Séminaire Samuel.
Algèbre commutative

Norbert Roby

Diverses caractérisations des épimorphismes

Séminaire Samuel. Algèbre commutative, tome 2 (1967-1968), exp. n° 3, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SAC_1967-1968__2__A3_0>

15 novembre 1967

DIVERSES CARACTÉRISATIONS DES ÉPIMORPHISMES

par Norbert ROBY

Tous les anneaux et les algèbres considérés ici sont unitaires et commutatifs (sauf, bien sûr, les algèbres telles que les algèbres tensorielles de modules). Une sous-algèbre R d'une algèbre S sera toujours supposée contenir l'unité de S. Quand nous écrirons une inclusion d'algèbres telle que $R \subset S$, cela signifiera que R est une sous-algèbre de S. Enfin, tous les homomorphismes d'anneaux sont supposés transporter l'un sur l'autre les éléments unités.

On notera parfois 1_R l'unité d'un anneau R. On renoncera donc à noter 1_E l'application identique d'un ensemble E.

1. La catégorie Communal_A et ses épimorphismes.

Soit A un anneau. Nous désignons par Communal_A la catégorie dont les objets sont les algèbres commutatives unitaires sur A, les morphismes étant les homomorphismes d'algèbres.

La catégorie Communal_A est intéressante à étudier. Dans cette catégorie, il existe des noyaux, des conoyaux, des carrés universels et co-universels, donc aussi des images et des co-images. Il y a des sommes directes et des produits directs, un objet initial et un objet final. Mais cette étude ne sera pas faite ici.

Nous examinerons ce que sont les épimorphismes de la catégorie Communal_A. Un morphisme $\alpha : R' \to S$ de A-algèbres est un épimorphisme si, pour tout A-algèbre T et tout couple (f , g) de morphismes $S \to T$, la relation $f \circ \alpha = g \circ \alpha$ entraîne $f = g$.

Soit R l'image de R' dans S par α (au sens ensembliste). Il est clair que α est un épimorphisme si, et seulement si, l'injection canonique $R \to S$ est un épimorphisme.

DÉFINITIONS. - Nous disons qu'une sous-A-algèbre R d'une A-algèbre S est A-dense dans S si l'injection canonique $R \to S$ est un épimorphisme de Communal_A.

Nous disons qu'un sous-anneau R d'un anneau S est dense dans S si R est $\mathbf{Z}$-dense dans S.

Dire que R est A-dense (resp. dense) dans S signifie donc que chaque fois que deux morphismes de A-algèbres (resp. d'anneaux) définis sur S coïncident sur R, ils coïncident sur S.

PROPOSITION 1. - Soient A un anneau commutatif, S une A-algèbre, R une sous-A-algèbre de S. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) R est A-dense dans S ;

(ii) Pour toute R-algèbre T, il existe au plus un R-homomorphisme d'algèbres de S dans T ;

(iii) R est dense dans S.

Il suffit de montrer que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii). En effet, (ii) ne fait pas intervenir l'anneau A ; or une A-algèbre est aussi un anneau c'est-à-dire une $\mathbb{Z}$-algèbre.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). - On suppose (i) vraie. Soient f et g deux R-homomorphismes d'algèbres de S dans une R-algèbre T. Ce sont, en particulier, des A-homomorphismes d'algèbres ; il coïncident sur R car, en vertu de la R-linéarité, on a pour $r \in R$: $f(r) = r1_T = g(r)$. Donc $f = g$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). - On suppose (ii) vraie. Soient f et g deux A-homomorphismes d'algèbres de S dans une A-algèbre T ; soient Φ et ψ leurs restrictions à R. Supposons que $\Phi = \psi$: il faut montrer que $f = g$.

L'application $\Phi : R \to T$ permet de munir T d'une structure de R-algèbre, en posant, pour $r \in R$ et $t \in T$: $rt = \Phi(r)t$. Alors, l'application $f : S \to T$ est R-linéaire ; pour $r \in R$ et $s \in S$, on a en effet

$$f(rs) = f(r)\, f(s) = \Phi(r)\, f(s) = rf(s) .$$

De même, $g : S \to T$ est R-linéaire. D'après (ii), on a donc $f = g$.

2. Caractérisations de la densité.

THÉORÈME 1. - Soient S un anneau et R un sous-anneau de R (plus généralement un homomorphisme d'anneaux $f : R \to S$).

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) R est dense dans S (i. e. f est un épimorphisme) ;

(ii) Pour toute R-algèbre T, il existe au plus un R-homomorphisme d'algèbres de S dans T ;

(iii) Pour tout $s \in S$, on a, dans $S \otimes_R S$, la relation $s \otimes_R 1 = 1 \otimes_R s$.

