Michel Raynaud

Un critère d'effectivité de descente

Séminaire Samuel. Algèbre commutative, tome 2 (1967-1968), exp. n° 5, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=SAC_1967-1968__2__A5_0>

6 et 13 décembre 1967

UN CRITÈRE D'EFFECTIVITÉ DE DESCENTE

par Michel RAYNAUD

1. Monomorphisme plat.

Par définition, un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est un monomorphisme si, pour tout schéma T, l'application canonique $\mathrm{Hom}(T , X) \to \mathrm{Hom}(T , Y)$ est injective. Il revient au même de dire que le morphisme diagonal $X \xrightarrow{\subset} X \times_Y X$ est un isomorphisme. Si f est un morphisme de $\mathrm{Spec}(B)$ dans $\mathrm{Spec}(A)$, f est un monomorphisme de schémas si, et seulement si, le comorphisme de f est un épimorphisme de l'anneau A dans l'anneau B au sens des autres exposés de ce séminaire.

Commençons par étendre au cas des schémas, certains résultats établis par LAZARD dans le cas des schémas affines.

PROPOSITION 1.1. - Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Le morphisme f est un monomorphisme plat.
(ii) Le morphisme f est injectif et, $\forall x \in X$, le morphisme canonique : $O_{Y,f(x)} \to O_{X,x}$ est un isomorphisme.

Démonstration.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Si f est un monomorphisme, f est évidemment injectif ; d'autre part, si f est plat, $\forall x \in X$, f induit un monomorphisme fidèlement plat, affine, $\mathrm{Spec}(O_{X,x}) \xrightarrow{\subset} \mathrm{Spec}(O_{Y,f(x)})$, qui est donc un isomorphisme (exposé 4, § 1.2).

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : Soient T un schéma, u_1 et u_2 deux morphismes de T dans X, tels que $fu_1 = fu_2$, et montrons que $u_1 = u_2$. Comme f est injectif, u_1 et u_2 coïncident ensemblistement. On peut donc se ramener au cas où X, Y, T sont affines, auquel cas la propriété résulte de l'exposé 4, § 2.4.

Si X est un schéma, X^- désigne l'espace topologique sous-jacent à X ; si $f : X \to Y$ est un morphisme de schémas, $f^- : X^- \to Y^-$ désigne l'application continue sous-jacente.

Sous les conditions générales de 1.1, $f^- : X^- \to Y^-$ n'induit pas en général un homéomorphisme de X^- sur $f^-(X^-)$, contrairement à ce que l'on a vu dans le cas affine (exposé 4, § 2.2). En effet, prenons par exemple $Y = \mathrm{Spec}(\underset{\sim}{Z})$, et soit P l'ensemble des nombres premiers. Pour tout $p \in P$, soit X_p le spectre de l'anneau de valuation discrète, localisé de $\underset{\sim}{Z}$ en p . Le point générique de X_p s'identifie canoniquement à $\mathrm{Spec}(Q)$, et est ouvert dans X_p . Nous pouvons donc recoller les schémas X_p $(p \in P)$, suivant l'ouvert constitué par leur point générique. Si X désigne le schéma ainsi obtenu, les monomorphismes évidents $X_p \overset{\subset}{\longrightarrow} Y$ se recollent en un morphisme $f : X \to Y$, qui est un monomorphisme plat surjectif. Mais f^- n'est pas un homéomorphisme puisque X^- n'est pas quasi-compact, tandis que Y^- l'est. En fait, tous les ennuis viennent de là, comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2. - <u>Soit</u> $f : X \overset{\subset}{\longrightarrow} Y$ <u>un monomorphisme plat quasi-compact. Alors:</u>

(i) <u>L'application</u> f^- <u>induit un homéomorphisme de</u> X^- <u>sur son image</u> $f^-(X^-)$, <u>et le schéma</u> X <u>est canoniquement isomorphe à l'espace annelé induit par</u> (Y^- , O_Y) <u>sur le sous-espace</u> $f^-(X^-)$.

(ii) <u>Si</u> Y <u>est localement noethérien (resp. noethérien), il en est de même de</u> X .

<u>Démonstration</u>. - Soit Z un sous-schéma fermé de X . Le morphisme composé $Z \to X \to Y$ est quasi-compact et séparé (N.-B. - C'est un monomorphisme), de sorte que l'on peut considérer l'image fermée schématique Z' de Z dans Y (EGA (*) I, 9.5.1). Je dis que $f^{-1}(Z') = Z$. Ce point se vérifie sur les anneaux locaux de X . Comme la formation de l'image fermée commute aux changements de base plats $Y' \to Y$ (EGA 0_{IV}, 1.7.21), quitte à remplacer Y par $\mathrm{Spec}(O_{Y,f(x)})$, on peut supposer d'après 1.1 que f est un isomorphisme, auquel cas la propriété est claire. Ceci entraîne immédiatement (ii), et montre que f^- est un homéomorphisme de X^- sur $f^-(X^-)$. Comme f induit un isomorphisme sur les anneaux locaux, il en résulte bien que l'espace annelé (X^- , O_X) est isomorphe à l'espace annelé induit par (Y^- , O_Y) sur $f^-(X^-)$ (voir aussi EGA IV, 2.3.11).

COROLLAIRE 1.3. - <u>Soient</u> Y <u>un schéma, et</u> E^- <u>une partie de</u> Y^- . <u>Alors il existe à un isomorphisme près, au plus un monomorphisme plat quasi-compact</u> $f : X \overset{\subset}{\longrightarrow} Y$, <u>tel que</u> $f^-(X^-) = E^-$.

DÉFINITION 1.4. - Soient Y un schéma, et E^- une partie de Y^- . Nous dirons que E^- est <u>admissible</u> (dans Y), s'il existe un monomorphisme plat quasi-compact

---

(*) Voir [2].

$f : X \overset{\subset}{\longrightarrow} Y$, tel que $f^{-}(X^{-}) = E^{-}$. D'après ce qui précède, il revient au même de dire que l'espace annelé $E = (E^{-} , \mathcal{E})$ induit par $(Y^{-} , \mathcal{O}_Y)$ sur le sous-espace E^{-} , est un schéma, et que E^{-} est rétro-compact dans Y^{-} .

PROPOSITION 1.5. - *Soit* $f : X \overset{\subset}{\longrightarrow} Y$ *un monomorphisme plat quasi-compact. Alors:*

(i) *Il existe un plus grand ouvert* U *de* Y , *contenant* $f(X)$, *tel que, dans la factorisation canonique :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "f"] \arrow[dr, hook, "g"'] & & Y \\ & U \arrow[ur, hook, "i"'] & \end{tikzcd} ,$$

g *soit un morphisme* affine.

(ii) *Si* $Z = \operatorname{Spec} f_*(\mathcal{O}_X)$ (EGA II, 1.3.1), *et si l'on considère la factorisation canonique :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, hook, "f"'] & Z \arrow[d, "h"] \\ & Y \end{tikzcd} ,$$

alors le morphisme j *est une immersion ouverte (i. e.* f *est quasi-affine).*

(iii) *On a* $Y - U = \overline{h(Z - X)}$ (*où la barre désigne l'adhérence dans* Y^{-}).

Démonstration.

(i). Il existe évidemment un plus grand ouvert U de Y , tel que f soit affine au-dessus de U ; il faut voir que U contient $f(X)$. Pour ce faire, on peut supposer Y affine. Soient alors x un point de X , et V un ouvert affine de X contenant x . D'après 1.2, V est la trace sur X d'un ouvert W de Y . Comme W est contenu dans Y affine, W est séparé, donc le morphisme $V \to W$ est affine (EGA II, 1.6.3) ; d'autre part, W contient $f(x)$.

