Séminaire Samuel.
Algèbre commutative

Daniel Ferrand

Monomorphismes de schémas noethériens

Séminaire Samuel. Algèbre commutative, tome 2 (1967-1968), exp. n° 7, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=SAC_1967-1968__2__A7_0>

Séminaire P. SAMUEL
(Algèbre commutative)
Année 1967/68, n° 7

10, 17 et 24 janvier 1968

MONOMORPHISMES DE SCHÉMAS NOETHÉRIENS

par Daniel FERRAND

Table des matières

-:-:-:-

Tout ce qui suit peut être considéré comme un procédé pour déduire certaines propriétés d'un morphisme de schémas d'hypothèses faites sur son morphisme diagonal.

1. Généralités.

1.1. - Sont regroupés ici plusieurs résultats techniques constamment utilisés dans la suite ; un lecteur pressé est tout invité à sauter ces préliminaires ; qu'il en retienne cependant l'idée essentielle, d'ailleurs bien connue : soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas ; supposons que le morphisme diagonal $\Delta_f : X \to X \times_Y X$ vérifie une certaine propriété $(\underset{\sim}{P})$; pour prouver que f lui-même vérifie $(\underset{\sim}{P})$, on construira un morphisme $g : Z \to X$ tel que $f \circ g$ vérifie $(\underset{\sim}{P})$; d'après le lemme qui suit, g vérifira $(\underset{\sim}{P})$ et cela suffira, en général, pour pouvoir conclure que f lui aussi vérifie $(\underset{\sim}{P})$ (le cas le plus simple, et de loin le plus utilisé, est celui où $(\underset{\sim}{P})$ est la propriété d'être un isomorphisme).

LEMME 1.2. - *Soit $(\underset{\sim}{P})$ une propriété portant sur les morphismes de schémas, stable par composition et changement de base, et telle que tout isomorphisme vérifie $(\underset{\sim}{P})$. Soient, d'autre part,* $g : Z \to Y$ *et* $f : Y \to X$ *deux morphismes de schémas. Alors :*

(i) *Si* $f \circ g$ *et* Δ_f *vérifient* $(\underset{\sim}{P})$, g *vérifie* $(\underset{\sim}{P})$;

(ii) <u>Si</u> Δ_f <u>et</u> Δ_g <u>vérifient</u> ($\underset{\sim}{P}$), $\Delta_{f\circ g}$ <u>vérifie</u> ($\underset{\sim}{P}$) ;

(iii) <u>Si</u> $\Delta_{f\circ g}$ <u>vérifie</u> ($\underset{\sim}{P}$), Δ_g <u>vérifie</u> ($\underset{\sim}{P}$).

(i) g se factorise en $Z \xrightarrow{u} Z \times_X Y \xrightarrow{v} Y$; il suffit donc de montrer que u et v vérifient ($\underset{\sim}{P}$). Or, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Z \times_X Y \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "\Delta_f"] & Y \times_X Y \end{tikzcd}$$

est cartésien, et par hypothèse, Δ_f vérifie ($\underset{\sim}{P}$) ; il en est donc de même de u. D'autre part, $v : Z \times_X Y \to Y$ s'identifie au morphisme déduit de $f \circ g$ par le changement de base $Y \to X$; il vérifie donc ($\underset{\sim}{P}$).

(ii) Le morphisme diagonal $\Delta_{f\circ g} : Z \to Z \times_X Z$ se factorise en

$$Z \xrightarrow{\Delta_g} Z \times_Y Z \xrightarrow{w} Z \times_X Z \ ;$$

comme Δ_g vérifie ($\underset{\sim}{P}$) par hypothèse, il suffit de montrer qu'il en est de même de w ; or cela se déduit du fait que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Z \times_Y Z \arrow[r, "w"] \arrow[d] & Z \times_X Z \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "\Delta_f"] & Y \times_X Y \end{tikzcd}$$

est cartésien et de l'hypothèse que Δ_f vérifie ($\underset{\sim}{P}$).

(iii) Gardons les notations de (ii) ; comme Δ_f est une immersion ([2], EGA I, 5.3.9), c'est en particulier un monomorphisme ; il en est donc de même de w ; Δ_w est donc un isomorphisme, et par suite vérifie ($\underset{\sim}{P}$) ; comme $w \circ \Delta_g = \Delta_{f\circ g}$ vérifie par hypothèse ($\underset{\sim}{P}$), il en est de même de Δ_g, d'après (i).

1.3. - Soient A un anneau, et B une A-algèbre ; nous désignerons par $\mathfrak{J}_{B/A}$ l'idéal de $B \otimes_A B$, noyau de l'homomorphisme surjectif $B \otimes_A B \to B$ défini par $b \otimes c \to bc$. Rappelons qu'un système générateur de $\mathfrak{J}_{B/A}$ est formé des éléments $x \otimes 1 - 1 \otimes x$, où x parcourt un système générateur de la A-algèbre B ; on en déduit immédiatement le résultat suivant ([2], EGA IV, 1.4.3.1) :

LEMME 1.4. - <u>Soit</u> $f : X \to Y$ <u>un morphisme localement de type fini ; alors, le morphisme diagonal</u> $\Delta_f : X \to X \times_Y X$ <u>est localement de présentation finie.</u>

Nous utiliserons un résultat plus précis :

LEMME 1.5. - _Soient_ S _un schéma quasi-compact et quasi-séparé, et_ $f : X \to S$ _un morphisme quasi-compact et séparé. Supposons que_ f _se factorise en_

$$X \xrightarrow{h} T \xrightarrow{g} S \quad ,$$

_où_ h _est un monomorphisme et_ g _un morphisme affine. Alors, pour que le morphisme diagonal_ $\Delta_f : X \to X \times_S X$ _soit une immersion fermée de présentation finie, il faut et il suffit que_ g _se factorise en_

$$T \xrightarrow{h'} T' \xrightarrow{g'} S \quad ,$$

_où_ g' _est affine de type fini et le composé_ $h' \circ h : X \to T'$ _un monomorphisme._

L'hypothèse faite sur f est, en particulier, vérifiée si f est quasi-affine.

Utilisant le lemme 1.2 (ii), avec la propriété d'être de présentation finie, et le lemme 1.4, on voit que la condition est nécessaire.

Montrons qu'elle est suffisante : comme g est affine, $\mathcal{B} = g_*(\mathcal{O}_T)$ est une $\mathcal{O}_S$-Algèbre quasi-cohérente, et $T = \mathrm{Spec}(\mathcal{B})$; d'après [2] (EGA I, 9.6.6, et IV, 1.7.9), $\mathcal{B}$ est limite inductive de ses sous-$\mathcal{O}_S$-Algèbres quasi-cohérentes de type fini $\mathcal{B}_\lambda$; T est donc limite projective des S-schémas affines de type fini $T_\lambda = \mathrm{Spec}(\mathcal{B}_\lambda)$, et, pour tout λ , l'immersion fermée $u : X \times_T X \to X \times_S X$ se factorise en

$$X \times_T X \xrightarrow{v_\lambda} X \times_{T_\lambda} X \xrightarrow{u_\lambda} X \times_S X \quad ,$$

où u_λ et v_λ sont des immersions fermées ; enfin, les v_λ font de $X \times_T X$ une limite projective du système des $X \times_{T_\lambda} X$. Notons que les hypothèses faites sur S et f impliquent que $X \times_S X$ est quasi-compact ; d'autre part, Δ_f se factorise en

$$X \xrightarrow{\Delta_h} X \times_T X \xrightarrow{u} X \times_S X \quad ,$$

et, par hypothèse, Δ_h est un isomorphisme ; u est donc une immersion fermée de présentation finie ; enfin, l'assertion sera prouvée si l'on montre qu'il existe un indice λ tel que v_λ soit un isomorphisme ; on est donc ramené au lemme suivant:

LEMME 1.6. - _Soient_ Z_0 _un schéma quasi-compact, et_ Z_λ _une famille filtrante de sous-schémas fermés dont l'intersection (i. e. la limite projective) est_ Z ; _si l'immersion_ $Z \to Z_0$ _est de présentation finie, il existe un indice_ μ _tel que_ $Z = Z_\lambda$ _pour_ $\lambda \geqslant \mu$.

Comme Z_0 est quasi-compact, on est ramené au cas affine ; il suffit alors de constater l'évidence suivante : si un idéal $\mathfrak{a}$ de type fini d'un anneau A est réunion d'une famille filtrante d'idéaux $\mathfrak{a}_\lambda$, il existe μ tel que pour $\lambda \geqslant \mu$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\lambda$.

LEMME 1.7. - *Soient* $u : Z \to Y$ *une immersion fermée, et* $v : Y \to X$ *un monomorphisme plat quasi-compact. Si l'homomorphisme canonique* $\mathcal{O}_X \to (v \circ u)_*(\mathcal{O}_Z)$ *est injectif,* u *est un isomorphisme.*

En faisant le changement de base $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to X$ où $x \in v(Y)$, on se ramène au cas où v est un monomorphisme quasi-compact fidèlement plat, donc un isomorphisme; comme $v \circ u$ est quasi-compact et séparé, "la formation de l'image directe commute aux changements de base plats", on a donc encore une injection $\mathcal{O}_X \to (v \circ u)_*(\mathcal{O}_Z)$; mais comme v est un isomorphisme, $v \circ u$ est une immersion fermée ; en vertu de l'injection précédente, l'Idéal qui la définit est nul ; c'est donc un isomorphisme.

