l'opérateur (choix du nombre de Valeurs propres, observation des résidus, transformations simples sur les tableaux d'échanges, extrapolation de l'essentiel après élimination du bruit, ...).

La formule de reconstruction fournit des termes  $\hat{p}_{ij}$ , donc le total "T" étant connu, des estimations des  $X_{ij}$  à l'horizon "t".

Les marges des estimations  $\hat{p}_{ij}$  ne sont pas les marges supposées connues  $L_i$  et  $C_j$ ; on procèdera au réajustement des marges au moyen de la méthode RAS (§ 1.2.2), qui fournit le tableau des  $\frac{X_{ij}}{T}$  le plus proche des  $\hat{p}_{ij}$  au sens du  $X^2$  (§. 1.3.3).

## 2.2 - RETOUR AUX METHODES STRUCTURELLES

On vient de voir que la méthode d'élaboration du squelette, qui consiste ici à dégager pour chaque année les "p" premiers facteurs principaux, tient compte

de la réalité des tableaux et non pas d'une hypothèse à-priori sur leur structure. Mais la formule de reconstruction de l'AFC peut également être utilisée en liaison avec des idées à-priori de structure telles que celles qui ont été introduites précédemment (§ 1.2). Cette formule permet d'obtenir des estimations à l'horizon "t" des différents coefficients rencontrés au paragraphe 1.2.1; elle peut en effet s'écrire sous les formes suivantes :

$$(1) \quad \frac{X_{ij}}{X_{..}} \sim \frac{L_i}{T} \frac{C_j}{T} \left( 1 + \sum_{l=1}^p \sqrt{\lambda_l} a_l^i b_l^j \right)$$

$$(2) \quad \frac{X_{ij}}{X_{i.}} \sim \frac{C_j}{T} \left( 1 + \sum_{l=1}^p \sqrt{\lambda_l} a_l^i b_l^j \right)$$

$$(3) \quad \frac{X_{ij}}{X_{.j}} \sim \frac{L_i}{T} \left( 1 + \sum_{l=1}^p \sqrt{\lambda_l} a_l^i b_l^j \right)$$

$$(4) \quad \frac{X_{ij} X_{..}}{X_{i.} X_{.j}} \sim 1 + \sum_{l=1}^p \sqrt{\lambda_l} a_l^i b_l^j$$

Dans chacun des cas on peut procéder sur les estimations des coefficients aux transformations qui en feront de "vrais" coefficients  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$ ,  $\delta_{ij}$  (cf. § 1.2.1); on vérifiera d'ailleurs au passage que les estimations obtenues ne sont pas très loin de vérifier les propriétés qui caractérisent ces coefficients (on contrôlera par exemple que les sommes en ligne des estimations des  $\frac{X_{ij}}{X_{.j}}$  sont voisines de 1, avant de les ramener effectivement à 1, etc... ).

La méthode de reconstruction à partir des AFC fournit donc des squelettes utilisables pour les diverses méthodes structurelles. Là encore, la construction du squelette est contrôlée pas à pas, sa validité peut être vérifiée à chaque stade de l'opération... seul "l'essentiel" est projeté à l'horizon "t".

BIBLIOGRAPHIE

Abréviations :

- . J.A.S.A. = Journal of the American Statistical Association
- . Genève 68 = "Applications of input-output Analysis", North-Holland Publ, 1972 (4ème Conférence Internationale sur les techniques input-output- Genève 1968).
- . R.I.I.S. = Revue de l'Institut International de Statistique.
- . CEPREL = Centre d'étude de la prospection économique à moyen et long terme.
- . GEPEI = Groupe d'Etude Prospectives sur les Echanges Internationaux.

---

Cette bibliographie n'épuise pas le sujet ; les auteurs cités ici proposent eux-mêmes d'imposantes références qui cependant s'éloignent en général des problèmes propres à la prévision, sauf (7).

