Séminaire Samuel.
Algèbre commutative

Jean-Pierre Olivier

Le foncteur $T^{-\infty}$. Globalisation du foncteur T

Séminaire Samuel. Algèbre commutative, tome 2 (1967-1968), exp. nº 9, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SAC_1967-1968__2__A9_0>

LE FONCTEUR $T^{-\infty}$. GLOBALISATION DU FONCTEUR T

par Jean-Pierre OLIVIER

I. Le foncteur $T^{-\infty}$.

Rappelons qu'un morphisme d'anneaux $f : A \to B$ est radiciel si, et seulement si, f_{red} est un épimorphisme de la catégorie des anneaux réduits. Le but de ce paragraphe est de construire un foncteur qui joue le jeu du foncteur T pour les morphismes radiciels.

1. Cas des anneaux de caractéristique $p \neq 0$.

Soit p un nombre premier. Un anneau A est dit de caractéristique p si $p.1 = 0$. Dans ce cas, pour tout entier n , l'application $x \longmapsto x^{p^n}$ est un endomorphisme de l'anneau A . Nous noterons Fr l'endomorphisme $x \longmapsto x^p$, c'est un morphisme radiciel. Pour que Fr soit injectif, il faut et il suffit que A soit réduit. Nous disons que A est parfait si Fr est un isomorphisme. Notons

$\underline{Ann}_p$ la sous-catégorie pleine de $\underline{Ann}$ dont les objets sont les anneaux de caractéristique p ;

$\underline{Ann\ parf}_p$ la sous-catégorie pleine de $\underline{Ann}$ dont les objets sont les anneaux parfaits de caractéristique p .

PROPOSITION 1. - *Le foncteur injection canonique* $\underline{Ann\ parf}_p \to \underline{Ann}_p$ *a un adjoint à gauche* $\underline{Parf}$.

Démonstration. - Etant donné un anneau A de caractéristique p , on considère le système inductif $(A_n , \varphi_{n+1,n})_{n\geq 1}$, où $A_n = A$ et où $\varphi_{n+1,n}(a) = a^p$ pour $a \in A$; alors la limite inductive a les propriétés qu'il faut pour être $Parf(A)$. Voici une démonstration plus explicite, probablement inutile.

Soit A un anneau réduit de caractéristique p , nous allons construire un anneau réduit parfait $A^{p^{-\infty}}$ et un morphisme $A \xrightarrow{h} A^{p^{-\infty}}$ tels que, pour tout morphisme $f : A \to B$ où B est parfait, il existe un, et un seul, morphisme $\overline{f} : A^{p^{-\infty}} \to B$ vérifiant $f = \overline{f} \circ h$.

Considérons le produit $A \times \underset{\sim}{N}$ ($\underset{\sim}{N}$ étant l'ensemble des entiers naturels) et le quotient $A \times \underset{\sim}{N}/R$, où R est la relation d'équivalence définie par " $(x , n)R(y , m)$ si, et seulement si, $x^{p^m} = y^{p^n}$ ". Sur $A \times \underset{\sim}{N}$ mettons les deux lois de composition

$$(x , n) + (y , m) = (x^{p^m} + y^{p^n} , n + m)$$

$$(x , n)(y , m) = (x^{p^m} y^{p^n} , n + m) \quad .$$

Ces deux lois sont compatibles avec R , et $A \times \underset{\sim}{N}/R$, muni des lois quotients, est un anneau $A^{p^{-\infty}}$. Notons h l'application composée de l'application $x \longmapsto (x , 0)$, de A dans $A \times \underset{\sim}{N}$, et de la surjection canonique $A \times \underset{\sim}{N} \xrightarrow{s} A^{p^{-\infty}}$ h est un monomorphisme d'anneaux.

On a $(s(x , n))^{p^n} = h(x)$, donc $A^{p^{-\infty}}$ est réduit, et h est radiciel. On a $(s(x , n + 1))^p = s(x , n)$, donc $A^{p^{-\infty}}$ est parfait.

Soit $f : A \to B$ un morphisme où B est parfait. Posons $\overline{f}(s(x , n)) = f(x)^{p^{-n}}$. On vérifie, sans douleur, que $\overline{f}$ est un morphisme d'anneaux tel que $\overline{f} \circ h = f$. D'autre part, un tel morphisme est unique, car h est radiciel.