LEMME 1.8. - *Soient* $g : Z \to Y$ *et* $f : Y \to X$ *deux morphismes de schémas. Supposons que :*

(a) f *est séparé* ;

(b) $f \circ g$ *est un monomorphisme plat quasi-compact* ;

(c) $\mathcal{O}_Y \to g_*(\mathcal{O}_Z)$ *est injectif.*

Alors :

(i) g *est un monomorphisme plat quasi-compact* ;

(ii) *Pour que* f *soit un monomorphisme, il faut et il suffit que la projection* $p_1 : Y \times_X Y \to Y$ *soit un morphisme plat.*

En effet, g se factorise en $Z \xrightarrow{u} Z \times_X Y \xrightarrow{v} Y$; montrons que u est un isomorphisme : comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{u} & Z \times_X Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\Delta_f} & Y \times_X Y \end{array}$$

est cartésien, on déduit de (a) que u est une immersion fermée ; comme v se déduit de $f \circ g$ par le changement de base $Y \to X$, v est un monomorphisme plat quasi-compact, d'après (b) ; utilisant le lemme 1.7 et l'hypothèse (c), on voit que u est un isomorphisme. Cela prouve (i).

Montrons (ii) : il est clair que la condition est nécessaire puisque, si f est un monomorphisme, p_1 est même un isomorphisme. Réciproquement, supposons que le morphisme $p_1 : Y \times_X Y \to Y$ soit plat. Comme le diagramme

$$\begin{tikzcd} Z \times_X Y \arrow[r, "h"] \arrow[d] & Y \times_X Y \arrow[d, "p_1"] \\ Z \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

est cartésien, h vérifie la même propriété (c) que g. Posons $Z' = Z \times_X Y$ et $Y' = Y \times_X Y$. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "\Delta_f"] \\ Z' \arrow[r, "h"] & Y' \end{tikzcd}.$$

Comme, d'après ce qu'on a vu au début, u est un isomorphisme, $\mathcal{O}_{Y'} \to (h \circ u)_*(\mathcal{O}_Z)$ est injectif ; comme $h \circ u = \Delta_f \circ g$, $\mathcal{O}_{Y'} \to (\Delta_f \circ g)_*(\mathcal{O}_Z)$ est injectif, donc aussi $\mathcal{O}_{Y'} \to (\Delta_f)_*(\mathcal{O}_Y)$; mais, comme f est séparé, Δ_f est une immersion fermée ; c'est donc un isomorphisme, ce qui veut bien dire que f est un monomorphisme.

2. Epimorphismes d'anneaux locaux noethériens.

LEMME 2.1. - *Soit $f : A \to B$ un épimorphisme local d'anneaux locaux. Si A est un anneau local noethérien complet, f est surjectif.*

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A ; comme $A/\mathfrak{m}$ est un corps, l'épimorphisme $A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{m}B$ est un isomorphisme ([4], 1.2) ; pour montrer que f est surjectif, il suffit donc de montrer que B est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique ([1], chap. III, § 2 et 9, corollaire 3 de la proposition 11). Posons $J = \bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{m}^n B$ et $I = f^{-1}(J)$; comme B/J est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, l'homomorphisme composé $A/I \to B/IB \to B/J$ est un isomorphisme ; comme $A/I \to B/IB$ est un épimorphisme, on déduit du lemme 1.2 (i) que $B/IB \to B/J$ est un isomorphisme, donc aussi $A/I \to B/IB$; mais cela implique que $A/I^2 \to B/(I^2 B)$ est surjectif, donc que $B/(I^2 B)$ est noethérien et, par suite, séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique ; donc $J = IB = I^2 B$; mais IB est un idéal de type fini puisque A est noethérien, donc $IB = 0$ puisque B est local (lemme de Nakayama) ; donc B est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

Tous les résultats qui suivent sont des conséquences plus ou moins directes de ce lemme.

THÉORÈME 2.2. - Soient A un anneau local noethérien, B un anneau local, et $f : A \to B$ un épimorphisme local. Alors, B est A-isomorphe à un localisé d'une A-algèbre finie.

Désignons par $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, par A' le complété de A pour sa topologie $\mathfrak{m}$-adique, et par $f' : A' \to B' = A' \otimes_A B$ l'épimorphisme déduit de f par changement de base. Utilisant ([4], 1.2), on voit que $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}B$ est l'idéal maximal de B, et que $\mathfrak{n}' = \mathfrak{m}B'$ est l'unique idéal premier de B' tel que $f'^{-1}(\mathfrak{n}') = \mathfrak{m}A'$. L'homomorphisme $B' \to B'_{\mathfrak{n}'}$ étant un épimorphisme, l'homomorphisme composé $A' \to B' \to B'_{\mathfrak{n}'}$ est un épimorphisme local ; comme A' est complet, c'est une surjection (lemme 2.1) ; soit I son noyau ; comme $A'/I \to B'/IB'$ est un épimorphisme et que le composé $A'/I \to B'/IB' \to B'_{\mathfrak{n}'}$ est un isomorphisme, $B'/IB' \to B'_{\mathfrak{n}'}$ est un isomorphisme (lemme 1.2 (i)). Mais I est un idéal de type fini et $IB'_{\mathfrak{n}'} = 0$, il existe donc $t' \in B' - \mathfrak{n}'$ tel que $IB'_{t'} = 0$, donc tel que $B'_{t'} \to B'_{\mathfrak{n}'}$ soit injectif, et par suite bijectif puisque le composé $B' \to B'_{t'} \to B'_{\mathfrak{n}'}$ est surjectif. L'élément t' de $B' = A' \otimes_A B$ peut s'écrire sous la forme $\sum_i a'_i \otimes t_i$, où $t_i \in B$ et $a'_i \in A'$; soit C la sous-A-algèbre de type fini de B engendrée par les t_i ; comme $A \to A'$ est plat, l'homomorphisme $C' = A' \otimes_A C \to B'$ est injectif ; de plus, il est clair que $t' \in C'$. Considérons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] & \\
A' \arrow[r] & C' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d] & \\
 & C'_{t'} \arrow[r] & B'_{t'} \arrow[r, "\sim"] & B'_{\mathfrak{n}'}
\end{tikzcd} .$$

Comme $A' \to B'_{t'}$ est surjectif, $C'_{t'} \to B'_{t'}$ est surjectif, donc bijectif, d'après ce qui précède. Comme $C \to C'_{t'}$ est plat et $B \to B'_{\mathfrak{n}'}$ fidèlement plat, $B \to C$ est plat ([1], chap. I, § 3, prop. 7) ; mais $A \to B$ est un épimorphisme, $C \to B$ est donc un épimorphisme plat (lemme 1.2 (iii)) ; on en déduit que, si $\mathfrak{p} = \mathfrak{n} \cap C$, $C_{\mathfrak{p}} \to B$ est un isomorphisme ([4], 2.4) ; on a donc montré que B est isomorphe au localisé $C_{\mathfrak{p}}$ d'une A-algèbre de type fini C.

Comme $A \to C_{\mathfrak{p}}$ est un épimorphisme, $\mathrm{Spec}(C_{\mathfrak{p}}) \to \mathrm{Spec}(A)$ est injective ; en particulier, l'idéal premier $\mathfrak{p}$ est minimal parmi ceux qui contiennent $\mathfrak{m}C$; d'autre part, comme le composé $A/\mathfrak{m} \to C/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{n}$ est un isomorphisme, l'injection $C/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{n}$ est en fait un isomorphisme, donc $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de C, et par suite est "isolé dans sa fibre" $C/\mathfrak{m}C$; le théorème principal de Zariski ([2], EGA III, 4.4.7, ou [5]) montre qu'il existe une sous-A-algèbre finie $D \subset C$ telle que, si $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap D$, $D_{\mathfrak{q}} \to C_{\mathfrak{p}}$ soit un isomorphisme ; donc $D_{\mathfrak{q}} \to B$ est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque 2.3. - En raisonnant comme dans [2] (EGA IV, 18.4.6), on montrerait que B est isomorphe au localisé d'une A-algèbre finie monogène, et aussi au quotient d'une A-algèbre strictement essentiellement étale (loc. cit. 18.6.2).

COROLLAIRE 2.4. - *Soient* A *un anneau local noethérien,* B *un anneau local, et* $f : A \to B$ *un épimorphisme local. Alors :*

(i) B *est noethérien, et* $\dim(B) \leqslant \dim(A)$;

(ii) *Si* f *est injectif et* A *universellement caténaire* ([2], EGA IV, 5.6.2), $\dim(B) = \dim(A)$;

(iii) *Si* A *est hensélien* ([2], EGA IV, 18.5.8), f *est surjectif.*

(i) et (iii) sont des conséquences immédiates du théorème 2.2.