---

- (1) A. BABEAU ; P.H. DERYCKE : "Problèmes techniques de planification".  
Sirey - Paris 1967 pp 239/321 (Ch, 3).
- (2) C. BERGE : "Théorie des graphes et ses applications".  
Dunod - Paris 1963 Ch. 8 ; Réseaux de transport.
- (3) H. CAUSSINUS : "Contribution à l'analyse statistique des tableaux de corrélation".  
Annales Fac. Sciences Univ. Toulouse - XXIX 1965 pp 77/182.
- (4) CHURCHMAN ; ACKOFF ; ARNOFF : "Eléments de recherche opérationnelle".  
Dunod - Paris 1960 Ch. 9 ; La programmation linéaire.
- (5) G.B. DANTZIG : "Applications et prolongements de la programmation linéaire".  
Dunod - Paris 1966 pp 195/210.
- (6) W.E. DEMING ; F.F. STEPHAN : "On a Least Squares Adjustment of a Sampled Frequency Table When the Expected Marginal Totals are Known".  
The Anals of Mathematical Statistics. II. n° 4  
1940 pp 427/444.
- (7) P.H. DERYCKE ; B. BOBE : "Projection des échanges extérieurs et balances des paiements".  
Economica - Paris 1975.

- (8) M. FRECHET : "Les tableaux de corrélation et les programmes linéaires".  
R.I.I.S. (25) n° 1/2 (1957) pp 23/40.
- (9) M. FRECHET : "Sur les tableaux dont les marges et les bornes sont données".  
R.I.I.S. (28) n° 1/2 (1960) pp 10/32.
- (10) D. FRIEDLANDER : "A technique for estimating a contingency table given  
the marginal totals".  
Journal Royal Stat. Soc. 1961 - Series A 123 - part 3  
pp 412/420.
- (11) R. FROMENT ; J. ZIGHERA : "La structure du commerce mondial, Analyse  
et projections. Application de la formule  
Leontief-Strout simplifiée."  
Conférence Européenne de la Société d'Economé-  
trie - Zürich 9.11/09/64.
- (12) R. FROMENT ; J. ZIGHERA : "Une méthode d'analyse de l'évolution et de pro-  
jection des structures et son application au  
commerce mondial".  
Cahiers d'Econométrie n° 8 (1965).
- (13) A. GABUS ; M. BÖRLIN ; C. VELAY : "Forecasting technical coefficients".  
Genève 68 pp 331/345.
- (14) C.T. IRELAND ; H.H. KU ; S. KULLBACK : "Symmetry and marginal homogeneity  
of an rXr contingency table".  
In J.A.S.A. (Déc. 69) - Vol. 64 -  
N° 328 - p 1 323 et sq.
- (15) C.I. IRELAND ; S. KULLBACK : "Minimum discrimination- Information estima-  
tion".  
Biometrics 24 (1968) pp 707/713.
- (16) C.T. IRELAND ; S. KULLBACK : "Contingency tables with given marginals".  
Biometrika 55 (1968) pp 179/188.
- (17) A. KOUEVI : "Essai d'application prospective de la méthode RAS au commer-  
ce international".  
Ronéoté CEPREL 23/03/65.
- (18) A. KOUEVI ; M. FLORENZANO : "Etude d'une méthode de projection du réseau  
des échanges internationaux".  
Ronéoté CEPREL 05/07/63.
- (19) S. KULLBACK : "Information theory and applications".  
Wiley - New York 1959 - Dover Publ. New York 1968.
- (20) W. LEONTIEF ; A. STROUT : "Multirégional input-output analysis".  
in T. BARNA (ed.) : "Structural Interdependance  
and Economic Development".  
Mc Millan - 1963.
- (21) W. LEONTIEF ; A. STROUT : "Multiregional input-output analysis"  
in W. LEONTIEF (ed.) : "Input-output Economics".  
Oxford Univ. Press. New York 1966 pp 223/257.