COROLLAIRE. - <u>Le morphisme</u> $A \to \underset{\sim}{\mathrm{Parf}}\, A$ <u>est radiciel et de noyau</u> Nil A .

Désignons par

$\underset{\sim}{\mathrm{AP\ parf}}_p$ la sous-catégorie pleine de $\underset{\sim}{\mathrm{Ann}}$, dont les objets sont les anneaux absolument plats parfaits de caractéristique p ;

$\underset{\sim}{\mathrm{AP}}_p$ la sous-catégorie pleine de $\underset{\sim}{\mathrm{Ann}}$, dont les objets sont les anneaux absolument plats de car ctéristique p .

PROPOSITION 2. - <u>Le foncteur injection canonique</u> $\underset{\sim}{\mathrm{AP\ parf}}_p \to \underset{\sim}{\mathrm{Ann}}_p$ <u>a un adjoint à gauche</u> $T^{-\infty}$.

Ceci est une conséquence immédiate de la proposition 1 et du lemme suivant :

LEMME. - <u>Soit</u> $f : A \to B$ <u>un morphisme d'anneaux tel que</u> f <u>soit radiciel</u>, A <u>absolument plat et</u> B <u>réduit. Alors</u> B <u>est absolument plat</u>.

<u>Démonstration</u>. - Considérons Spec $B \xrightarrow{{}^a f}$ Spec A . C'est une injection continue ; Spec B est quasi-compact ; Spec A est séparé ; donc Spec B est compact.

COROLLAIRE. - <u>On a</u> $T^{-\infty} = \underset{\sim}{\mathrm{Parf}} \circ T$.

PROPOSITION 3. - *Soit* A *un anneau réduit de caractéristique* p $(\neq 0)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(1) *tout morphisme radiciel, de source* A *et de but réduit, est une surjection* ;

(2) *l'anneau* A *est absolument plat et parfait* ;

(3) *l'anneau* A *est absolument plat, et tous les corps résiduels de* A *sont parfaits*.

Démonstration.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : On a $A = T^{-\infty}(A)$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : La propriété " A est parfait" se conserve par quotient réduit.

(3) $\Longrightarrow$ (1) : Soit $f : A \to B$ un morphisme radiciel injectif, où B est réduit, on sait déjà que B est absolument plat. D'autre part, ${}^a f$ est un isomorphisme et, pour tout idéal premier p de B , $A_{f^{-1}(p)} \to B_p$ est un isomorphisme. Donc f est un isomorphisme. On conclut en remarquant que la propriété (3) se conserve par quotient.

Conséquence. - Soient A un anneau de caractéristique p et $f : A \to B$ un morphisme radiciel à but réduit. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrr] \arrow[dr] \arrow[ddd, "f"'] & & & T^{-\infty}(A) \arrow[ddd, "T^{-\infty}(f)"] \\
& B \times T^{-\infty}(A) \arrow[urr, "i"'] & & \\
& T^{-\infty}(B) \arrow[dl, "\bar{f}"] & & \\
B \arrow[rrr] & & & T^{-\infty}(B)
\end{tikzcd}$$

où i est injective et $\bar{f}$ surjective.

Problème. - Soit $f : A \to B$ un épimorphisme où A et B sont de caractéristique p , A est parfait et B réduit. Peut-on conclure de cette situation que B est parfait ?

On sait que la réponse est affirmative dans les cas suivants :

(1) f est surjective,
(2) f est plat,
(3) f est une localisation ponctuelle.

De la situation (3), on conclut le corollaire ci-dessous :

COROLLAIRE. - On a $T^{-\infty} = T \circ$ *Parf* .

2. Cas général.

PROPOSITION 4. - Soit $n \in P \cup \{0\}$ (où P désigne l'ensemble des nombres premiers). Le foncteur injection $\underset{\sim}{AP}_n \to \underset{\sim}{AP}$ a un adjoint à droite $\underset{\sim}{Par}_n$.