Démontrons (ii) : soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de A tel que

$$\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(A) \quad ;$$

comme f est injectif, $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$ pour un idéal premier minimal $\mathfrak{q}$ de B ; comme $\dim(B) \geqslant \dim(B/\mathfrak{q})$, il suffit, en vertu de (i), de montrer que

$$\dim(B/\mathfrak{q}) = \dim(A/\mathfrak{p}) \quad ;$$

on est donc ramené au cas intègre, et c'est alors une conséquence du théorème 2.2 et de [2] (EGA IV, 5.6.10).

PROPOSITION 2.5. - *Soient* A *un anneau local noethérien,* B *un anneau local, et* $f : A \to B$ *un homomorphisme local. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) B *est une* A*-algèbre essentiellement de type fini (i. e. est isomorphe à un localisé d'une* A*-algèbre de type fini)* ;

(ii) $B \otimes_A B$ *est un anneau noethérien* ;

(iii) *L'idéal* $\mathfrak{J}_{B/A}$ (1.3) *est de type fini.*

Les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) sont claires.

Montrons que (iii) $\Longrightarrow$ (i) : utilisant le lemme 1.5 avec $X = T = \mathrm{Spec}(B)$ et $S = \mathrm{Spec}(A)$, on voit qu'il existe une A-algèbre de type fini C, et un épimorphisme de A-algèbres $C \to B$; soient $\mathfrak{n}$ l'idéal maximal de B, et $\mathfrak{p}$ sa trace sur C ; $C_{\mathfrak{p}} \to B$ est un épimorphisme local, et $C_{\mathfrak{p}}$ est noethérien. D'après le théorème 2.2, B est isomorphe au localisé d'une C_p-algèbre finie ; on en déduit immédiatement que B est isomorphe à un localisé d'une A-algèbre de type fini.

PROPOSITION 2.6. - Soient A un anneau local noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, B un anneau local, et $f : A \to B$ un homomorphisme local. Pour que B soit isomorphe à un localisé d'une A-algèbre finie, il faut et il suffit que $\mathfrak{J}_{B/A}$ soit un idéal de type fini et que $B/\mathfrak{m}B$ soit une $A/\mathfrak{m}$-algèbre finie.

Les conditions sont évidemment nécessaires.

Montrons qu'elles sont suffisantes : d'après la proposition 2.5, il existe une A-algèbre de type fini C et un idéal premier $\mathfrak{p}$ de C tels que B soit A-isomorphe à $C_{\mathfrak{p}}$; comme, par hypothèse, $(C/\mathfrak{m}C)_{\mathfrak{p}} = B/\mathfrak{m}B$ est une $A/\mathfrak{m}$-algèbre finie, l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de C est isolé dans sa fibre $C/\mathfrak{m}C$: il est d'abord clair que $\mathfrak{p}/\mathfrak{m}C$ est un idéal premier minimal de $C/\mathfrak{m}C$; pour voir qu'il est maximal, il suffit de remarquer que le corps des fractions $k(\mathfrak{p})$ de $C/\mathfrak{p}$ étant de rang fini sur $A/\mathfrak{m}$, est en particulier entier sur $A/\mathfrak{m}$; l'anneau intègre $C/\mathfrak{p}$ est donc entier sur le corps $A/\mathfrak{m}$; c'est donc un corps. D'après le théorème principal de Zariski ([2], EGA III, 4.4.7, ou [5]), il existe une A-algèbre finie $D \subset C$ telle que, si $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap D$, $D_{\mathfrak{q}} \to C_{\mathfrak{p}}$ soit un isomorphisme ; d'où le résultat.

Remarque 2.7. - Ce résultat est à rapprocher de la forme locale du théorème principal de Zariski ; il est plus précis que ce dernier dans la mesure où les conditions sont nécessaires et suffisantes, mais il a le défaut majeur de n'être valable que sous des hypothèses noethériennes, alors que le théorème de Zariski est maintenant démontré sous des hypothèses tout-à-fait générales (cf. [2], EGA IV, 18.12.13, ou [5]).

3. Monomorphismes de schémas.

Les résultats présentés ici sont des "globalisations" de ceux du paragraphe précédent ; c'est surtout le critère (2.6) qui servira dans les démonstrations.

3.1. - Rappelons d'abord quelques définitions : soit $f : X \to S$ un morphisme quasi-compact et séparé ; on sait ([2], EGA I, 9.2.2) que $f_*(\mathcal{O}_X)$ est une $\mathcal{O}_S$-Algèbre quasi-cohérente ; par suite ([2], EGA II, 6.3.4), la fermeture intégrale $\mathcal{A}$ de $\mathcal{O}_S$ dans $f_*(\mathcal{O}_X)$ est aussi une $\mathcal{O}_S$-Algèbre quasi-cohérente, et, pour tout ouvert affine U de S, $\Gamma(U, \mathcal{A})$ est la fermeture intégrale de $\Gamma(U, \mathcal{O}_S)$ dans $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$; le S-schéma entier $S' = \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ s'appelle la fermeture intégrale de S dans X, et f se factorise en $X \to S' \to S$.

Rappelons aussi qu'un morphisme $f : X \to S$ est dit <u>plat en un point</u> $x \in X$, si l'homomorphisme $\mathcal{O}_{S,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est plat ; f est dit plat, s'il l'est en tout point.

THÉORÈME 3.2. - <u>Soient</u> S <u>un schéma localement noethérien, et</u> $f : X \to S$ <u>un morphisme quasi-compact satisfaisant les deux propriétés suivantes</u> :

(i) <u>Pour tout</u> $s \in S$, <u>le morphisme fibre</u> $X_s = X \times_S \operatorname{Spec}(k(s)) \to \operatorname{Spec}(k(s))$ <u>est entier</u> ;

(ii) <u>Le morphisme diagonal</u> $\Delta_f : X \to X \times_S X$ <u>est une immersion fermée de présentation finie</u>.

<u>Alors, si</u> S' <u>désigne la fermeture intégrale de</u> S <u>dans</u> X, <u>le morphisme canonique</u> $j : X \to S'$ <u>est un monomorphisme plat quasi-compact</u>.

<u>De plus, les conditions</u> (i) <u>et</u> (ii) <u>imposées à</u> f <u>sont vérifiées dans les trois cas suivants</u> :

(a) f <u>est un monomorphisme</u> ;

(b) <u>La (première) projection</u> $p_1 : X \times_S X \to X$ <u>est un morphisme fini</u> ;

(c) <u>Le morphisme diagonal</u> $\Delta_f : X \to X \times_S X$ <u>est une immersion à la fois ouverte et fermée</u>.

3.3. - Démontrons d'abord la dernière assertion : il est clair qu'un monomorphisme vérifie (i) et (ii).

Soit maintenant un morphisme quasi-compact $f : X \to S$ tel que sa première projection p_1 soit un morphisme fini. Pour prouver (i), on est ramené au cas où $S = \operatorname{Spec}(k(s))$, et il suffit de montrer que f est fini ; mais, comme on est sur un corps, f est alors fidèlement plat et quasi-compact, et cela est conséquence de [2] (EGA IV, 2.7.1 (xv)). Montrons (ii) : le morphisme composé $p_1 \circ \Delta_f$ est l'identité ; de plus, comme p_1 est fini, Δ_{p_1} est une immersion fermée de présentation finie (lemme 1.4) ; il suffit alors d'appliquer le lemme 1.2 (i) en prenant, pour $(\underset{\sim}{P})$, la propriété d'être une immersion fermée de présentation finie.

La démonstration du fait que (c) implique (i) et (ii) est un peu plus subtile et est laissée au lecteur.

LEMME 3.4. - <u>Sous les hypothèses du théorème</u>, f <u>vérifie la propriété</u> :

(i) <u>bis</u> <u>Pour tout</u> $s \in S$, <u>le morphisme fibre</u> $X_s \to \operatorname{Spec}(k(s))$ <u>est fini</u>.

On peut supposer que $S = \operatorname{Spec}(k(s))$, et il faut montrer que f est fini. Or, d'après (i), X est affine, et son anneau $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est une k-algèbre entière (ici $k = k(s)$). D'après l'hypothèse (ii) et le lemme 1.5 avec $X = T$, il existe une k-algèbre finie A' et un épimorphisme de k-algèbres $A' \to A$; mais A' est un anneau artinien, donc $A' \to A$ est surjectif ([7], prop. 7).

LEMME 3.5. - Soient $f : X \to S$ un morphisme quasi-compact et séparé, s un point de S , $T = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$, $p : T \to S$ le morphisme canonique, et

$$g = f_{(T)} : Y = X \times_S T \to T$$

le morphisme déduit de f par changement de base. Alors, si S' désigne la fermeture intégrale de S dans X , $S' \times_S T$ s'identifie à la fermeture intégrale de T dans Y .