- (22) C. MACCIA ; P. MAITRE ; E. STEMMELEN : "Contamination par la chaîne alimentaire. Prédiction des échanges agricoles et calcul des doses délivrées. Le cas du blé en France".  
Rapport Commissariat Energie Atomique.  
à paraître Juin 1977.
- (23) B. MARIN-CURTOUD : "Sur les structures des tableaux d'échanges internationaux".  
Ronéoté CEPREL 22/05/64.
- (24) B. MARIN-CURTOUD : "Les modèles prévisionnels des réseaux d'échanges internationaux et leur structure".  
Ronéoté CEPREL 23/03/65.
- (25) J.C. MILLERON : "Recherche des extrêmes de fonctions".  
Annexe de : E. MALINVAUD : "Leçons de théorie microéconomique". Dunod - Paris 1975 pp 315/329.
- (26) A. NAGY : "Internal and international consistency of foreign trade estimations".  
Genève 1968 pp 190/207.
- (27) PAELINCK : "Recherches récentes en matière de modèles d'exploration".  
Cahiers d'Econométrie. (1965) n° 8.
- (28) K.R. POLENSKE : "The implementation of a multiregional input-output model for the United States".  
Genève 1968 pp 171/189.
- (29) K.R. POLENSKE : "A multiregional input-output model for the United States".  
Harvard Economic Research Project . EDA Report. Dec. 1970  
n° 21.
- (30) F.F. STEPHAN : "An iterative method of adjusting sample frequency tables when expected marginal total are know".  
Annals of Math. Stat. 13 n° 2 - 1942- pp 168/178.
- (31) R. STONE ; J.A.C. BROWN : "A long-term growth model for British economy".  
in : Europe's Future in Figures. North Holland  
Publ. - 1962 pp 287/310.
- (32) R. TEEKENS : "A note on the consistency of some international trade-flow models".  
ECE Geneva 1970.
- (33) H. THEIL : "Applied Economic Forecasting".  
North Holland Publishing c° - Amsterdam - 1966.
- (34) P. THIONET : "L'ajustement des résultats des sondages sur ceux des dénombrements".  
RIIS n° 27 - 1/3 - 1959 pp 8/25.
- (35) P. THIONET : "Sur le remplissage d'un tableau à double entrée".  
J.S.S.P. - n°<sup>s</sup> 10/11/12 - Oct. 1961 pp 331/345.

- (36) P. THIONET : "Sur la théorie des tableaux dont les marges sont connues".  
Note interne du Service des Etudes Economiques et Financières.  
(Ministère des Finances) 02/09/63.
- (37) P. THIONET : "Note sur un problème posé par la méthode R.A.S."  
idem - 03/09/63.
- (38) P. THIONET : "Note sur le remplissage d'un tableau à double entrée".  
J.S.S.P. n<sup>os</sup> 10/11/12 - Oct, 1964 pp 228/247.
- (39) P. THIONET : "Construction et reconstruction de tableaux statistiques".  
(INSEE - Nantes 23/25 Avril 1975- Journées d'étude sur les  
problèmes d'analyse et d'ajustement de tableaux statistiques).  
Université PARIS IX DAUPHINE. Travaux du Laboratoire de Sta-  
tistique.
- (40) M. BACHARACH : "Estimating non negative matrices from marginal data". Inter-  
national Economic Review Vol. 6 - n° 3 - Sept. 1965 - pp 294/310
- (41) J.P. BENZECRI : "L'analyse des données". Tome I  
"La taxinomie" Paris Dunod - 1973 p.

BIBLIOGRAPHIE : Analyse des données

- (CP) : F. CAILLIEZ et J.P. PAGES : "Introduction à l'analyse des données".  
1976 - SMASH (Société de Mathématiques Appliquées et de Sciences Humaines) - 9 rue Duban  
75016 PARIS
- (B) : J.P. BENZECRI et Collaborateurs : "L'analyse des données". 2 tomes. 1973.  
Dunod - PARIS.
- (B1) : Tome 1 : La Taxinomie
- (B2) : Tome 2 : L'analyse des correspondances
- (LF) : L. LEBART et J.P. FENELON : "Statistique et informatique appliquées"  
2ème édition . Dunod - PARIS.
- (BR) : J. BRENOT, P. CAZES, N. LACOURLY : "Pratique de la régression : qualité  
et protection". Cahiers du B.U.R.O.  
n° 23 - 1975 - PARIS