(ii) et (iii). Notons d'abord qu'il résulte de EGA (I, 9.2.1) que $f_*(\mathcal{O}_X)$ est une $\mathcal{O}_Y$-algèbre quasi-cohérente, de sorte que $Z = \operatorname{Spec}(f_*(\mathcal{O}_X))$ est défini, et est affine sur Y . Au-dessus de U , j est un isomorphisme puisque g est affine, donc j est bien une immersion ouverte et $h(Z - X)$ est contenu dans $Y - U$, donc $\overline{h(Z - X)} \subset Y - U$. D'autre part, au-dessus de l'ouvert $Y - \overline{h(Z - X)}$, j est une immersion ouverte surjective, donc est un isomorphisme, donc f est affine au-dessus de $Y - \overline{h(Z - X)}$. Vu la définition de U , on en déduit $U \subset Y - \overline{h(Z-X)}$. Bref, $Y - U = \overline{h(Z - X)}$.

REMARQUE 1.6.

(i) On voit facilement que si Y est localement noethérien, $Y - U$ est de codimension au moins 2 dans Y.

(ii) Si Z est localement noethérien, $Z - j(X)$ est aussi de codimension au moins 2 dans Z (cf. EGA IV, 21.12.6).

2. Un critère pour qu'une partie E d'un schéma Y soit admissible.

Notons d'abord deux lemmes, le premier étant trivial et le second résultant de EGA (IV, 1.10.1).

LEMME 2.1. - *Soient* Y *un schéma, et* E^{-} *une partie de* Y^{-}. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Le sous-espace* E^{-} *est stable par générisations.*

(ii) E^{-} *est l'intersection de ses voisinages ouverts dans* Y.

Si de plus E^{-} *est quasi-compact, ces conditions sont encore équivalentes à* :

(ii bis) *La partie* E^{-} *est intersection de ses voisinages ouverts quasi-compacts.*

LEMME 2.2. - *Soit* F^{-} *une partie ind-constructible* (EGA IV, 1.9.4) *d'un schéma* Y, *qui contient une partie* E^{-} *stable par générisations. Alors* F^{-} *contient un voisinage ouvert de* E^{-}.

PROPOSITION 2.3. - *Soient* Y *un schéma, et* E^{-} *un sous-espace de* Y^{-} *stable par générisations et rétro-compact dans* Y^{-} (*cette dernière condition étant toujours réalisée si* Y^{-} *est localement noethérien*). *Soient* $E = (E^{-}, \mathcal{E})$ *l'espace annelé induit par* $Y = (Y^{-}, O_Y)$ *sur* E^{-}, *et* $f : E \to Y$ *le morphisme canonique. Alors* :

(i) *Si* Y *est quasi-séparé, et si* V^{-} *est un ouvert quasi-compact de* E^{-}, *l'application canonique*

$$\varinjlim_{U} \Gamma(U, O_Y) \to \Gamma(V^{-}, \mathcal{E}) ,$$

où U *parcourt les voisinages ouverts quasi-compacts de* V^{-} *dans* Y, *est un isomorphisme.*

(ii) *Le faisceau de* O_Y*-algèbres* $f_*(\mathcal{E})$ *est quasi-cohérent, de sorte que si* $Z = \operatorname{Spec} f_*(\mathcal{E})$, *on a une factorisation canonique* :

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j} & Z \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle h} & \\ & Y & \end{array} .$$

De plus, $j^- : E^- \to Z^-$ induit un homéomorphisme de E^- sur son image, et cette dernière est rétro-compacte dans Z^- et stable par générisations.

(iii) "La formation du diagramme (*)" commute à la localisation aux points de Y.

Démonstration.

(i) Soit donc V^- un ouvert quasi-compact de E^-, et soit $s \in \Gamma(V^-, \mathcal{E})$. Par définition du faisceau induit $\mathcal{E}$, pour tout point $v \in V^-$, il existe un ouvert affine U_v de Y, contenant v et $s_v \in \Gamma(U_v, O_Y)$, qui induit s sur $V \cap U_v$. Comme V^- est quasi-compact, on peut recouvrir V par un nombre fini, n, des ouverts U_v. Par récurrence sur n, on est ramené à prouver que si l'on a deux ouverts quasi-compacts U_1 et U_2 de Y qui recouvrent V^- et deux sections $s_i \in \Gamma(U_i, O_Y)$ $(i = 1, 2)$, telles que s_i prolonge $s \mid V^- \cap U_i$, alors il existe un ouvert quasi-compact U de Y, contenant V^-, tel que s se prolonge à U. Comme Y est quasi-séparé, $U_1 \cap U_2$ est quasi-compact. D'autre part, s_1 et s_2 coïncident sur l'ensemble quasi-compact $U_1 \cap U_2 \cap V^-$, donc sur un voisinage ouvert quasi-compact W de ce dernier, dans $U_1 \cap U_2$. Le fermé $F = U_1 \cap U_2 - W$ de $U_1 \cap U_2$, est alors une partie constructible de $U_1 \cup U_2$ qui ne rencontre pas V^-, donc $U_1 \cup U_2 - F$ est une partie constructible de $U_1 \cup U_2$ qui contient V^-. D'après 2.2, cette partie contient un ouvert quasi-compact U contenant V^-. Par construction, on a alors $U \cap (U_1 \cap U_2) \subset W$, donc s_1 et s_2 se recollent en une section de O_Y sur U qui prolonge évidemment s.

(ii) L'assertion à démontrer est locale sur Y, de sorte que l'on peut supposer Y affine d'anneau A. Pour voir que $f_*(\mathcal{E})$ est quasi-cohérent, nous devons vérifier que $f_*(\mathcal{E})$ est isomorphe au faisceau sur Y, associé au A-module

$$\Gamma(Y, f_*(\mathcal{E})) = \Gamma(E^-, \mathcal{E}) \quad .$$

Lorsque a parcourt les éléments de A, on sait que les ouverts Y_a de Y, forment une base de la topologie de Y. Il nous suffit donc de montrer que, pour tout $a \in A$, le morphisme canonique $\Gamma(Y_a, f_*(\mathcal{E})) \longleftarrow \Gamma(Y, \mathcal{E})_a$ est un isomorphisme, ou encore, posant $E_a^- = E^- \cap Y_a$, que le morphisme canonique

$$\Gamma(E_a^-, \mathcal{E}) \longleftarrow \Gamma(E^-, \mathcal{E})_a \tag{**}$$

est un isomorphisme. Soit U un ouvert quasi-compact de Y, qui contient E_a^-. Alors $F = Y_a - U$ est une partie constructible de Y, qui ne rencontre pas E^-, donc (2.2), $Y - F$ contient un voisinage ouvert W, de E^-, que l'on peut supposer quasi-compact (2.1). On a alors $W_a = W \cap Y_a \subset U$. D'après (i), on a

$$\Gamma(E_a^-, \mathcal{E}) = \varinjlim_{U} \Gamma(U, O_Y) \quad ,$$

où U parcourt la famille filtrante I des ouverts quasi-compacts de Y contenant E^-_a. Vu ce qui précède, on voit que les ouverts U de la forme W_a, où W est un ouvert quasi-compact de Y contenant E^-, sont cofinaux dans I. Donc

$$\Gamma(E^-_a , \mathcal{E}) = \varinjlim_{W} \Gamma(W_a , O_Y) \quad .$$

Mais d'après EGA (I, 9.3.1), le morphisme canonique $\Gamma(W , O_Y)_a \to \Gamma(W_a , O_Y)$ est un isomorphisme. On en déduit bien, par passage à la limite inductive, que le morphisme canonique (**) est un isomorphisme. Par ailleurs, il est clair que j^- induit un homéomorphisme de E^- sur son image, et que j^- est quasi-compact. Le fait que $j^-(E^-)$ soit stable par générisations va résulter de (iii), que nous allons maintenant démontrer.