On peut se ramener au cas où f est affine : en effet, comme f est quasi-compact et séparé, $f_*(\mathcal{O}_X)$ est une $\mathcal{O}_S$-Algèbre quasi-cohérente, donc, si $X' = \mathrm{Spec}(f_*(\mathcal{O}_X))$, le morphisme canonique $f' : X' \to S$ est affine ; comme p est plat, $X' \times_S T$ s'identifie à $\mathrm{Spec}(g_*(\mathcal{O}_Y))$ ([2], EGA IV, 21.12.3) ; enfin, par définition (3.1), la fermeture intégrale de S dans X (resp. de T dans Y) est la fermeture intégrale de S dans X' (resp. de T dans $X' \times_S T$) ; on peut donc supposer que $X = X'$, i. e. que f est affine.

On peut supposer de plus que S est affine : en effet, soit U un ouvert affine de S contenant s ; p se factorise en $T \to U \to S$, et il suffit d'appliquer [2] (EGA II, 6.3.4). Dans le cas affine, ce n'est autre que [1] (chap. V, § 1, prop. 16).

Pour démontrer le théorème 3.2, on va d'abord se ramener au cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau local noethérien hensélien.

Comme f est quasi-compact et $S' \to S$ entier, donc en particulier séparé, $j : X \to S'$ est quasi-compact ; il reste donc à montrer que c'est un monomorphisme plat ; il suffit, pour cela, de montrer que, pour tout $x \in X$,

(a) $\mathcal{O}_{S',j(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est un isomorphisme, et

(b) $j^{-1}(j(x)) = \{x\}$ ([6], 1.1).

En vertu du lemme 3.5, on peut supposer que S est un schéma local de point fermé $s = f(x)$.

Posons $A = \mathcal{O}_{S,s}$, et soit $T = \mathrm{Spec}({}^hA)$ le spectre du hensélisé de A . La $\mathcal{O}_S$-Algèbre $f_*(\mathcal{O}_X)$ est quasi-cohérente, donc de la forme $\widetilde{B}$ où B est une A-algèbre ; soit C la fermeture intégrale de A dans B , de sorte que $S' = \mathrm{Spec}(C)$.

Comme $A \to {}^hA$ est plat, si on désigne par $g : Y = X \times_S T \to T$ le morphisme déduit de f par changement de base, $g_*(\mathcal{O}_Y)$ est isomorphe au faisceau de ${}^hA$-Algèbre associé à $B \otimes_A {}^hA$; en outre, comme le morphisme $T \to S$ est normal ([2], EGA IV, 18.6.9 (ii)), $C \otimes_A {}^hA$ s'identifie à la fermeture intégrale de ${}^hA$ dans $B \otimes_A {}^hA$ ([2], EGA IV, 6.14.4). On est donc ramené à prouver ceci : soient $S = \mathrm{Spec}(A)$ le spectre d'un anneau local noethérien hensélien A, $f : X \to S$ un morphisme quasi-compact satisfaisant les propriétés (i) et (ii) du théorème 3.2, $j : X \to S'$ le morphisme canonique de X dans la fermeture intégrale S' de S dans X, et x un point de X tel que $f(x)$ soit le point fermé de S. Alors, $\mathcal{O}_{S',j(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est un isomorphisme, et $j^{-1}(j(x)) = \{x\}$.

Posons $Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$; on va montrer que le morphisme $Y \to X$ est un isomorphisme de Y sur une partie ouverte et fermée de X : comme $Y \to X$ est un monomorphisme, le morphisme composé $Y \to X \to S$ satisfait les propriétés (i) et (ii) du théorème 3.2 ; d'après le lemme 3.4 et la proposition 2.6, $\mathcal{O}_{X,x}$ est isomorphe au localisé d'une A-algèbre finie ; mais comme A est hensélien, une A-algèbre finie est un produit d'anneaux locaux ; $Y \to S$ est donc un morphisme fini. Comme S est noethérien, $Y \to S$ est de présentation finie ; comme, par hypothèse, Δ_f est de présentation finie, on déduit du lemme 1.2 (i) que $Y \to X$ est lui aussi de présentation finie ; comme c'est évidemment un monomorphisme plat, on déduit de [2] (EGA IV, 2.4.6) que c'est une immersion ouverte ; il reste donc à montrer que $Y \to X$ est un morphisme fermé ; or, comme $Y \to S$ est un morphisme fini, c'est en particulier un morphisme universellement fermé (COHEN-SEIDENBERG) ; comme, par hypothèse, Δ_f est une immersion fermée, c'est aussi un morphisme universellement fermé ; utilisant encore le lemme 1.2 (i), on en conclut que $Y \to X$ est fermé ; comme Y est affine, on a donc montré que $Y \to X$ identifie Y à une partie ouverte, fermée et affine de X.

Posons $B = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ et $Z = \mathrm{Spec}(B)$; comme Y est ouvert et fermé dans X, B est isomorphe au produit d'anneaux $\Gamma(Y, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(X - Y, \mathcal{O}_X)$; comme de plus Y est affine, $Y = \mathrm{Spec}(\Gamma(Y, \mathcal{O}_X))$; on voit donc que le morphisme composé $Y \to X \to Z$ est un isomorphisme de Y sur une partie ouverte et fermée de Z ; il existe donc un idempotent $t \in B$ tel que $B_t \to \mathcal{O}_{X,x}$ soit un isomorphisme. Comme $t^2 = t$, t est entier sur A ; donc t est dans la fermeture intégrale C de A dans B ; d'après [1] (chap. V, § 1, prop. 16), C_t est intégralement fermé dans B_t ; considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] & \\ & C_t \arrow[r] & B_t \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{O}_{X,x} \end{tikzcd} .$$

On a vu que $A \to \mathcal{O}_{X,x}$ est un homomorphisme fini ; il en est donc de même de $C_t \to \mathcal{O}_{X,x}$; mais $B_t \to \mathcal{O}_{X,x}$ est un isomorphisme, et C_t est intégralement fermé dans B_t ; donc $C_t \to \mathcal{O}_{X,x}$ est un isomorphisme. Par définition, $S' = \mathrm{Spec}(C)$, désignons par V l'ouvert (et fermé) $\mathrm{Spec}(C_t)$ de S' ; d'après ce qu'on a vu plus haut, $j^{-1}(V)$ n'est autre que la partie ouverte et fermée Y de X ; on en déduit, en particulier, que $j^{-1}(j(x)) = \{x\}$; cela achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE 3.6. - Soient X et S deux schémas intègres, et $f : X \to S$ un morphisme quasi-compact birationnel ; supposons que S soit localement noethérien et normal. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est plat et séparé ;

(ii) f est un monomorphisme ;

(iii) La première projection $p_1 : X \times_S X \to X$ est un morphisme plat, et f est séparé ;

(iv) La première projection $p_1 : X \times_S X \to X$ est un morphisme fini ;

(v) Le morphisme diagonal $\Delta_f : X \to X \times_S X$ est une immersion fermée de présentation finie, et, pour tout $s \in S$, le morphisme $X_s \to \mathrm{Spec}(k(s))$ est entier.

D'après le théorème 3.2, (ii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (v) et (v) $\Longrightarrow$ (i), puisque S est normal ; d'autre part, il est évident que (i) implique (iii) ; il suffit donc de montrer que (iii) implique (ii), mais cela a été fait en 1.8.

COROLLAIRE 3.7. - Soient S un schéma noethérien, et $f : X \to S$ un morphisme quasi-compact universellement fermé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est fini ;

(ii) La première projection $p_1 : X \times_S X \to X$ est un morphisme fini ;

(iii) Le morphisme diagonal est une immersion fermée de présentation finie, et, pour tout $s \in S$, $X_s = X \times_S \mathrm{Spec}(k(s))$ est affine.

Il est clair que (i) implique (ii) et (iii). Réciproquement, les hypothèses (ii) ou (iii) permettent d'appliquer le théorème 3.2 : cela a déjà été vu pour (ii) ; pour (iii), il suffit de montrer que les morphismes fibres $X_s \to \mathrm{Spec}(k(s))$ sont entiers ; or, ils sont affines et universellement fermés, ils sont donc entiers d'après [2] (EGA IV, 18.12.8). Utilisant le théorème 3.2, on voit que f se factorise en

$$X \xrightarrow{j} S' \xrightarrow{u} S ,$$

où j est un monomorphisme plat et u un morphisme entier, et, en particulier, affine. D'après le lemme 1.5, u se factorise donc en $S' \xrightarrow{j'} T \xrightarrow{v} S$, où v est fini et $j' \circ j : X \to T$ un monomorphisme ; comme v est en particulier séparé, Δ_v est universellement fermé ; comme par hypothèse, f est universellement fermé, on voit, en utilisant le lemme 1.2 (i) avec, pour $(\underset{\sim}{P})$, la propriété d'être universellement fermé, que $X \to T$ est un monomorphisme universellement fermé ; la conclusion résulte donc de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.8. - _Soient_ S _un schéma localement noethérien, et_ $f : X \to S$ _un morphisme de schémas._

(i) _Pour que_ f _soit une immersion fermée, il faut et il suffit que_ f _soit un monomorphisme universellement fermé_ ;

(ii) _Si, de plus,_ S _est réduit, pour que_ f _soit une immersion ouverte, il faut et il suffit que_ f _soit un monomorphisme universellement ouvert._

Il est clair que les conditions sont nécessaires. Pour mohtrer qu'elles sont suffisantes, on utilisera le lemme élémentaire suivant :

LEMME 3.8.1. - _Soient_ S _un schéma local, et_ $f : X \to S$ _un morphisme injectif. Supposons que_ f _est, soit fermé, soit ouvert et surjectif. Alors_ X _est un schéma local._

Dans les deux cas, il existe un point (et un seul) $x_0 \in X$ tel que $s_0 = f(x_0)$ soit le point fermé de S. Soient x un point de X, et $Y = \{\overline{x}\}$ son adhérence; on va montrer que $x_0 \in Y$: si f est fermé, $f(Y)$ est fermé dans S, donc $s_0 \in f(Y)$, et cela résulte de l'injectivité de f ; si f est ouvert, $f(X - Y)$ est un ouvert de S, distinct de S puisque f est injectif, donc $s_0 \notin f(X-Y)$, donc $x_0 \notin X - Y$. Autrement dit, x_0 est adhérent à tout point de X ; on en déduit d'abord que tout ouvert affine de X contenant x_0 est égal à X, donc que X est affine ; comme tout point de X est une générisation de x_0, X est même local de point fermé x_0.