Démonstration. - Dans $T(\underset{\sim}{Z})$, notons $e(p)$ l'idempotent associé à p , si p est premier $\neq 0$. Appelons de même $e(p)$ l'idempotent associé à $p.1$ dans tout anneau absolument plat A : c'est-à-dire l'image du $e(p)$ originel par le morphisme $T(\underset{\sim}{Z}) \to A$. Dire que A est de caractéristique p revient à dire que $e(p) = 0$. Toute flèche de A dans un anneau absolument plat B de caractéristique p se factorise donc de manière unique par $A/e(p)A$, et ce dernier est un anneau absolument plat de caractéristique p . On a gagné pour $p \neq 0$. Dire que A est de caractéristique 0 revient à dire que $e(p) = 1$ pour tout nombre premier p . Soit alors I_0 l'idéal engendré par les $1 - e(p)$, et on a une solution au problème posé avec l'anneau A/I_0 .

Conséquences. - Si F est une partie finie de $P \cup \{0\}$, ou si F est le complémentaire dans $P \cup \{0\}$ d'une partie finie de P , alors le foncteur injection $\underset{\sim}{AP}_F \xrightarrow{\subset} \underset{\sim}{AP}$ a un adjoint à gauche $\underset{\sim}{Par}_F$ ($\underset{\sim}{AP}_F$ désignant la sous-catégorie pleine de $\underset{\sim}{AP}$ dont les objets sont les anneaux absolument plats dont les corps résiduels ont des caractéristiques appartenant à F). Si F est une partie finie de P , on a $A = \underset{\sim}{Par}_F(A) \times \underset{\sim}{Par}_{\complement F}(A)$, donc le foncteur $\underset{\sim}{Par}_F$ est plein. Pour tout nombre premier p , notons Fr_p le relèvement du fröbenius de $\underset{\sim}{Par}_p(A)$ qui est l'identité sur $\underset{\sim}{Par}_{\complement\{p\}}(A)$. Les Fr_p commutent deux à deux ; pour toute partie finie L de P , on note Fr_L le composé des Fr_p pour p parcourant L .

PROPOSITION 5. - Soit A un anneau réduit. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) tout morphisme radiciel de source A et de but réduit est une surjection ;

(2) l'anneau A est absolument plat, et tous les endomorphismes Fr_p sont des isomorphismes ;

(3) l'anneau A est absolument plat, et tous les corps résiduels de A sont parfaits.

La démonstration est calquée sur celle de la proposition 3. Un anneau A vérifiant les conditions de la proposition 5 sera dit parfait. Notons $\underset{\sim}{AP}\ \underset{\sim}{parf}$ la sous-catégorie pleine de $\underset{\sim}{AP}$ dont les objets sont les anneaux absolument plats parfaits.

PROPOSITION 6. - Le foncteur injection canonique $\underset{\sim}{\mathrm{AP}}\ \underset{\sim}{\mathrm{parf}} \xrightarrow{\subset} \underset{\sim}{\mathrm{Ann}}$ a un adjoint à gauche $T^{-\infty}$.

Indiquons la construction. Il suffit de construire $T^{-\infty}(A)$ pour A absolument plat. Si M et N sont deux parties finies de P , telles que $M \subseteq N$, on a un morphisme canonique de

$$\prod_{p\in M} \underset{\sim}{\mathrm{Parf}}_p(\underset{\sim}{\mathrm{Par}}_p\ A) \times \underset{\sim}{\mathrm{Par}}_{\complement M}(A) \qquad \text{dans} \qquad \prod_{p\in N} \underset{\sim}{\mathrm{Parf}}_p(\underset{\sim}{\mathrm{Par}}_p\ A) \times \underset{\sim}{\mathrm{Par}}_{\complement N}\ A \ .$$

Ceci forme un système inductif. On vérifie sans peine que la limite inductive de ce système répond à la question.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que le foncteur $T^{-\infty}$ a des propriétés identiques à celles du foncteur T lorsqu'on remplace le mot "épimorphisme" par le mot "morphisme radiciel".

Appendice

Quelques autres foncteurs

L'exposé oral étant moins soigné que sa projection écrite, on avait été obligé d'utiliser d'autres foncteurs que ceux introduits précédemment. On les utilise ici pour généraliser un résultat de PIERCE [6]. Indiquons qu'ils ont aussi quelque utilité pour étudier le spectre d'un produit d'anneaux.