(iii) Précisons d'abord le sens de l'assertion (iii). Soit $y \in Y$, et soit $Y_y = \mathrm{Spec}(O_{Y,y})$. Nous identifions Y^-_y à un sous-espace de Y^-. Nous verrons dans un instant que $E^-_y = E^- \cap Y^-_y$ est quasi-compact ; d'autre part, E^-_y est évidemment stable par générisations. Nous pouvons considérer l'espace annelé $E_y = (E^-_y , \mathcal{E}_y)$ induit par O_{Y_y} sur E^-_y, et le morphisme canonique $f_y : E_y \to Y_y$. D'après (ii), $(f_y)_* (\mathcal{E}_y)$ est quasi-cohérent, et l'on peut introduire le schéma

$$Z_y = \mathrm{Spec}(f_y)_* (\mathcal{E}_y) = \mathrm{Spec}\, \Gamma(E^-_y , \mathcal{E}_y) \quad .$$

On a alors un diagramme commutatif canonique :

(***)
$$\begin{tikzcd}
E_y \arrow[rr] \arrow[dr, "j_y"] \arrow[dd, "f_y"'] & & E \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, dashed, "f" near start] & \\
& Z_y \arrow[rr] \arrow[dl, "h_y"] & & Z \arrow[dl, "h"] \\
Y_y \arrow[rr] & & Y &
\end{tikzcd}$$

et il s'agit de montrer que le "carré" inférieur est cartésien, i. e., que le morphisme canonique $Z_y \to Z \times_Y Y_y$ est un isomorphisme. Comme Y_y est le localisé de Y en y, il est clair qu'il suffit de montrer que le morphisme canonique

$$\Gamma(E^-_y , \mathcal{E}_y) \to \varinjlim_{U} \Gamma(U , f_*(\mathcal{E})) = \Gamma(U \cap E^- , \mathcal{E}) \quad ,$$

où U parcourt les voisinages ouverts de y dans Y, est un isomorphisme. Pour établir ce point, on peut supposer Y affine. D'après 1.1, E^- est intersection d'ouverts quasi-compacts, donc est pro-constructible (EGA IV, 1.9.4). Par suite

(EGA IV, 1.9.5 (vi)), E^-_y est pro-constructible dans Y_y, donc est quasi-compact. Il résulte alors de (i) que l'on a

$$(E^-_y , \mathcal{E}_y) = \varinjlim_{U} \Gamma(U , \mathcal{O}_Y) \quad ,$$

où U parcourt les ouverts quasi-compacts de Y contenant E^-_y. Si U est un tel ouvert, comme E^- est pro-constructible, il en est de même de $E^- - U$. Or ce dernier ensemble ne rencontre pas Y_y. Il résulte alors de 2.2, qu'il existe un ouvert quasi-compact W de Y, contenant Y_y, tel que $W \cap (E^- - U) = \emptyset$. On a donc les inclusions : $E^-_y \subset E^- \cap W \subset W \cap U \subset U$. Il en résulte que l'on a

$$\Gamma(E^-_y , \mathcal{E}_y) = \varinjlim_{W} \Gamma(E^- \cap W , \mathcal{E}) \quad ,$$

où W parcourt les voisinages ouverts de y.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2.4. - Soient Y, E^-, E comme dans 2.3, et considérons la factorisation canonique :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j} & Z \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle h} & \\ & Y & \end{array} \quad .$$

Alors :

(A) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) E^- est admissible (1.4).

(ii) E est un schéma.

(iii) $j^-(E^-)$ est ouvert dans Z^-.

(iv) $h(Z - j(E)) \cap E^- = \emptyset$.

(B) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) E^- est admissible, et le morphisme $f : E \to Y$ est affine.

(ii) Le morphisme j est un isomorphisme.

(iii) L'application j^- est surjective.

(iv) $\forall\, y \in Y$, il existe un monomorphisme plat quasi-compact, affine, $f_y : X_y \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$, dont l'image est $E^-_y = E^- \cap \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$.

Notons d'abord qu'il résulte immédiatement de 2.3, (ii) et (iii), que l'on a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.5.

(i) L'espace annelé E s'identifie canoniquement à l'espace annelé induit par le schéma Z sur le sous-espace $j^{-}(E^{-})$.

(ii) $h(Z - j(E)) \cap E^{-} = \emptyset$.

Démonstration de 2.4.

(A) L'équivalence de (i) et (ii) est mise pour mémoire ; d'autre part, l'étude directe (1.5) nous a montré que (ii) $\Longrightarrow$ (iii) et (ii) $\Longrightarrow$ (iv) .

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) résulte de 2.5, (i), et (iv) $\Longrightarrow$ (iii) est bien clair.

(B) (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) et (i) $\Longrightarrow$ (iv) sont bien clairs, (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) résulte de 2.5, (i).

Prouvons que (iv) $\Longrightarrow$ (iii) . Pour voir que j^{-} est surjectif, on peut, compte tenu de 2.3, (iii), supposer Y local. Mais alors, la propriété résulte de l'hypothèse faite dans (iv), et de (i) $\Longrightarrow$ (iii) .

REMARQUE 2.6. - Lorsqu'on n'impose plus au morphisme f d'être affine, on n'a plus de critère local d'admissibilité comme dans 2.4, (B) (iv). Par exemple, prenons pour Y l'ouvert complémentaire du point fermé du spectre d'un anneau local noethérien, normal, de dimension au moins 3 . Pour E^{-} , prenons le complémentaire dans Y^{-} de l'ensemble (infini) des points fermés de Y^{-} . Comme Y est normal et que E^{-} contient les points de Y de codimension $\leqslant 1$, on a $Z = Y$. Mais E^{-} n'est pas ouvert dans Y , donc E^{-} n'est pas admissible (2.4 (A), (i) $\Longleftrightarrow$ (iii)). Pourtant, pour tout point y de Y , $E^{-} \cap \mathrm{Spec}(O_{Y,y})$ est ouvert dans $\mathrm{Spec}\, O_{Y,y}$, donc est admissible.

COROLLAIRE 2.7. - Soient Y un schéma dont les anneaux locaux sont factoriels, et soit E^{-} une partie rétro-compacte de Y , stable par générisations. Alors, pour que E^{-} soit admissible, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert U de E dans Y , tel que, si $y \in U$ et si tous les points de codimension 1 de $\mathrm{Spec}\, O_{Y,y}$ sont dans E^{-} , alors y est dans E^{-} .

Démonstration. - La nécessité d'une telle condition est facile à établir (et est valable dès que Y est localement noethérien, ou bien dès que Y est un schéma de Krull). On peut prendre par exemple, pour ouvert U , celui introduit dans 1.5, (i). Prouvons maintenant la suffisance. Quitte à restreindre Y , on peut supposer $Y = U$. On va alors chercher un monomorphisme $f : E \to Y$ qui soit affine. D'après 2.4, (B) (iv), on peut supposer Y local, donc factoriel. L'hypothèse faite sur E^{-} entraîne alors que, ou bien E^{-} est vide ou réduit au point générique de Y , auquel cas l'existence de E est claire, ou bien $E^{-} = Y^{-} - \bigcup_i (\overline{x_i})$, où x_i

parcourt les points de Y , de codimension 1 , qui ne sont pas dans E^- . Comme $A = \Gamma(Y)$ est factoriel, il existe $f_i \in A$, tel que $Y - \overline{x_i} = \mathrm{Spec}(A_{f_i})$. Il est clair alors que $E = \mathrm{Spec}\, A_S$, où S est la partie multiplicative de A engendrée par les f_i , répond à la question.

Indiquons comment la question de savoir si certaines parties de schémas sont admissibles se rencontre dans les problèmes de passage au quotient. Soient S un schéma noethérien, X un S-schéma de type fini, R un sous-schéma fermé de $X \times_S X$ qui est le graphe d'une relation d'équivalence sur X telle que les deux projections canoniques p_1 , p_2 : $R \rightrightarrows X$ soient plates. On sait alors que, si l'espace annelé quotient de X par R , soit X/R , est un schéma, X/R est aussi le quotient de X par R pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte [7], de sorte que le morphisme canonique $p : X \to X/R = Y$ est fidèlement plat. En particulier, si $x \in X$, on a $p(\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X,x}) = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{Y,p(x)}$, et par suite le saturé, par la relation d'équivalence R , de $X_x = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$, est représentable par le schéma $p^{-1}(\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{Y,p(x)}) = \mathrm{Sat}_x$. On a donc un monomorphisme plat quasi-compact : $\mathrm{Sat}_x \to X$. Evidemment, $\mathrm{Sat}_x^- = p_2^-(p_1^-)^{-1}(X_x^-)$, de sorte que ce dernier ensemble est nécessairement admissible dans X . Signalons, sans démonstration, la réciproque très partielle suivante :

Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe algébrique lisse, affine, connexe, sans caractère non nul (i. e. le radical résoluble de G est égal à son radical unipotent), et supposons que G opère sur l'espace affine

$$V = \mathrm{Spec}\, k[T_1 , \dots , T_n] \ .$$

Soit X un ouvert de V au-dessus duquel G opère librement et proprement. Alors, pour que X/G soit un schéma, il faut et il suffit que, pour tout $x \in X$, le saturé sous G de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ soit admissible. De plus, si ces conditions sont réalisées, X/G est quasi-affine.