Dans les deux cas envisagés, comme f est injectif, f établit un homéomorphisme de X sur le sous-espace $f(X)$ de S, qui est respectivement fermé ou ouvert. En vertu de [2] (EGA I, 4.2.2), il suffit de montrer que, pour tout $x \in X$, si $s = f(x)$, $\mathcal{O}_{S,s} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est surjectif dans le cas (i) et bijectif dans le cas (ii). Or, soient $S' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$, et $f' : X' = X \times_S S' \to S'$ le monomorphisme déduit de f par changement de base ; d'après le lemme 3.8.1, X' est un schéma local, et par suite s'identifie à $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$; de plus, dans le cas (ii), f' est surjectif ; comme $\mathcal{O}_{S,s}$ est réduit, on en déduit que $\mathcal{O}_{S,s} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif ; il suffit donc de montrer que dans les deux cas f' est une immersion fermée.

Or, soit S'' le spectre du hensélisé de $\mathcal{O}_{S,s}$; par le changement de base $S'' \to S'$, on obtient un monomorphisme $f'' : X'' = X \times_S S'' \to S''$; comme $S'' \to S'$ est fidèlement plat, il suffit de montrer que f'' est une immersion fermée ; mais, d'après le lemme 3.8.1, X'' est un schéma local ; c'est donc une conséquence du corollaire 2.4 (iii).

COROLLAIRE 3.9. - *Un monomorphisme quasi-compact* $f : X \to S$ *est quasi-affine dans les cas suivants* :

(i) f *est plat* ;
(ii) f *est de type fini* ;
(iii) S *est localement noethérien*.

Si f est plat, cela a été démontré dans [6] (prop. 1.5) ; si f est de type fini, cela est une conséquence immédiate de [2] (EGA IV, 18.12.12) ; enfin, si S est localement noethérien, c'est une conséquence de (i) et du théorème 3.2.

Nous ignorons si un monomorphisme quasi-compact est toujours quasi-affine.

4. Critères de platitude.

Indiquons d'abord, sans démonstration, un critère de platitude trop particulier pour être utilisable.

PROPOSITION 4.1. - *Soient* S *un schéma réduit localement noethérien et universellement caténaire, et* $f : X \to S$ *un monomorphisme affine. Pour que* f *soit plat, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées* :

(a) $f(X)$ *est stable par générisation dans* S ;
(b) *L'image par* f *de tout point maximal de* X *est un point maximal de* S ;
(c) f *est plat en tout point* $x \in X$ *tel que* $\dim(\mathcal{O}_{S,f(x)}) \leqslant 1$.

On peut montrer qu'aucune des hypothèses de cette proposition ne peut être supprimée ; le point faible de ce critère est la condition (c) ; il faut la remplacer par la condition analogue portant sur les localisés de profondeur $\leqslant 1$.

PROPOSITION 4.2. - *Soient* S *un schéma localement noethérien, et* $f : X \to S$ *un monomorphisme. Pour que* f *soit plat, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées* :

(i) *L'image par* f *de tout point maximal de* X *est un point maximal de* S ;
(ii) f *est plat en tout point* $x \in X$ *tel que* $\operatorname{prof}(\mathcal{O}_{S,f(x)}) \leqslant 1$.

Il est clair qu'un morphisme plat vérifie les conditions (i) et (ii). Réciproquement, on peut supposer que S est un schéma local dont le point fermé est dans $f(X)$, et il faut montrer qu'alors f est un isomorphisme ; soit S' le spectre du hensélisé de l'anneau local $\Gamma(S , \mathcal{O}_S)$; comme $S' \to S$ est fidèlement plat, il suffit de montrer que $f' : X' = X \times_S S' \to S'$ est un isomorphisme ; soit X'' le spectre de l'anneau local de X' en l'unique point de X' dont l'image est le point fermé de S' ; d'après le lemme 1.2 (i), il suffit même de prouver que le morphisme composé $f'' : X'' \to X' \to S'$ est un isomorphisme ; mais, en vertu du corollaire 2.4 (iii), f'' est une immersion fermée et, en utilisant [2] (EGA IV, 2.3.7 et 6.3.1), on voit que f'' vérifie les propriétés (i) et (ii) de l'énoncé ; on est donc ramené à démontrer ceci :

LEMME 4.2.1. - <u>Soient</u> A <u>un anneau local noethérien, et</u> $\mathfrak{a}$ <u>un idéal de</u> A <u>contenu dans un idéal premier minimal de</u> A ; <u>si</u> $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = 0$ <u>pour tout idéal premier</u> $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ <u>tel que</u> $\operatorname{prof}(A_{\mathfrak{p}}) \leqslant 1$, <u>alors</u> $\mathfrak{a} = 0$.

Posons $\mathfrak{b} = \operatorname{Ann}_A(\mathfrak{a})$; il faut montrer que $\mathfrak{b} = A$. Comme tout idéal premier minimal a un annulateur non nul, $\mathfrak{b} \neq 0$. Si $\mathfrak{b} \neq A$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \neq A$, puisque A est local ; soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A minimal parmi ceux qui contiennent $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$; comme $\mathfrak{a}.\mathfrak{b} = 0$, on déduit du théorème de Hartshorne ([3],et [2], EGA IV, 5.10.7, appliqué à $X = \operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}})$ et $Y = \{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\}$) que $\operatorname{prof}(A_{\mathfrak{p}}) \leqslant 1$; d'après l'hypothèse, on a donc $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = 0$, i. e. $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{b}$, ce qui est contraire au choix de $\mathfrak{p}$; donc $\mathfrak{b} = A$ et $\mathfrak{a} = 0$.

COROLLAIRE 4.3. - <u>Soient</u> S <u>un schéma intègre localement noethérien,</u> X <u>un schéma intègre, et</u> $f : X \to S$ <u>un monomorphisme birationnel. Désignons par</u> T <u>l'ensemble des</u> $t \in S$ <u>tels que le morphisme</u>

$$X \times_S \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{S,t}) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{S,t})$$

<u>soit plat. Alors, pour que</u> T <u>soit ouvert, il faut et il suffit que</u> T <u>contienne un ouvert non vide.</u>

Comme T contient toujours le point générique de S , il est non vide ; la condition est donc nécessaire.

Pour montrer qu'elle est suffisante, on peut supposer que S est affine d'anneau A ; si T contient un ouvert, il contient en particulier un ouvert de la forme $D(a)$ où a est un élément non nul de A ; comme A est intègre, a est A-régulier ; soit F le fermé de S , adhérence de l'ensemble fini $\operatorname{Ass}(A/aA) \cap (S - T)$. On va montrer que $F = S - T$, ce qui montrera bien que T est ouvert ; il est d'abord clair que $F \cap T = \emptyset$, puisque T est visiblement stable par générisation; soit U le schéma induit par S sur l'ouvert $S - F$; il faut montrer que le monomorphisme $f^{-1}(U) \to U$ induit par f est plat ; en vertu de la proposition 4.2, il suffit de montrer que tous les points $s \in U$ tels que $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{S,s}) \leq 1$ sont dans T ; or, c'est évident si $s \in D(a)$ et si $s \in V(a)$, l'idéal premier p de A correspondant à s contient a et est tel que $\mathrm{prof}(A_p) = 1$; donc

$$p \in \mathrm{Ass}(A/aA) \quad ;$$

comme, par hypothèse, $p \in U$, cela implique que p est dans T .

Nous ignorons si, sous les hypothèses de ce corollaire, l'ensemble T est toujours ouvert ; comme cette propriété jouera un rôle capital au paragraphe suivant, il nous faut exhiber des conditions sur S pour qu'il en soit ainsi.

DÉFINITION 4.4. - <u>Soient</u> A <u>un anneau local,</u> A' <u>son hensélisé,</u> A'' <u>son hensélisé strict</u> ([2], EGA IV, 18.6 <u>et</u> 18.8), <u>et</u> m' <u>et</u> m'' <u>les idéaux maximaux de</u> A' <u>et</u> A'' .