Contemplons le dessin suivant :

(*)
$$\begin{tikzcd}
(\underset{\sim}{\mathrm{Ann}})^0 \arrow[d, "\mathrm{Spec}"'] \arrow[ddr, "\mathrm{Id}^0"] & \\
\underset{\sim}{\mathrm{Sp}} \arrow[d, "D"'] & \\
\underset{\sim}{\mathrm{St}} & (\underset{\sim}{\mathrm{Bool}})^0 \arrow[l, "\mathrm{Spec}"]
\end{tikzcd}$$

où

$\underset{\sim}{\mathrm{St}}$ désigne la catégorie des espaces compacts totalement discontinus avec, comme morphismes, les applications continues ;

$\underset{\sim}{\mathrm{Bool}}$ désigne la catégorie des anneaux booléens ;

Id désigne le <u>foncteur</u> qui, à tout anneau, fait correspondre l'anneau booléen de ses idempotents ;

$\underset{\sim}{\mathrm{Sp}}$ est un peu plus compliquée à décrire, c'est "l'image" dans la catégorie des espaces topologiques du foncteur Spec , c'est-à-dire [4] la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques X vérifiant :

1° X est un espace de Kolmogorov ;

2° X est quasi-compact ;

3° les ouverts quasi-compacts de X forment une base de la topologie ;

4° l'intersection de deux ouverts quasi-compacts de X est encore un ouvert quasi-compact ;

5° tout fermé irréductible a un point générique. Les morphismes de $\underset{\sim}{\mathrm{Sp}}$ sont les applications continues rétrocompactes (c'est-à-dire l'image réciproque d'un ouvert quasi-compact est un ouvert quasi-compact). Le foncteur D associe à tout objet de $\underset{\sim}{\mathrm{Sp}}$ son quotient par la partition des composantes connexes : on sait que l'on obtient ainsi un espace compact totalement discontinu ([2] et [5]). Ce foncteur D est adjoint à gauche du foncteur injection canonique $\underset{\sim}{\mathrm{St}} \xrightarrow{\subset} \underset{\sim}{\mathrm{Sp}}$, ce dernier a aussi un adjoint à droite.

LEMME. - <u>Le diagramme (*) commute (à isomorphisme naturel près)</u>.

Admettons le.

PROPOSITION 1. - <u>Le foncteur</u> D ∘ Spec <u>a un adjoint à droite</u> C(. , Z) .

<u>Démonstration</u>. - Donnons des indications :

1° Si X est un espace topologique, notons $C(X , \underset{\sim}{Z})$ l'anneau des fonctions continues de X dans $\underset{\sim}{Z}$.

Si X est compact totalement discontinu, X est canoniquement isomorphe à D ∘ Spec $C(X , \underset{\sim}{Z})$: en effet, les idempotents de $C(X , \underset{\sim}{Z})$ sont en correspondance biunivoque avec les ouverts et fermés de X .

2° L'anneau $C(X , \underset{\sim}{Z})$ est engendré, en tant que A-module, par ses idempotents, donc l'application $\mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{\mathrm{Ann}}}(C(X , \underset{\sim}{Z}) , A) \to \mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{\mathrm{St}}}(D \circ \mathrm{Spec}\, A , X)$ est injective.

3° Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{\mathrm{St}}}(D \circ \mathrm{Spec}\, A , X)$. L'application f définit une application de l'ensemble des idempotents de $C(X , \underset{\sim}{Z})$ dans l'ensemble des idempotents de A . On vérifie que cette application se prolonge en un morphisme d'anneaux.

Remarque. - La proposition précédente est encore valable sous sa forme relative. Elle donne alors une interprétation des anneaux $C(X, A)$. Leurs spectres et leurs localisés se calculent facilement.

COROLLAIRE. - Le foncteur $\mathrm{Spec} : (\underset{\sim}{AP})^0 \to \underset{\sim}{St}$ a un adjoint à droite $C(\cdot , T(\underset{\sim}{Z}))$.

Avant d'aborder une application, on a encore besoin d'un foncteur. Soit $\underset{\sim}{AP}\ \underset{\sim}{prem}$ la catégorie des anneaux absolument plats dont les corps résiduels sont premiers.

PROPOSITION 2.