3. Application aux morphismes entiers.

Commençons par donner une généralisation d'un théorème classique de Chevalley (EGA II, 6.7.1).

PROPOSITION 3.1. - Soit $f : X \to Y$ un morphisme entier surjectif, et supposons X affine, alors Y est affine dans chacun des cas suivants :

(i) Y est normal et intègre.

(ii) Y est noethérien.

<u>Démonstration.</u> - (i) : Quitte à remplacer X par un sous-schéma fermé intègre dominant Y , on peut supposer X intègre. Il suffit alors d'appliquer le lemme suivant :

LEMME 3.2. - <u>Soit</u> $f : X \to Y$ <u>un morphisme entier surjectif de schémas intègres, et supposons</u> Y <u>normal. Alors</u> $\Gamma(X) = \Gamma(X , O_X)$ <u>est entier sur</u> $\Gamma(Y) = \Gamma(Y , O_Y)$. <u>Si de plus</u> X <u>est affine,</u> Y <u>est affine.</u>

Soit $a \in \Gamma(X)$, et notons M la sous-O_Y-algèbre (quasi-cohérente) de $f_*(O_X)$ engendrée par a . Comme X est entier sur Y , M est un O_S-module de type fini. Le schéma Y étant normal, on voit, en "faisceautisant" (EGA II, 6.4.3), que le polynôme caractéristique de la multiplication par a dans M , a ses coefficients dans $\Gamma(Y)$. Comme M est sans torsion (X étant intègre), HAMILTON-CAYLEY fournit une relation de dépendance intégrale de a sur $\Gamma(Y)$. Ceci prouve la première assertion de 3.1, la seconde résulte plus généralement du lemme suivant :

LEMME 3.3. - <u>Soient</u> S , X , Y <u>trois schémas, tels que l'on ait un diagramme commutatif</u>

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "h"] \\ & S & \end{tikzcd} .$$

<u>On suppose</u> f <u>entier,</u> g <u>surjectif, et</u> h <u>séparé. Alors</u> h <u>est entier.</u>

<u>Démonstration.</u> - Notons que h est quasi-compact et quasi-séparé, de sorte que l'on peut considérer le S-schéma $Z = \operatorname{Spec} h_*(O_Y)$ et la factorisation canonique :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "h"'] & & Z \arrow[dl, "v"] \\ & S & \end{tikzcd} ,$$

où u est dominant et v affine. Comme f est entier, il en est de même de $u \circ g$; d'autre part, u est dominant et g est surjectif, donc $u \circ g$ est dominant et par suite surjectif. Il résulte alors de EGA (II, 5.4.3 et 5.4.9) que v est universellement fermé. Etant de plus affine, v est entier (EGA IV, 18.12.8). Pour montrer que h est entier, il nous suffit donc de montrer que u est un isomorphisme. Quitte à remplacer S par Z , on peut donc supposer de plus que $h_*(O_Y) = O_S$. Pour voir que h est un isomorphisme, on peut supposer S local (1.1 et 1.2), puis par descente plate, on peut supposer S hensélien (EGA IV, 18), de point fermé s . Notons d'abord que la fibre Y_s de Y au-dessus de s est entière sur s . En effet, comme X_s est entier sur s , tout ouvert quasi-compact de X_s est à la fois ouvert et fermé dans X_s . Comme u_s est fermé et surjectif, il est clair que tout ouvert affine de Y_s est à la fois ouvert et fermé dans Y_s et est entier sur s . Il en résulte bien que Y_s est entier sur s . Ceci étant, si Y_s n'était pas réduit à un point, on pourrait réaliser Y_s comme réunion de deux ouverts affines non vides, disjoints, $(V_i)_s$ $(i = 1 , 2)$. Posons

$$(U_i)_s = u_s^{-1}(V_i)_s \quad .$$

Comme X est entier sur S hensélien, on voit par passage à la limite, à partir du cas fini, que $X = U_1 \coprod U_2$, où U_i est un sous-schéma à la fois ouvert et fermé de X dont la fibre au-dessus de s est $(U_i)_s$. Soit alors V_i^- le fermé de Y^- égal à l'image de U_i^- . La fibre en s de V_i^- est donc $(V_i)_s^-$, et par suite $(V_1^- \cap V_2^-) \cap Y_s^- = \emptyset$. Comme h est fermé (EGA II, 5.4.3 et 5.4.9) et S local de point fermé s , on a $V_1^- \cap V_2^- = \emptyset$, et par suite Y n'est pas connexe, contrairement au fait que $h_*(O_Y) = O_S$. Donc Y_s est réduit à un point y . Soit alors U un ouvert affine de Y contenant y . Comme h est fermé et S local, on a nécessairement $U = Y$, par suite h est affine, donc est un isomorphisme.

Prouvons maintenant 3.1 dans le cas (ii) où Y est noethérien. Nous allons reprendre, en la modifiant légèrement, la démonstration de EGA (II, 6.7.1). Par récurrence noethérienne, nous pouvons supposer que tout sous-schéma fermé Z de Y , distinct de Y , est affine, et nous devons montrer que Y est affine.

<u>1er cas</u> : Y n'est pas réduit. Alors Y_{red} est affine, donc Y est affine (EGA I, 5.1.9).

<u>2e cas</u> : Y est réduit. Soient $\widetilde{Y}$ le normalisé de Y dans son anneau total de fraction, $g : \widetilde{Y} \to Y$ le morphisme canonique, $\widetilde{X} = X \times_Y \widetilde{Y}$, $\widetilde{f}$ le morphisme de $\widetilde{X}$ dans $\widetilde{Y}$ déduit de f . Comme g est affine, $\widetilde{X}$ est affine. Si l'on applique (i) (cas où Y est normal intègre) à chacune des composantes irréductibles (en nombre fini) de $\widetilde{Y}$, on voit que $\widetilde{Y}$ est affine. Pour montrer que Y est affine, il suffit, d'après le critère de SERRE (EGA II, 5.2), de voir que $H^1(Y , F) = 0$ pour tout O_Y-module quasi-cohérent F . Pour cela, considérons la suite exacte de O_Y-modules quasi-cohérent :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow K \longrightarrow F \xrightarrow{r} f_* f^*(F) \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \ ,$$

où r est le morphisme canonique. Comme $\widetilde{Y}$ est le normalisé de Y , g est un isomorphisme au-dessus de tout point maximal t de Y , et par suite il en est de même de r . On a donc $K_t = Q_t = 0$. Comme Y est noethérien, K est limite inductive de ses O_Y-modules cohérents K_i $(i \in I)$ (EGA I, 9.4.8). A fortiori, on a $(K_i)_t = 0$, de sorte que K_i s'identifie à un faisceau cohérent sur un sous-schéma fermé Z_i de Y , distinct de Y (par exemple, le sous-schéma fermé défini par l'annulateur de K_i). Vu l'hypothèse de récurrence, on a

$$H^1(Z_i , K_i) = H^1(Y , K_i) = 0 \quad .$$

Par passage à la limite inductive, on en déduit que $H^1(Y , K) = 0$; on prouve de même que $H^1(Y , Q) = 0$. D'autre part, comme g est affine, on a

$$H^1(Y , f_* f^*(F)) = H^1(\widetilde{Y} , f^*(F))$$

(EGA III, 1.3.3), et $H^1(\widetilde{Y} , f^*(F)) = 0$ puisque $\widetilde{Y}$ est affine. Il résulte alors de (*) et de la suite exacte de cohomologie que l'on a $H^1(Y , F) = 0$.