<u>On dira que</u> A <u>est quasi-unibranche, si</u> $\mathrm{Spec}(A') - \{m'\}$ <u>est connexe. On dira que</u> A <u>est géométriquement quasi-unibranche, si</u> $\mathrm{Spec}(A'') - \{m''\}$ <u>est connexe</u>.

<u>On dira qu'un schéma</u> S <u>est quasi-unibranche (resp. géométriquement quasi-unibranche) si, pour tout</u> $s \in S$, <u>l'anneau local</u> $\mathcal{O}_{S,s}$ <u>est quasi-unibranche (resp. géométriquement quasi-unibranche)</u>.

Il est clair que S est quasi-unibranche (resp. géométriquement quasi-unibranche), si, et seulement si, S_{red} l'est. Si S est réduit à un point, il est quasi-unibranche, puisque l'ensemble vide est connexe. Si un anneau local A est unibranche ([2], EGA 0_{IV}, 23.2.1), il est quasi-unibranche (resp. géométriquement quasi-unibranche) en vertu de [2] (EGA IV, 18.6.12).

Un anneau local noethérien A de dimension 1 est unibranche, si, et seulement si, il est quasi-unibranche, puisque le complémentaire du point fermé de $\mathrm{Spec}(A')$ est un ensemble fini discret.

Soit A un anneau local noethérien tel que $\mathrm{prof}(A) \geq 2$; alors A est géométriquement quasi-unibranche. En effet, comme $A \to A''$ est plat, $\mathrm{prof}(A'') \geq 2$, et il suffit d'appliquer le théorème de Hartshorne ([2], EGA IV, 5.10.7).

Le résultat suivant justifie partiellement l'introduction de ces notions dans l'étude des monomorphismes.

PROPOSITION 4.5. - <u>Soit</u> S <u>un schéma localement noethérien réduit et quasi-unibranche. Alors, pour qu'un monomorphisme</u> $f : X \to S$ <u>soit plat, (il faut et)</u>

il suffit que l'image par f *de tout point maximal de* X *soit un point maximal de* S .

Remarque 4.6. - Il est possible que la réciproque soit vraie ; pour la démontrer, il faudrait pouvoir résoudre la question suivante : si A est un anneau local noethérien et A' son hensélisé, quels sont les épimorphismes $A' \to B'$ qui "proviennent" d'un épimorphisme local $A \to B$? Nous ignorons même si l'assertion suivante est vraie : soit A un anneau local noethérien intègre de dimension 1 tel que tout épimorphisme local injectif $A \to B$ soit un isomorphisme. Alors A est unibranche.

Démonstration de la proposition 4.5. - On peut supposer que S est un schéma local dont le point fermé est dans $f(X)$, et que f est plat en tout point de $X - f^{-1}(s)$; passant au hensélisé, on peut même supposer que S est le spectre d'un anneau local hensélien, et il faut montrer que f est alors un isomorphisme ; en raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 4.2, on est ramené à prouver ceci : soit A un anneau local noethérien tel que l'ouvert U complémentaire du point fermé de $\operatorname{Spec}(A)$ soit connexe ; si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A tel que $V(\mathfrak{a}) \cap U \neq \emptyset$ et tel que $\mathfrak{a}_p = 0$ pour $p \in V(\mathfrak{a}) \cap U$, alors $\mathfrak{a} = 0$.

Il suffit de montrer que $U' = V(\mathfrak{a}) \cap U$ est ouvert dans U, puisque U est connexe. Or, soit $\mathfrak{b} = \operatorname{Ann}_A(\mathfrak{a})$, et $U'' = V(\mathfrak{b}) \cap U$; comme $\mathfrak{a}.\mathfrak{b} = 0$, $U = U' \cup U''$; d'autre part, si $p \in U'$, $\mathfrak{a}_p = 0$, donc $p \notin U''$; on en déduit que $U' \cap U'' = \emptyset$, donc que $U' = U - U''$ est ouvert.

PROPOSITION 4.7. - *Soient* A , B *deux anneaux locaux noethériens tels que* $\dim(A) \geqslant 1$, *et* $f : A \to B$ *un homomorphisme local tel que le morphisme correspondant* $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ *soit réduit. Alors* :

(i) *Pour que* A *soit géométriquement quasi-unibranche, il faut et il suffit que* B *le soit* ;

(ii) *Supposons que le corps résiduel de* B *soit une extension primaire de celui de* A ; *alors* A *est quasi-unibranche si, et seulement si,* B *l'est.*

L'hypothèse " $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ est réduit" signifie que f est plat et que, pour tout idéal premier p de A et toute extension k de $k(p)$, l'anneau $B \otimes_A k$ est réduit ([2], EGA , 4.6 et 6.8). D'autre part, une extension $k \to k'$ est dite primaire, si k est la plus grande extension algébrique séparable contenue dans k' .

Nous ne démontrons pas cette proposition ; c'est une conséquence assez facile d'un délicat théorème démontré dans [2] (EGA IV, 18.9.7).

COROLLAIRE 4.8. - Soit A un anneau noethérien tel que $\operatorname{Spec}(A)$ soit quasi-unibranche (resp. géométriquement quasi-unibranche). Alors, $\operatorname{Spec}(A[T])$ est quasi-unibranche (resp. géométriquement quasi-unibranche).

L'assertion respée se déduit immédiatement de la proposition 4.7 (i). Pour démontrer l'autre, il faut remarquer qu'on peut supposer que A est local réduit et qu'il suffit de montrer que les localisés B de $A[T]$, tels que $A \to B$ soit un homomorphisme local et que $\operatorname{prof}(B) \leqslant 1$, sont quasi-unibranches ; or, soient m l'idéal maximal de A, et $k = A/m$ son corps résiduel ; on sait que

$$\operatorname{prof}(B) = \operatorname{prof}(A) + \operatorname{prof}(B/mB) \quad ;$$

donc, si $\operatorname{prof}(B/mB) = 1$, $\operatorname{prof}(A) = 0$, donc A est un corps puisque A est réduit ; mais alors B est un localisé d'un anneau de polynômes sur un corps, donc un anneau intégralement clos et, en particulier, un anneau quasi-unibranche. Si $\operatorname{prof}(B/mB) = 0$, B/mB, qui est un localisé de $k[T]$, est un corps, donc est isomorphe à $k(T)$; comme c'est une extension primaire de k, on peut appliquer la proposition 4.7 (ii).

PROPOSITION 4.9. - Pour un anneau noethérien intègre A, soit $(\underset{\sim}{U}(A))$ la propriété suivante : " $\operatorname{Spec}(A)$ possède un ouvert non vide qui est un schéma géométriquement quasi-unibranche".

(i) Soit A un anneau intègre noethérien vérifiant $(\underset{\sim}{U}(A))$; alors il en est de même de tout anneau de fractions $S^{-1}A$ et de toute A-algèbre de type fini B intègre et contenant A.

(ii) Soit A un anneau intègre noethérien de corps des fractions K, tel qu'il existe une A-algèbre finie $B \subset K$ telle que $\operatorname{Spec}(B)$ soit géométriquement unibranche. Alors A vérifie $(\underset{\sim}{U}(A))$. En particulier, un anneau local noethérien intègre et un anneau japonais vérifient $(\underset{\sim}{U})$.

Démontrons (i) : soit B une A-algèbre de type fini intègre et contenant A ; quitte à se restreindre à un ouvert de $\operatorname{Spec}(A)$, on peut supposer que $\operatorname{Spec}(A)$ est géométriquement quasi-unibranche, et qu'il existe des éléments $t_i \in B$, algébriquement indépendants sur A, tels que B soit une $A[t_1, \ldots, t_n]$-algèbre finie ([1], chap. V, § 3, corollaire 1 du théorème 1) ; utilisant le corollaire 4.8, on est donc ramené à prouver l'assertion lorsque de plus B est finie sur A. Soient K le corps des fractions de A, L celui de B, K' la fermeture séparable de K dans L, et $A' = B \cap K'$. Montrons d'abord que A' vérifie $(\underset{\sim}{U})$; comme K' est une extension finie séparable de K, on peut, en se restreignant à un ouvert convenable de $\operatorname{Spec}(A)$, supposer que A' est un revètement étale de A ;

il suffit alors d'appliquer la proposition 4.7 (i). Pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer que $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A')$ est un morphisme fini radiciel et surjectif, donc un homéomorphisme universel.

L'assertion générale de (ii) est à peu près triviale ; celle qui concerne un anneau local noethérien intègre est une conséquence immédiate de [2] (EGA 0_{IV}, 23.2.5).

Remarque 4.10. - Compte tenu de la proposition 4.5, si A est un anneau noethérien intègre vérifiant $(\underset{\sim}{U})$, et si $f : A \to B$ est un épimorphisme injectif où B est intègre, alors f est "génériquement" plat ; cette propriété simplifie beaucoup le critère de finitude du paragraphe suivant. Nous ne connaissons pas d'anneaux noethériens intègres qui ne vérifient pas $(\underset{\sim}{U})$; le contre-exemple le plus simple serait celui d'un anneau noethérien intègre A tel que $\dim(A) = 1$, possédant une infinité d'idéaux premiers $\mathfrak{m}$ tels que $A_{\mathfrak{m}}$ ne soit pas géométriquement unibranche.