1° Pour tout espace compact totalement discontinu, $C(X , T(\underset{\sim}{Z}))$ est un objet de $\underset{\sim}{AP}\ \underset{\sim}{prem}$.

2° Le foncteur injection canonique $\underset{\sim}{AP}\ \underset{\sim}{prem} \overset{\subset}{\dashrightarrow} \underset{\sim}{AP}$ a un adjoint à droite $\underset{\sim}{Prem}$.

Pour $\underset{\sim}{Prem}\ A$, il suffit de prendre l'image de $C(\mathrm{Spec}\ A , T(\underset{\sim}{Z}))$ dans A.

LEMME. - Pour tout nombre premier p, on a

$$\underset{\sim}{Par}_p \circ \underset{\sim}{Prem} = \underset{\sim}{Prem} \circ \underset{\sim}{Par}_p ,$$

et $\underset{\sim}{Par}_p \circ \underset{\sim}{Prem}(A)$ est l'ensemble des x de A vérifiant les équations $px = 0$ et $x^p = x$.

On a maintenant un outillage suffisant pour démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. - Si A est un anneau absolument plat libre, de cardinal $\aleph_n$ (c'est-à-dire sur un ensemble de cardinal $\aleph_n$), alors $\mathrm{gl\ dim}\ A = n + 1$

Démonstration. - On se ramène au cas booléen, PIERCE, dans [6], a démontré que :

"Si A est un anneau booléen libre, de cardinal $\aleph_n$, alors $\mathrm{gl\ dim}\ A = n + 1$ ".

Soient I un ensemble de cardinal $\aleph_n$, et $\alpha : I \to A$ une application faisant de A un anneau absolument plat libre sur I. Alors l'application composée $\beta : I \to A \to \underset{\sim}{Par}_2\ A = B$ fait de $\underset{\sim}{Par}_2\ A$ un anneau absolument plat, de caractéristique 2, libre sur I (les foncteurs considérés sont tous du bon côté).

Désignons par C l'anneau $\underset{\sim}{Prem}\ B$, c'est-à-dire l'ensemble des idempotents de B, et par i l'injection canonique de C dans B. L'application $\beta : I \to B$ définit une application $\gamma : I \to C$ qui fait correspondre à $\beta(i)$ l'idempotent associé dans B. Il existe donc un morphisme d'anneau, et un seul, $\overline{\gamma}$ de B dans C tel que $\overline{\gamma} \circ \beta = \gamma$. On a $\overline{\gamma} \circ i = 1_C$.

Montrons maintenant que $\gamma : I \to C$ fait de C un anneau booléen libre sur I.

Soit δ une application de I dans un anneau booléen D. Il existe un morphisme, et un seul, $\overline{\delta}$ de B dans D tel que $\overline{\delta} \circ \beta = \delta$. L'application $i \circ \overline{\delta}$ de C dans D verifie $i \circ \overline{\delta} \circ \gamma = \delta$ et c'est le seul morphisme de C dans D vérifiant cette égalité.

Comparons maintenant les dimensions :

$\mathrm{gl\,dim}\, A \leqslant n+1$, car $\mathrm{card}(A) \leqslant \aleph_n$ [6],

$\mathrm{gl\,dim}\, A \geqslant \mathrm{gl\,dim}\, B$, car $A \to B$ est un épimorphisme plat,

$\mathrm{gl\,dim}\, B \geqslant \mathrm{gl\,dim}\, C$, car $\overline{\gamma}$ est un épimorphisme plat,

$\mathrm{gl\,dim}\, C = n+1$, d'après le théorème de Pierce. D'où la conclusion.

II. Globalisation du foncteur T.

LEMME 1. - Soit $f : A \to B$ un épimorphisme. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_A} & T(A) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(f)} \\ B & \xrightarrow{i_B} & T(B) \end{array}$$

est co-cartésien.

Démonstration. - Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_A} & T(A) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f \otimes 1} \\ B & \xrightarrow[i_A \otimes 1]{} & B \otimes_A T(A) \end{array}$$

Le morphisme $f \otimes 1$ est un épimorphisme (obtenu par changement de base à partir d'un épimorphisme). Il est donc surjectif ($T(A)$ est absolument plat). On en conclut que $B \otimes_A T(A)$ est absolument plat.