THÉORÈME 3.4. - <u>Soient</u> $u : Y' \to Y$ <u>un morphisme entier surjectif, et</u> E^- <u>une partie de</u> Y^- , <u>telle que</u> $(u^-)^{-1}(E^-) = E'^-$ <u>soit admissible dans</u> Y' (1.4). <u>Alors</u> E^- <u>est admissible dans</u> Y <u>dans chacun des deux cas suivants</u> :

(i) Y <u>est normal</u>.

(ii) <u>Les anneaux locaux de</u> Y <u>sont noethériens</u>.

<u>Démonstration</u>.

1° Comme u est surjectif et E'^- rétro-compact dans Y' , il est clair que E^- est rétro-compact dans Y . Je dis que E^- est stable par générisations. Pour établir ce point, on peut supposer Y local de point fermé $y \in E^-$, et on doit alors montrer que $E^- = Y^-$. Soient $x \in Y$, x' un point de Y' au-dessus de x , $\overline{x'}$ l'adhérence de x' dans Y' . Comme u est fermé, $\overline{x'}$ contient un point y' au-dessus de y , donc $y' \in E'^-$. Comme E'^- est admissible, donc stable par générisations, E'^- contient x' , donc $x \in E^-$.

2° Notons $f' : E' \to Y'$ le monomorphisme plat quasi-compact d'image E'^- , et soit U' un ouvert de Y' contenant E' tel que $E' \to U'$ soit affine (1.5). Si $F' = Y' - U'$, $F = u(F')$ est un fermé de Y qui ne rencontre pas E^- . Quitte à remplacer Y par $Y - F$, on peut donc supposer que f' est affine. On va alors chercher un monomorphisme plat quasi-compact $f : E \to Y$, d'image E^- , qui soit affine. D'après le 1° ci-dessus, les conditions de 2.3 sont satisfaites. Nous pouvons donc considérer la factorisation canonique $f = hj$ introduite dans 2.3, (ii), et pour voir que E^- est admissible et f affine, il nous suffit de montrer que j^- est surjectif (2.4 (B), (iii) $\Longrightarrow$ (i)).

3° Etudions d'abord le cas où Y est normal. Il est clair que Z est alors lui aussi normal. Quitte à remplacer Y par Z, on peut supposer que h est un isomorphisme. Grâce à 2.4 (B), (i) $\Longrightarrow$ (iv), on peut supposer de plus Y local, donc intègre. Quitte à remplacer Y' par une composante irréductible réduite dominant Y, on peut supposer Y' intègre. Comme Y est affine, il en est de même de Y', donc de E' d'après la réduction faite dans le 2°. On a alors

$$\Gamma(E' , O_{E'}) = \Gamma(E') = \varinjlim_{W'} \Gamma(W' , O_{Y'}) \quad ,$$

où W' parcourt les voisinages ouverts de E'^{-} dans Y'. L'application u^{-} étant fermée, W' contient un ouvert de la forme $u^{-1}(U)$, où U contient E^{-}, de sorte que

$$\Gamma(E') = \varinjlim_{U} \Gamma(u^{-1}(U) , O_{Y'}) \quad ,$$

où U parcourt les voisinages ouverts de E^{-} dans Y. Par ailleurs, on a

$$\varinjlim_{U} \Gamma(U , O_Y) = \Gamma(E) = \Gamma(Z , O_Z) \qquad (2.3, (i)) \quad ,$$

et $\Gamma(u^{-1}(U) , O_{Y'})$ est entier sur $\Gamma(U , O_Y)$ (3.2). On voit donc que $\Gamma(E')$ est entier sur $\Gamma(Z)$, donc le morphisme composé $E' \longrightarrow E \xrightarrow{j} Z$ (où $E' \longrightarrow E$ est le morphisme canonique déduit de u) est entier. Comme il est évidemment dominant, il est surjectif ; a fortiori, j^{-} est surjectif.

C. Q. F. D.

4° Etudions maintenant le cas où les anneaux locaux de Y sont noethériens. Raisonnons par l'absurde, donc supposons que j^{-} n'est pas surjectif, c'est-à-dire que $h(Z - j(E))$ n'est pas vide. Comme les anneaux locaux de Y sont noethériens, $h(Z - j(E))$ possède alors un point y maximal (i. e. aucune générisation stricte de y dans Y n'appartient à $h(Z - j(E))$). Faisons le changement de base $\mathrm{Spec}(O_{Y,y}) \longrightarrow Y$. Comme la formation de Z commute à la localisation (2.3, (iii)), nous sommes ramenés au cas où Y est local de point fermé y, et au cas où $h(Z - j(E)) = y$. Mais alors $h(Z - j(E))$ est fermé, et comme $y \notin E^{-}$ (2.5), $\overline{h(Z - j(E))} \cap E^{-} = \emptyset$. Il résulte alors de 2.4 (A), que E est un schéma. D'autre part, comme Y, donc aussi Y', est affine, il résulte de la réduction faite dans le 2° que E' est affine. Or le morphisme canonique $E' \longrightarrow E$ s'identifie évidemment au morphisme déduit de u par le changement de base $f : E \longrightarrow Y$, donc est entier surjectif. Comme E est noethérien (1.2, (ii)), E est affine (3.1, (ii)). Mais alors j est un isomorphisme (2.4 (B)), contrairement au fait que $h(Z - j(E))$ contient y. Ceci achève la démonstration de 3.3.

PROPOSITION 3.5. - *Soit* $X \to Y$ *un monomorphisme plat quasi-compact, et supposons* X *quasi-affine et* Y *quasi-séparé. Alors* X *est contenu dans uh ouvert quasi-affine* U *de* Y .

Prouvons d'abord deux lemmes.

LEMME 3.6. - *Soit* X *un schéma quasi-compact et quasi-séparé. Alors, pour que* X *soit quasi-affine, (il faut, et) il suffit qu'il existe une famille* f_i , $i \in I$, *d'éléments de* $\Gamma(X , O_X)$ *tels que les* X_{f_i} *soient quasi-affines et recouvrent* X .

En effet, on doit montrer que le morphisme canonique $u : X \to Y = \operatorname{Spec}\Gamma(X , O_X)$ est une immersion ouverte. Or, si $f \in \Gamma(Y , O_Y)$, $u^{-1}(Y_f) = X_f$ et le comorphisme $\Gamma(Y_f , O_Y) \to \Gamma(X_f , O_X)$ est un isomorphisme (EGA I, 9.3.3). Donc $u|X_f$ est une immersion ouverte si, et seulement si, X_f est quasi-affine.

LEMME 3.7. - *Soient* Y *un schéma, et* E^- *une partie quasi-compacte de* Y^- . *Alors les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Il existe un ouvert quasi-affine* U *de* Y *qui contient* E^- .

(ii) $\forall x \in E^-$, *il existe un ouvert* V_x *de* Y , *quasi-séparé, contenant* E^- , *et* $f_x \in \Gamma(V_x , O_Y)$, *tels que* $(V_x)_{f_x}$ *soit quasi-affine et contienne* x .

(i) $\Longrightarrow$ (ii) est bien clair.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : Comme E^- est quasi-compact, on peut recouvrir E^- par un nombre fini des $(V_x)_{f_x}$ correspondant aux points $x_1 , \dots , x_n$. Nous notons V_i et f_i les objets V_{x_i} et f_{x_i} . Posons $V = \bigcap_i V_i$ qui est un voisinage ouvert de E^- dans Y , et soit W un voisinage ouvert quasi-compact de E^- dans V . On a $W_{f_i} = W \cap (V_i)_{f_i}$, donc W_{f_i} est un ouvert d'un schéma quasi-affine ; il est quasi-compact (car rétro-compact dans W), donc il est quasi-affine. D'autre part, les W_{f_i} recouvrent E^- . Quitte à remplacer W par la réunion des W_{f_i} , on peut supposer que W est un ouvert quasi-compact recouvert par les ouverts W_{f_i} . Comme $W \subset V_i$, W est quasi-séparé ; il résulte alors de 3.5 que W est quasi-affine.