5. Critères de finitude.

THÉORÈME 5.1. - *Soient S un schéma noethérien, $f : X \to S$ un morphisme quasi-compact, $(X_i)_{i\in I}$ la famille des composantes irréductibles de X. Pour tout i, désignons par S_i le sous-schéma fermé intègre de S, image fermée de X_i par f, et par $f_i : X_i \to S_i$ le morphisme déduit de f.*

Pour que f se factorise en

$$X \xrightarrow{j} T \xrightarrow{u} S ,$$

où j est un monomorphisme plat quasi-compact et u un morphisme fini, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) Pour tout $s \in S$, le morphisme fibre $X_s = X \times_S \mathrm{Spec}(k(s)) \to \mathrm{Spec}(k(s))$ est entier ;

(ii) Le morphisme diagonal $\Delta_f : X \to X \times_S X$ est une immersion fermée de présentation finie ;

(iii) Les composantes irréductibles X_i sont en nombre fini ;

(iv) Pour tout i, il existe un ouvert non vide U_i de S_i tel que la restriction de f_i à $f_i^{-1}(U_i)$ soit un morphisme plat.

De plus, la condition (iv) est conséquence de (i) et (ii) si, pour tout i, S_i possède un ouvert non vide sur lequel il induit un schéma quasi-unibranche (définition 4.4).

Démontrons d'abord la dernière assertion : on peut supposer que X et S sont intègres et f dominant ; si f vérifie (i) et (ii), d'après le théorème 3.2 et le lemme 1.5, f se factorise en $X \to T \to S$, où $X \to T$ est un monomorphisme et $T \to S$ un morphisme fini qu'on peut supposer dominant ; d'après la proposition 4.9 (i), en se restreignant à un ouvert assez petit de S, on peut supposer que T est géométriquement quasi-unibranche et que $T \to S$ est plat ; mais, d'après la proposition 4.5, le monomorphisme $X \to T$ est alors plat ; d'où le résultat.

Démontrons que les conditions sont nécessaires : si f se factorise par un monomorphisme plat et un morphisme fini, ses fibres sont des morphismes finis, et en particulier entiers, d'où (i) ; la condition (ii) est conséquence du lemme 1.5. Comme u est fini et S noethérien, T est noethérien ; en particulier, T n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles ; comme j est un monomorphisme plat, on en déduit que X a un nombre fini de composantes irréductibles, d'où (iii). Pour tout i, soit T_i l'image fermée de X_i par j ; comme j est un monomorphisme plat quasi-compact, X_i est isomorphe à $X \times_T T_i$ (lemme 1.7), donc $X_i \to T_i$ est plat ; comme f_i se factorise en $X_i \to T_i \to S_i$, où $T_i \to S_i$ est fini dominant, il est clair qu'au voisinage du point générique de S_i, $T_i \to S_i$ est plat, donc aussi f_i.

5.2. - Pour démontrer que les conditions sont suffisantes, on procèdera par étapes. Fixons d'abord les notations.

D'après le théorème 3.2, les hypothèses (i) et (ii) impliquent que f se factorise en

$$X \to S' \to S \quad ,$$

où $j : X \to S'$ est un monomorphisme plat quasi-compact et $v : S' \to S$ un morphisme entier. La $\mathcal{O}_S$-Algèbre $v_*(\mathcal{O}_{S'})$ est donc quasi-cohérente et entière ; en particulier, elle est réunion de la famille filtrante croissante de ses sous-$\mathcal{O}_S$-Algèbres quasi-cohérentes de type fini $\mathcal{S}_\lambda$; si $S_\lambda = \mathrm{Spec}(\mathcal{S}_\lambda)$, v se factorise en $S' \to S_\lambda \to S$, où $u_\lambda : S_\lambda \to S$ est fini, et les morphismes entiers surjectifs $v_\lambda : S' \to S_\lambda$ font de S' une limite projective du système des S_λ. On va montrer qu'il existe un indice λ tel que le morphisme composé

$$j_\lambda = v_\lambda \circ j : X \to S' \to S_\lambda$$

soit un monomorphisme plat quasi-compact.

1° <u>Réduction au cas où</u> f <u>est un monomorphisme</u> : D'après le lemme 1.5, il existe un indice λ tel que j_λ soit un monomorphisme ; il suffit donc de prouver que j_λ vérifie (iv) ; c'est une conséquence immédiate du lemme suivant :

LEMME 5.2.1. - Soient X, Y, et Z trois schémas intègres, $j : X \to Y$ un monomorphisme dominant, et $u : Y \to Z$ un morphisme fini surjectif. Supposons que Z soit noethérien et que le composé $f = u \circ j : X \to Z$ soit plat. Alors il existe un ouvert non vide W de Z tel que le monomorphisme $f^{-1}(W) \to u^{-1}(W)$ déduit de j soit plat.

Comme u est fini et que la question est locale sur Z, on peut supposer que Y et Z sont affines, soit $Z = \mathrm{Spec}(A)$ et $Y = \mathrm{Spec}(B)$; A est donc un anneau intègre noethérien, et B une A-algèbre finie intègre contenant A ; soient K et L les corps des fractions de A et B respectivement, K' la clôture séparable de K dans L, et $A' = B \cap K'$. Comme A est noethérien, le schéma $Z' = \mathrm{Spec}(A')$ est fini sur A, et u se factorise en $Y \to Z' \to Z$. Comme K' est une extension séparable de K, on peut, en se restreignant à un ouvert W de Z, supposer que $Z' \to Z$ est non ramifié ; par suite, le morphisme diagonal de $Z' \to Z$ est une immersion ouverte ([2], EGA IV, 17.4.2), donc un morphisme plat ; en appliquant le lemme 1.2 (i) aux morphismes $X \to Z'$ et $Z' \to Z$, on voit que $X \to Z'$ est plat. D'autre part, on vérifie tout-de-suite que $Y \to Z'$ est radiciel. Quitte à remplacer Z par Z', on peut donc supposer que $u : Y \to Z$ est un morphisme fini radiciel et surjectif, donc un homéomorphisme universel. Montrons qu'alors $X \to Y$ est plat. Par un changement de base appropriée, on peut supposer que Z est le spectre d'un anneau local noethérien hensélien dont le point fermé est l'image d'un point $x \in X$. Comme $Y \to Z$ est un homéomorphisme fini, Y est un schéma local dont l'anneau est lui aussi hensélien. D'autre part, comme $X \to Y$ est un monomorphisme, il suffit de montrer que le monomorphisme composé

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to X \to Y$$

est un isomorphisme. Bref, on peut se ramener au cas où X, Y et Z sont des schémas locaux. Notons qu'alors le composé $X \to Y \to Z$ est même fidèlement plat, donc surjectif ; comme $Y \to Z$ est bijectif, $X \to Y$ est surjectif ; mais, comme Y est le spectre d'un anneau local hensélien noethérien et $X \to Y$ un monomorphisme, $X \to Y$ est une immersion fermée (corollaire 2.4 (iii)) surjective ; comme Y est réduit, c'est un isomorphisme ; d'où le résultat.

2° Réduction au cas où les S_i sont les composantes irréductibles de S : Remarquons d'abord que $j : X \to S'$ établit une bijection entre les points maximaux de X et ceux de S' ; comme j est plat, il transforme point maximal en point maximal, comme c'est un monomorphisme, c'est une injection ; enfin, comme par définition de S', $\mathcal{O}_{S'} \to j_*(\mathcal{O}_X)$ est injectif, tout point maximal de S' est dans $j(X)$ (localiser en ce point maximal, et utiliser le fait que la formation de l'image directe commute aux changements de base plats).

Il suffit donc de montrer que, pour un λ assez grand, $v_\lambda : S' \to S_\lambda$ établit une bijection entre les points maximaux de S' et ceux de S_λ ; or, comme S est quasi-compact, on peut supposer que S est affine, et il reste à prouver ceci :

LEMME 5.2.2. - Soient A un anneau, et B une A-algèbre n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux. Il existe une A-algèbre de type fini $C \subset B$ telle que l'application $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(C)$ établisse une bijection entre les idéaux premiers minimaux de B et ceux de C.

Comme les idéaux premiers minimaux q_i de B sont en nombre fini, il existe, d'après le lemme d'évitement, une famille finie (t_i) d'éléments de B tels que $t_i \in q_i$ et $t_i \notin q_j$ pour $j \neq i$; il suffit de prendre pour C la sous-A-algèbre de B engendrée par les t_i ; en effet, comme $C \subset B$, tout idéal premier minimal de C se relève à B ; d'autre part, pour tout i, $C \cap q_i$ est un idéal premier minimal, sinon il contiendrait un idéal premier minimal, donc un $C \cap q_j$ pour un $j \neq i$, ce qui s'oppose au choix des t_i.