Soit $g : B \to C$ un morphisme, où C est absolument plat. Il faut montrer qu'il existe un, et un seul, morphisme $h : B \otimes_A T(A) \to C$ tel que $h \circ (i_A \otimes 1) = g$. Il suffit de montrer l'existence d'un tel h, l'unicité est acquise, car $i_A \otimes 1$ est un épimorphisme. Mais il existe $k : T(A) \to C$, tel que $k \circ i_A = g \circ f$, d'où l'existence.

Conséquence. - Si B est une A-algèbre, $\widetilde{T(B)}$ est une $\tilde{A}$-algèbre sur $\operatorname{Spec} A$ telle que, pour tout ouvert affine U de $\operatorname{Spec} A$,

$$\Gamma(U , \widetilde{T(B)}) = T(\Gamma(U , \tilde{B})) = T(B) \otimes_A \Gamma(U) \quad .$$

Donc si X est un schéma, et si $\mathfrak{a}$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente, le préfaisceau, qui, à tout ouvert affine U de X , fait correspondre $T(\Gamma(U , \mathfrak{a}))$, est la restriction aux ouverts affines d'un faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$-algèbres.

Remarquons enfin qu'un faisceau A **d'anneaux sur un** espace topologique X vérifiant, pour tout ouvert U d'une base de la topologie de X , " $\Gamma(U , A)$ est absolument plat", le vérifie pour tout ouvert U de X .

Ceci montre la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - *Soient X un schéma, $\mathfrak{a}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente. Il existe une $\mathcal{O}_X$-algèbre $T(\mathfrak{a})$, dont les anneaux de sections sont des anneaux absolument plats, et un morphisme $\mathfrak{a} \xrightarrow{i} T(\mathfrak{a})$ tels que, pour toute $\mathcal{O}_X$-algèbre $\mathfrak{B}$, dont les anneaux de sections sont des anneaux absolument plats, et tout morphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbre $\mathfrak{a} \xrightarrow{f} \mathfrak{B}$, il existe un, et un seul, morphisme $\bar{f} : T(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{B}$ tel que $f = \bar{f} \circ i$. De plus, $T(\mathfrak{a})$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente.*

On voit sans peine, modulo des résultats de [1], que le faisceau défini sur les ouverts affines U de X par $U \to T(\Gamma(U , \mathfrak{a}))$ fait l'affaire.

Un cas particulier de ceci, nous donne la proposition ci-dessous.

PROPOSITION 2. - *Soit $\underline{\mathrm{Schc}}$ la catégorie des schémas dont les anneaux locaux sont des corps. Le foncteur injection canonique $\underline{\mathrm{Schc}} \to \underline{\mathrm{Sch}}$ a un adjoint à droite $\perp$.*

D'après les propriétés du spectre d'une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente, $\perp(X) = \operatorname{Spec}(T(\mathcal{O}_X))$ convient à merveille (cf. [3], II, 1.2.6 et 1.3.1).

Les propriétés de $\perp$ se lisent à partir de celle de T dans $\underline{\mathrm{Ann}}$ et de la construction du spectre d'une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente. Le foncteur $\perp$ ainsi construit est celui annoncé dans [3], IV, 1.9.16.

Signalons, pour terminer, qu'on lit, sans difficulté, sur $\perp(X)$ toutes les propriétés de la topologie constructible de X énoncées dans [3], IV, en particulier, la démonstration du théorème de Chevalley devient immédiate.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - Fondements de la géométrie algébrique. - Paris, Secrétariat mathématique, 1958 (Faculté des Sciences de Paris. Mathématiques approfondies, 1957/58).

[2] FERRAND (Daniel). - Communications orales.

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Eléments de géométrie algébrique. - Paris, Presses universitaires de France, 1960-1967 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32).

[4] HOCHSTER (Melvin). - Prime ideal structure to commutative rings, Thèse Sc. math., Princeton University, 1967.

[5] LAZARD (Daniel). - Disconnexités des spectres d'anneaux et des préschémas, Bull. Soc. math. France, t. 95, 1967, p. 95-108.

[6] PIERCE (G. B.). - The global dimension of boolean rings, J. of Algebra, New York, t. 7, 1967, p. 91-99.