Ceci étant, prouvons maintenant 3.5. Nous allons vérifier la condition (ii) de 3.7. Soit donc $x \in X$, et soit U un ouvert affine de Y contenant x . Comme X est quasi-affine, il existe $f \in \Gamma(X , O_X)$ tel que X_f contienne x et soit contenu dans $U \cap X$. Soit V un ouvert quasi-compact de Y , contenant X , tel que f soit la restriction sur X d'une section (notée encore f) de O_Y sur V (2.3, (i)). Considérons l'ouvert quasi-compact V_f ; on a donc $V_f \cap X \subset U \cap X$, de sorte que le fermé F de V_f égal à $V_f - U \cap V_f$ ne rencontre pas X. Mais F est constructible dans V, donc (2.2), il existe un ouvert V_x de V, contenant X, qui ne rencontre pas F. On peut supposer V_x quasi-compact. On a alors $x \in V_x$ et $(V_x)_f$ contenu dans U, donc quasi-affine.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 3.8. - Soient Y un schéma dont les anneaux locaux sont noethériens, et $u : Y' \to Y$ un morphisme entier surjectif dont les fibres n'ont qu'un nombre fini de points. Alors, pour qu'une partie finie F de Y soit contenue dans un ouvert affine de Y, il faut et il suffit que $F' = u^{-1}(F)$ soit contenu dans un ouvert affine de Y'.

Démonstration. - La nécessité est claire, prouvons la suffisance. Quitte à restreindre Y à un voisinage ouvert convenable de F, on peut supposer Y quasi-compact et Y' quasi-affine, donc séparé. Comme u est entier surjectif, Y est aussi séparé. On peut supposer que deux points distincts de F ne sont pas spécialisations l'un de l'autre ; les points de F' possèdent alors la même propriété ; de plus, F' est fini puisque les fibres de u ne possèdent qu'un nombre fini de points. Soit E^- (resp. E'^-) la réunion des générisations des points de F (resp. F'). Le morphisme u étant fermé, il est immédiat que l'on a

$$(u^-)^{-1}(E^-) = E'^- .$$

L'ensemble fini F' est, par hypothèse, contenu dans un ouvert affine ; il en résulte que E'^- est admissible dans Y'. Plus précisément, il existe un monomorphisme plat $E' \to Y'$ d'image E'^-, et E' est affine semi-local. D'après 3.3, E^- est admissible. Soit $f : E \to Y$ le monomorphisme plat quasi-compact d'image E^-. Comme les anneaux locaux de Y sont noethériens, E est noethérien, mais alors E est affine (3.1). D'après 3.4, il existe un ouvert quasi-affine U de Y qui contient E, a fortiori, il existe un ouvert affine V de U qui contient l'ensemble fini F.

Application. - Soient S un schéma, et A un S-schéma abélien (i. e. un S-schéma en groupes, lisse, propre, à fibres connexes). Alors, toute partie finie de A qui se projette dans un ouvert affine de S est contenue dans un ouvert affine de A (N.-B. - En général, A n'est pas projectif sur S [6]).

On peut supposer S affine, puis, par passage à la limite (cf. EGA IV, 8), on peut supposer S de type fini sur $\underset{\sim}{Z}$, donc noethérien. Soit, alors, $\widetilde{S}$ le normalisé de S_{red}. D'après [5] (application au théorème 4), $\widetilde{A} = A \otimes_S \widetilde{S}$ est projectif sur $\widetilde{S}$, donc tout ensemble fini de points de $\widetilde{A}$ est contenu dans un ouvert affine; il suffit alors d'appliquer 3.7.

4. Application à la descente fidèlement plate quasi-compacte.

Pour ce qui concerne la théorie de la descente fidèlement plate quasi-compacte (en abrégé : f. p. q. c.) et la théorie élémentaire des faisceaux pour une topologie de Grothendieck, le lecteur pourra consulter [1] (chap. IV), et [4].

THÉORÈME 4.1. - Soient P un schéma, $P' \to P$ un morphisme fidèlement plat quasi-compact, X un P-faisceau pour la topologie f. p. q. c., tel que son image réciproque sur P' : $X' = X \times_P P'$ soit représentable par un P'-schéma localement de présentation finie. Soit, d'autre part, $Q \to P$ un morphisme entier surjectif, et supposons que $Y = X \times_P Q$ soit représentable. Alors :

(i) Si $R = Q \times_P Q$, le faisceau $Z = X \times_P R$ est représentable. Notons v_1 et v_2 les deux flèches canoniques de $Z \to Y$.

(ii) Pour que X soit représentable, il faut et il suffit que, pour tout point y de Y, $v_2\, v_1^{-1}(y)$ soit contenu dans un ouvert affine de Y.

La démonstration de ce théorème est compliquée par un certain nombre de passages à la limite techniques. Aussi, nous allons d'abord traiter un cas plus simple, où l'on fait des hypothèses noethériennes.

THÉORÈME 4.2. - Soient $P' \to P$ un morphisme fidèlement plat quasi-compact, X un P-faisceau f. p. q. c., tel que $X' = X \times_P P'$ soit représentable par un P' schéma localement noethérien. Soit, d'autre part, $Q \to P$ un morphisme fini surjectif, tel que $Y = X \times_P Q$ soit représentable. Alors :

(i) Si $R = Q \times_P Q$, le faisceau $Z = X \times_P R$ est représentable. Soient v_1 et v_2 les deux projections canoniques $Z \rightrightarrows Y$.

(ii) Pour que X soit représentable, il faut et il suffit que, $\forall\, y \in Y$, $v_2\, v_1^{-1}(y)$ soit contenu dans un ouvert affine de Y.

Démonstration de 4.1 et 4.2. - Fixons d'abord les notations. On pose $f : P' \to P$, $P'' = P' \times_P P'$, f'_1 et f'_2 les deux projections de P'' dans P'. On note $p : Q \to P$ le morphisme entier surjectif donné, et q_1, q_2 les deux projections $R = Q \times_P Q \rightrightarrows Q$. On note $u : Y \to X$ le morphisme de faisceaux déduit de p, et v_1, v_2 : $Z = Y \times_X Y \rightrightarrows Y$ les deux projections déduites de q_1, q_2. On affecte d'un indice ' (resp. ") les objets déduits d'objets au-dessus de P par le changement de base $f : P' \to P$ (resp. $ff'_1 = ff'_2 : P'' \to P$).

L'assertion (i) de 4.1 et 4.2 est immédiate, puisque Z est isomorphe au produit fibré $R \times_Q Y$, pour l'une ou l'autre des projections q_1, q_2 : $R \rightrightarrows Q$. La nécessité de la condition énoncée dans (ii) est claire, également, puisque

$$v_2\, v_1^{-1}(y) = u^{-1}(x) \ , \qquad \text{où} \quad x = u(y) \quad .$$

Pour voir que X est représentable, on peut supposer P affine ; P' est alors quasi-compact. Quitte à remplacer P' par une somme disjointe finie d'ouverts affines qui recouvrent P', on peut également supposer P' affine. Vu l'effectivité des données de descente f. p. q. c. sur les schémas quasi-affines ([3], VIII, 7.9), pour voir que X est représentable, il suffit de montrer que tout point x' de X' est contenu dans un ouvert quasi-affine de X', stable par la donnée de descente.

Fin de la démonstration de 4.2. - Soient donc x' un point de X', y' un relèvement de x' dans Y', y l'image de y' dans Y. Comme p est fini, il en est de même de v_2 et v_1, donc $T = v_2\, v_1^{-1}(y)$ est un ensemble fini de points de Y, contenant y, et on a évidemment $v_2^{-1}(T) = v_1^{-1}(T)$. Par hypothèse, il existe un ouvert affine de Y contenant T. On peut alors considérer le monomorphisme plat quasi-compact $j : F \overset{\subset}{\longrightarrow} Y$, dont l'image est l'ensemble des générisations des points de T, et F est un schéma affine semi-local.

LEMME 4.3. - *On a* $v_2^{-1}(F) = v_1^{-1}(F)$, *ces deux objets étant identifiés à des sous-foncteurs de* Z.