3° Démonstration dans le cas où X est intègre : Remarquons qu'on n'utilise pas ici le fait que S' est la fermeture intégrale de S dans X, mais seulement les deux propriétés suivantes : $j : X \to S'$ est un monomorphisme plat quasi-compact, et $S' \to S$ est entier.

D'après le 1° et le 2°, on peut supposer que f est un monomorphisme et que S est intègre. Pour tout λ, soit U_λ l'ensemble des points $t \in S_\lambda$ tels que le morphisme

$$X \times_{S_\lambda} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S_\lambda,t}) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S_\lambda,t})$$

déduit de $j_\lambda : X \to S_\lambda$ par changement de base soit plat. Comme, d'après le lemme 5.2.1, le monomorphisme j_λ vérifie (iv), on déduit du corollaire 4.3 que U_λ est ouvert dans S_λ. Comme $u_\lambda : S_\lambda \to S$ est fini, c'est en particulier un morphisme fermé, donc $F_\lambda = u_\lambda(S_\lambda - U_\lambda)$ est un fermé de S pour tout λ. D'autre part, pour $\mu \geqslant \lambda$, le morphisme composé $X \times_{S_\lambda} U_\lambda \to S_\mu \times_{S_\lambda} U_\lambda \to U_\lambda$ est plat ; en utilisant le lemme 1.8 (i), on en déduit que $F_\mu \subset F_\lambda$, donc que la famille (F_λ) est filtrante décroissante. Montrons que $\bigcap_\lambda F_\lambda = \emptyset$: soient $s \in S$, $A = \mathcal{O}_{S,s}$ et $T = \mathrm{Spec}(A)$; $S' \times_S T$ est un schéma affine dont l'anneau est une A-algèbre entière contenue dans le corps des fractions de A. En utilisant [2] (EGA 0_{IV}, 23.2.5), on voit que, pour λ assez grand, le morphisme $S' \times_S T \to S_\lambda \times_S T$ est radiciel. Or, on a le lemme suivant :

LEMME 5.2.3. - Soient X , Y et Z trois schémas intègres, Z étant noethérien, $j : X \to Y$ un monomorphisme plat, et $v : Y \to Z$ un morphisme entier bijectif, tels que le composé $v \circ j : X \to Z$ soit un monomorphisme. Alors $v \circ j$ est plat.

On se ramène comme d'habitude au cas où Z est un schéma local dont le point fermé est dans $v \circ j(X)$, et il faut voir qu'alors $v \circ j$ est un isomorphisme. Mais, comme v est injectif et entier, Y est alors lui aussi un schéma local, et son point fermé se trouve dans $j(X)$; comme j est plat, il est fidèlement plat, et comme c'est un monomorphisme, c'est un isomorphisme. $v \circ j$ est donc un monomorphisme entier, donc un isomorphisme (proposition 3.8).

Appliquant ce lemme au morphisme composé $X \times_S T \to S' \times_S T \to S_\lambda \times_S T$, on voit que c'est un monomorphisme plat ; en particulier, $u_\lambda^{-1}(s) \subset U_\lambda$, donc $s \notin F_\lambda$, ce qui prouve bien que l'intersection des F_λ est vide. Comme S est quasi-compact, il existe λ tel que $F_\lambda = \emptyset$, ce qui veut dire que $U_\lambda = S_\lambda$, donc que j_λ est plat.

4° Réduction au cas où, pour tout i , $f_i : X_i \to S_i$ est plat : Pour tout i , soient S_i' et $(S_\lambda)_i$ les images fermées de X_i par j et j_λ respectivement. Il est clair que S_i' est limite projective du système des S_i-schémas finis $(S_\lambda)_i$; comme $j : X \to S'$ est un monomorphisme plat quasi-compact, $X_i \to S_i' \times_{S'} X$ est un isomorphisme (lemme 1.7) ; donc $X_i \to S_i'$ est un monomorphisme plat quasi-compact ; enfin, $S_i' \to S_i$ est évidemment entier ; utilisant le 3° et le fait que les X_i sont en nombre fini, on voit donc qu'il existe λ tel que, pour tout i , $X_i \to (S_\lambda)_i$ soit plat ; il suffit de remplacer S par S_λ .

Remarquons que cela implique, en particulier, que les X_i sont noethériens ([6], 1.2), donc que l'espace topologique X , réunion d'un nombre fini d'espaces noethériens, est noethérien.

5° Fin de la démonstration : Supposons effectuées toutes les réductions précédentes : $f : X \to S$ est donc un monomorphisme quasi-compact tel que, pour tout i , $f_i : X_i \to S_i$ soit plat, et les S_i sont exactement les composantes irréductibles de S ; enfin, $\mathcal{O}_S \to f_*(\mathcal{O}_X)$ est injectif.

Montrons qu'on peut se ramener au cas où, pour tout i , l'immersion fermée $w_i : X_i \to X \times_S S_i$ est un isomorphisme.

Il suffit de montrer que w_i est de présentation finie ; en effet, supposons ce point acquis ; w_i se factorise en

$$X_i \to X \times_{S'} S_i' \to X \times_{S_\lambda} (S_\lambda)_i \to X \times_S S_i ,$$

où la première flèche est un isomorphisme puisque $X \to S'$ est un monomorphisme plat quasi-compact (lemme 1.7), et les deux autres des immersions fermées ; il suffit alors d'appliquer le lemme 1.6.

Pour prouver que w_i est de présentation finie, on va montrer que c'est une immersion ouverte quasi-compacte ([2], EGA IV, 1.6.2). La quasi-compacité provient de ce que c'est une immersion fermée. D'autre part, w_i est plat, puisque le composé $X_i \to X \times_S S_i \to S_i$ est plat par hypothèse et que $X \times_S S_i \to S_i$ est un monomorphisme (lemme 1.2 (i)) ; $w_i(X_i)$ est donc un fermé stable par générisation de $X \times_S S_i$; mais cet espace est noethérien, puisqu'il s'identifie à un fermé de X ; donc $w_i(X_i)$ est ouvert dans $X \times_S S_i$ (regarder les composantes irréductibles qui ne rencontrent pas $w_i(X_i)$). Enfin, un monomorphisme plat quasi-compact dont l'image est un ouvert est une immersion ouverte ; d'où le résultat.

On peut donc supposer que, pour tout i , $X \times_S S_i \to S_i$ est plat ; il ne reste plus qu'à démontrer le lemme suivant :

LEMME 5.2.4. - Soient S un schéma noethérien, et $f : X \to S$ un monomorphisme quasi-compact tel que $\mathcal{O}_S \to f_*(\mathcal{O}_X)$ soit injectif. Supposons que, en désignant par S_i les schémas intègres induits par S sur ses composantes irréductibles, les morphismes $X \times_S S_i \to S_i$ soient plats. Alors f est plat.

On se ramène immédiatement au cas où S est un schéma local dont le point fermé se trouve dans $f(X)$; montrons que l'application f est fermée ; soit Y un sous-schéma fermé de X ; pour montrer que $f(Y)$ est fermé, il suffit de montrer que, pour tout i , $f(Y) \cap S_i$ est fermé ; cet ensemble est l'image du morphisme composé $Y \times_S S_i \to X \times_S S_i \to S_i$; or, la première flèche est une immersion fermée, et $X \times_S S_i \to S_i$ est un isomorphisme puisque c'est un monomorphisme quasi-compact fidèlement plat. D'où ce qu'on veut. En vertu du lemme 3.8.1, X est un schéma local ; soient B son anneau, et A celui de S . Il faut montrer ceci: soient A un anneau noethérien, p_i ses idéaux premiers minimaux, et $g : A \to B$ un homomorphisme injectif ; si, pour tout i , $A/p_i \to B/(p_i B)$ est un isomorphisme, alors g est un isomorphisme. Il suffit de montrer que g est surjectif ; désignons par M le A-module B/A ; d'après l'hypothèse, $M = p_i M$ pour tout i ; donc $M = p_1 p_2 \dots p_n M$. Mais, dans un anneau noethérien, le produit des idéaux premiers minimaux est un idéal nilpotent ; donc $M = 0$, et g est surjectif.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chap. I à VI. - Paris, Hermann, 1961-1964 (Act. scient. et ind., 1290, 1293, 1308 ; Bourbaki, 27, 28, 30).

[2] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - [EGA] Eléments de géométrie algébrique, Chap. I à IV. - Paris, Presses Universitaires de France, 1960-1967 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32).

[3] HARTSHORNE (Robin). - Complete intersections and connectedness, Amer. J. of Math., t. 84, 1962, p. 497-508.

[4] LAZARD (Daniel). - Epimorphismes plats, Séminaire P. Samuel : Algèbre commutative, 1967/68, n° 4, 12 p.

[5] PESKINE (Christian). - Une généralisation du "Main theorem" de Zariski, Bull. Sc. math., 2e série, t. 90, 1966, p. 119-127.

[6] RAYNAUD (Michel). - Un critère d'effectivité de descente, Séminaire P. Samuel: Algèbre commutative, 1967/68, n° 5, 22 p.

[7] ROBY (Norbert). - Diverses caractérisations des épimorphismes, Séminaire P. Samuel : Algèbre commutative, 1967/68, n° 3, 12 p.