En effet, comme v_i $(i = 1 , 2)$ est entier, donc fermé, le morphisme $v_i^{-1}(F) \to Z$ est un monomorphisme plat quasi-compact, qui a pour image l'ensemble des générisations de $v_i^{-1}(T)$, et on a remarqué que $v_1^{-1}(T) = v_2^{-1}(T)$.

Soit alors $j' : F' \overset{\subset}{\longrightarrow} Y'$ le monomorphisme plat quasi-compact déduit de j par le changement de base $Y' \to Y$. Il résulte de 4.3 que l'on a

$$(v_1')^{-1}(F') = (v_2')^{-1}(F') \quad .$$

Donc $F'^{-} = (u'^{-})^{-1}(E'^{-})$, où E'^{-} est une partie de X' qui contient évidemment x'. Comme X' est noethérien, il résulte de 3.3 que E'^{-} est admissible dans X'. Notons $i' : E' \overset{\subset}{\longrightarrow} X'$ le monomorphisme plat quasi-compact associé à E'^{-}. On a alors $F' \simeq (u')^{-1}(E')$. Or, P, P' et F sont affines, donc F' est affine, et par suite (3.1, (ii)), E' est affine. Comme X' est localement noethérien, donc quasi-séparé, il résulte de 3.4, qu'il existe un ouvert U' de X', contenant E', qui est quasi-affine. Pour achever la démonstration, il suffit de montrer qu'il existe un ouvert $\widetilde{U}'$ de U' contenant E', qui est stable par la donnée de descente ; en effet, $\widetilde{U}'$ sera bien quasi-affine. Pour établir ce point, considérons l'image réciproque V' de U' dans Y'. Comme Y' est localement noethérien (car fini sur X'), $Y' - V'$ est pro-constructible dans Y', et il en est donc de même de son image M dans Y (EGA IV, 1.9.5, (vii)). Comme V' contient F', on a $M \cap F = \emptyset$, et par suite (2.2), il existe un ouvert $\widetilde{V}$ de Y, contenant F, tel que $\widetilde{V} \cap M = \emptyset$. Comme v_2 et v_1 sont fermés, on voit (compte tenu de 4.3), que, quitte à remplacer $\widetilde{V}$ par l'ouvert $Y - v_2(v_1^{-1}(Y - \widetilde{V}))$, on peut supposer que l'on a de plus $v_1^{-1}(\widetilde{V}) = v_2^{-1}(\widetilde{V})$. L'image réciproque $\widetilde{V}'$ de $\widetilde{V}$ dans Y' est évidemment contenue dans V', et l'on a $(v_1')^{-1}(\widetilde{V}') = (v_2')^{-1}(\widetilde{V}')$, donc $\widetilde{V}'$ est l'image réciproque par u' d'un ouvert $\widetilde{U}'$ de U', et $\widetilde{U}'$ contient E'. Il reste à voir que $\widetilde{U}'$ est stable par la donnée de descente sur X', i. e. que les deux images réciproques de $\widetilde{U}'$ dans X'' coïncident. Or, comme $Y'' \to X''$ est surjectif, il suffit de voir que les deux images réciproques de $\widetilde{V}'$ dans Y'' coïncident, ce qui est bien clair puisque $\widetilde{V}'$ provient de $\widetilde{V}$.

Fin de la démonstration de 4.1.

1° $\forall\, p \in P$, la fibre X_p de X est représentable. - Pour établir ce point, on peut supposer que P est le spectre d'un corps k, et que Q est le spectre d'un corps K entier sur k. Soient alors $y \in Y$, et U un ouvert affine de Y contenant $v_2\, v_1^{-1}(y)$. Comme v_2 est fermé, $U - v_2\, v_1^{-1}(Y - U)$ est un ouvert de Y, contenu dans U, donc quasi-affine (U étant noethérien), contenant y, et tel que $v_2^{-1}(U) = v_1^{-1}(U)$. On voit donc que l'on peut recouvrir Y par des ouverts quasi-affines, stables par la donnée de descente f. p. q. c. relative à

$$\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(k) \quad ,$$

d'où la représentabilité de X.

Procédant comme dans la démonstration de 4.2, nous choisissons un point x' de X', un point y' de Y' au-dessus de x', et soit y l'image de y' dans Y. Nous allons construire un ouvert quasi-affine de X', contenant x', stable par la donnée de descente sur X' relative au morphisme $P' \to P$.

2° Réduction au cas où X' est séparé. - Soit V un ouvert affine de Y contenant $v_2\, v_1^{-1}(y)$. Considérons l'ouvert $W = V - v_2\, v_1^{-1}(Y - V)$ qui est contenu dans V, donc est séparé, qui contient y, et est tel que $v_2^{-1}(W) = v_1^{-1}(W)$. Comme $Y' \to X'$ est fermé, W' est l'image réciproque d'un ouvert U' de X'. Quitte à remplacer Y par W et X' par U', on peut donc supposer Y séparé, auquel cas X' est aussi séparé.

3° Réduction au cas où p est fini, de présentation finie, et X' de présentation finie sur P'. - Soit encore V un ouvert affine de Y contenant $v_2 v_1^{-1}(y)$, et considérons Q comme limite projective de P schémas finis, de présentation finie Q_i $(i \in I)$. A fortiori, le morphisme $Q_i \to P$ est surjectif. Comme X' est, par hypothèse, localement de présentation finie sur P', Y est localement de présentation finie sur Q, et par suite, V est de présentation finie sur Q. On peut donc supposer qu'il existe $i_0 \in I$ et un Q_{i_0}-schéma affine, de présentation finie V_{i_0}, tel que V provienne de V_{i_0} par le changement de base $Q \to Q_{i_0}$. Pour $i \geqslant i_0$, notons V_i l'image réciproque de V_{i_0} par le morphisme $Q_i \to Q_{i_0}$. Comme X' est localement de présentation finie sur P', le foncteur X commute aux limites inductives d'anneaux (cf. EGA IV, 8.14), en particulier, on a

$$X(V) = \varinjlim_{i \geqslant i_0} X(V_i) \quad .$$

Pour i assez grand, le morphisme canonique $V \to X$ obtenu par restriction de u à V, provient donc d'un P-morphisme $V_i \to X$. Ce dernier définit un Q_i-morphisme $V_i \to X_{Q_i}$. Soit $V'_i \to X'_{Q'_i}$ le morphisme obtenu par le changement de base $Q'_i \to Q_i$. Par passage à la limite, on obtient l'immersion ouverte $V' \to Y'$, donc, pour i assez grand, $V'_i \to X'_{Q'_i}$ est une immersion ouverte, et par suite, il en est de même de $V_i \to X_{Q_i}$. Bref, pour i assez grand, il existe un ouvert affine V_i de X_{Q_i} qui, par le changement de base $Q \to Q_i$, donne l'ouvert V. On note

$$R_i = Q_i \times_P Q_i \,, \qquad u_i : X_{Q_i} \to X \,, \qquad (v_i)_1 \text{ et } (v_i)_2 : X_{R_i} \to X_{Q_i}$$

les projections canoniques. Soient p l'image de y dans P, et x l'image de y dans X_p (qui est représentable, d'après le 1°). Par hypothèse, V contient $u_p^{-1}(x) = v_2\, v_1^{-1}(y)$. On peut donc supposer i choisi assez grand pour que V_i contienne $(u_i)_p^{-1}(x)$. Soit alors $(V_i)_j$ l'ouvert de X_{R_i}, image réciproque de V_i par le morphisme $(v_i)_j$ $(j = 1\,,\,2)$. Comme X' est séparé d'après le 2°, $(V_i)_1 \cap (V_i)_2$ est un ouvert affine, de sorte que $(V_i)_2 - (V_i)_1$ est une partie constructible de $(V_i)_2$. Le morphisme $(v_i)_2$ étant de présentation finie (car $Q_i \to P$ est de présentation finie), $(v_i)_2\ ((V_i)_2 - (V_i)_1)$ est une partie constructible de V_i (EGA IV, 1.8.4.1), de sorte que son complémentaire W_i dans V_i est une partie constructible de V_i. Comme $Q_i \to P$ est fini, W_i est un ouvert; étant constructible, il est quasi-compact, et par suite il est quasi-affine, de présentation finie sur Q_i. D'autre part, il est clair que W_i contient $(u_i)_p^{-1}(x)$, et que $(v_i)_1^{-1}(W_i) = (v_i)_2^{-1}(W_i)$. L'ouvert W_i' de $X'_{Q_i'}$ est donc l'image réciproque d'un ouvert U' de X' . Il nous suffit alors de remplacer Q par Q_i , Y par W_i , et X' par U' , pour être ramené au cas où p est fini, de présentation finie, Y quasi-affine et X' de présentation finie.

4° Réduction au cas où $f : P' \to P$ est de présentation finie. – Comme P et P' sont affines, P' est limite projective de P-schémas affines P_i $(i \in I)$, de présentation finie sur P (bien sûr, on ne demande pas que les morphismes $P_i \to P$ soient plats). Le schéma X' étant de présentation finie sur P' (d'après le 3°), X' provient, pour i assez grand, d'uh P_i-schéma X_i , de présentation finie sur P_i . Un raisonnement analogue à celui fait dans le 3°, montre alors que l'on peut supposer que $X_i = X_{P_i}$. Désormais, l'indice i est fixé, assez grand, pour que X_{P_i} soit représentable par le schéma X_i .

5° Réduction au cas où P est noethérien. – Le schéma affine P est limite projective filtrante de schémas affines P^α $(\alpha \in A)$, de type fini sur $\underline{\underline{Z}}$. Pour α assez grand, les schémas Q , Y , P_i , X_i , qui sont de présentation finie sur P , proviennent de schémas Q^α , Y^α , P_i^α , X_i^α , de présentation finie sur P^α . On peut de plus supposer que le morphisme $Q^\alpha \to P^\alpha$ est fini, surjectif. Comme Y est l'image réciproque de X , Y est muni d'une donnée de descente D , relativement au morphisme $p : Q \to P$. Pour α assez grand, on peut donc supposer que les conditions suivantes sont réalisées :

(☆) La donnée de descente D provient d'une donnée de descente D^α sur Y^α , relativement au morphisme $Q^\alpha \to P^\alpha$.

(☆☆) L'ensemble fini $T = v_2 v_1^{-1}(y)$, de points de Y , provient d'un ensemble fini T^α de points de Y^α , stable par D^α , et contenu dans un ouvert affine de Y^α .

Posons alors $Q_i^\alpha = Q^\alpha \times_{P^\alpha} P_i^\alpha$, $Y_i^\alpha = Y^\alpha \times_{Q^\alpha} Q_i^\alpha$, et soit D_i^α la donnée de descente sur Y_i^α , relativement à $Q_i^\alpha \to P_i^\alpha$, déduite de D^α par le changement de base $P_i^\alpha \to P^\alpha$. Comme l'on a $Y_i = Y \times_P P_i = X \times_P Q_i = (X_i) \times_{P_i} Q_i$, on peut supposer, pour α assez grand, que la condition suivante est réalisée :

(☆☆☆) Il existe un Q_i^α-isomorphisme $\tau_i^\alpha : Y_i^\alpha \xrightarrow{\sim} X_i^\alpha \times_{P_i^\alpha} Q_i^\alpha$, et la donnée de descente D_i^α sur Y_i^α , s'identifie, grâce à τ_i^α , à la donnée de descente canonique sur $X_i^\alpha \times_{P_i^\alpha} Q_i^\alpha$, relativement au morphisme $Q_i^\alpha \to P_i^\alpha$.

6° <u>Fin de la démonstration</u>. - Comme T^α est contenu dans un ouvert affine de Y^α, on peut considérer le monomorphisme plat quasi-compact $s^\alpha : F^\alpha \hookrightarrow Y^\alpha$, qui a pour image l'ensemble des générisations des points de T^α, et F^α est affine, semi-local. Comme T^α est stable sous D^α (☆☆), il en est de même de s^α (cf. 4.3). Soit alors

$$s_i^\alpha : F_i^\alpha \hookrightarrow Y_i^\alpha \xrightarrow{\sim} X_i^\alpha \times_{P_i^\alpha} Q_i^\alpha$$

le monomorphisme plat déduit de s^α par le changement de base $Q_i^\alpha \to Q^\alpha$, suivi de la composition avec l'isomorphisme τ_i^α. Il résulte alors de ce qui précède et de (☆☆☆), que s_i^α est stable par la donnée de descente canonique sur $X_i^\alpha \times_{P_i^\alpha} Q_i^\alpha$, relativement au morphisme $Q_i^\alpha \to P_i^\alpha$. Mais alors, d'après 3.3, s_i^α provient d'un monomorphisme plat quasi-compact $r_i^\alpha : E_i^\alpha \hookrightarrow X_i^\alpha$. De plus, comme F^α est affine, il en est de même de F_i^α, donc aussi de E_i^α (3.1). D'après 3.4, E_i^α est contenu dans un ouvert quasi-affine $U_i'^\alpha$ de X_i^α. Procédons alors comme dans la fin de la démonstration de 4.2. Soit $V_i'^\alpha$ l'image réciproque de $U_i'^\alpha$ dans Y_i^α, et soit M^α l'image de $Y_i^\alpha - V_i'^\alpha$ dans Y^α. Alors M^α est une partie constructible de Y^α, et $M^\alpha \cap F^{\alpha -} = \emptyset$. Il existe donc un ouvert V^α de Y^α, contenant $F^{\alpha -}$, tel que $V^\alpha \cap M^\alpha = \emptyset$ (2.2). Comme F^α est stable sous D^α, et comme $Q^\alpha \to P^\alpha$ est universellement fermé, on voit que, quitte à diminuer V^α, on peut supposer de plus que V^α est stable sous D^α. L'image réciproque V_i^α de V^α dans Y_i^α est alors stable sous D_i^α, donc, d'après (☆☆☆), est l'image réciproque d'un ouvert U_i^α de X_i^α. D'autre part, il est clair que U_i^α contient E_i^α, et que U_i^α est contenu dans $U_i'^\alpha$, donc est quasi-affine. Soient alors V l'image réciproque de V^α dans Y, V_i (resp. V') l'image réciproque de V_i^α dans Y_i (resp. Y'), U_i (resp. U') l'image réciproque de U_i^α dans X_i (resp. X'). Il résulte alors des constructions faites, que V' est à la fois l'image réciproque de V par le morphisme $Y' \to Y$ et l'image réciproque de U' par le morphisme $Y' \to X'$. Comme $Q \to P$ est surjectif, il en résulte immédiatement que U' est stable par la donnée de descente sur X', relative à $P' \to P$. D'autre part, U' est quasi-affine et contient x', ce qui achève la démonstration de 4.1.

<u>Applications</u>. - On trouvera quelques applications de 3.7 et 4.1 concernant les schémas en groupes et les espaces homogènes sous iceux, dans [6], chap. IX.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DEMAZURE (Michel) et GROTHENDIECK (Alexander). - Schémas en groupes, Séminaire de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques : Géométrie algébrique, 1963/64, fasc. 1 à 7.

[2] GROTHENDIECK (Alexander) et DIEUDONNÉ (Jean). - Eléments de géométrie algébrique [cité EGA], I à IV. - Paris, Presses universitaires de France, 1960 à 1967 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28 et 32).

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Revêtements étales et groupe fondamental, Séminaire de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques : Géométrie algébrique, 1960/61, fasc. 1 et 2.

[4] GROTHENDIECK (Alexander). - Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. I : Généralités, Descente par morphismes fidèlement plats, Séminaire Bourbaki, 12e année, 1959/60, n° 190, 29 p.

[5] MURRE (J. P.). - Representation of unramified functors, Séminaire Bourbaki, 17e année, 1964/65, n° 294, 19 p.

[6] RAYNAUD (Michel). - Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes (à paraître).

[7] RAYNAUD (Michel). - Sur le passage au quotient par un groupoïde plat, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 165, 1967, Série A, p. 384-387.