(iv) <u>La surjection canonique</u> $\mu : S \otimes_R S \to S$, <u>définie par</u> $s \otimes_R s' \mapsto ss'$, <u>est injective (donc est un isomorphisme de</u> R-<u>algèbres</u>) ;

$(v)_1$ (resp. $(v)_2$) <u>L'injection canonique</u> i_1 (<u>resp</u>. i_2) : $S \to S \otimes_R S$, <u>définie par</u> $s \mapsto s \otimes_R 1$ (<u>resp</u>. $1 \otimes_R s$), <u>est surjective (donc est un isomorphisme de</u> R-<u>algèbres</u>) ;

(vi) $T_R(S)$, <u>l'algèbre tensorielle sur</u> R <u>du</u> R-<u>module</u> S , <u>est commutative</u> ;

(vii) <u>On a la relation suivante entre</u> R-<u>modules</u> : $S \otimes_R S/R = 0$;

(viii) <u>Pour toute</u> R-<u>algèbre</u> T , <u>il existe au plus un</u> R-<u>homomorphisme</u> f <u>du</u> R-<u>module</u> S <u>dans le</u> R-<u>module</u> T , <u>tel que</u> $f(1_S) = 1_T$;

(ix) <u>Pour tout</u> $s \in S$, <u>il existe deux familles finies</u> s'_i $(i = 1 , \ldots , n)$ <u>et</u> s''_j $(j = 1 , \ldots , m)$ <u>d'éléments de</u> S <u>et une famille</u> r_{ij} (i , j <u>comme ci-devant) d'éléments de</u> R <u>telles que</u> :

$$s = \sum_{i,j} r_{ij}\, s'_i\, s''_j \ , \quad \sum_i r_{ij}\, s'_i \in R \ \text{ pour tout } j \ , \quad \sum_j r_{ij}\, s''_j \in R \ \text{ pour tout } i \ .$$

<u>Démonstration</u>. - On écrira $\otimes$ pour $\otimes_R$. On sait déjà que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) (proposition 1).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). - Il existe deux R-homomorphismes d'algèbres i_1 (resp. i_2) de S dans $S \otimes S$, définis aux points $(v)_1$ et $(v)_2$. D'après (ii), ils sont égaux. Donc $s \otimes 1 = 1 \otimes s$.

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv). - On sait que le noyau de $\mu : S \otimes S \to S$ est l'idéal de $S \otimes S$ engendré par les $s \otimes 1 - 1 \otimes s$ $(s \in S)$. (iii) équivaut à dire que ce noyau est nul, ce qui équivaut à (iv).

(iv) $\Longleftrightarrow$ $(v)_1$. - Dans tous les cas, $\mu \circ i_1$ est l'application identique de S . Donc, si μ (resp. i_1) est un isomorphisme, alors i_1 (resp. μ) en est un aussi : μ et i_1 sont inverses l'un de l'autre.

(iv) $\Longleftrightarrow$ $(v)_2$. - idem.

(iii) $\Longrightarrow$ (vi). - On suppose (iii) vraie. Soient s et t deux éléments de S . Dans l'algèbre $S \otimes S$, on a

$$s \otimes t = (s \otimes 1)(1 \otimes t) = (1 \otimes s)(t \otimes 1) = t \otimes s \ .$$

Il en résulte évidemment que $T_R(S)$ est commutative.

$(v)_1$ $\Longleftrightarrow$ (vii). - Considérons l'application canonique de R-modules $q : S \to S/R$. On a une surjection $\overline{q} : S \otimes S \to S \otimes S/R$, définie par

$$s \otimes s' \mapsto s \otimes q(s') \ .$$

Le noyau de $\bar{q}$ est le sous-module de $S \otimes S$ engendré par les éléments $s \otimes r$, avec $s \in S$ et $r \in R$. C'est donc aussi le sous-module engendré par les éléments $s \otimes 1$, c'est-à-dire l'image de i_1. Dire que i_1 est surjective équivaut donc à dire que $\bar{q}$ a une image nulle, autrement dit $(v)_1 \iff (vii)$.

(vi) $\Longrightarrow$ (viii). - On suppose (vi) vraie. Soient f et g deux homomorphismes de R-module S dans une R-algèbre T, tels que $f(1_S) = g(1_S) = 1_T$. Soit β l'application $S \times S$ dans T, définie par $\beta(s, s') = f(s)\, g(s')$. Alors β est R-bilinéaire et, en vertu de (vi), β est symétrique. Donc $f(s)\, g(s') = f(s')\, g(s)$. En prenant $s' = 1_S$, on a :

$$f(s) = g(s) , \qquad \text{donc } f = g .$$

(viii) $\Longrightarrow$ (ii). - C'est évident, car un R-homomorphisme d'algèbres est en particulier un R-homomorphisme de modules transformant 1_S en 1_T. Enfin l'équivalence de (ix) et de (i) a été démontrée dans l'exposé de P. MAZET.

Compte tenu de cette remarque, le théorème 1 est démontré, conformément au schéma logique :

$$\begin{tikzcd}
(i) \arrow[r, Leftrightarrow] & (ii) \arrow[r, Rightarrow] & (iii) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (iv) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & (v)_1 \arrow[r, Leftrightarrow] & (vii) \\
(viii) \arrow[u, Rightarrow] & (vi) \arrow[l, Rightarrow] & & (v)_2 & &
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION 2. - Soient S un anneau et R un sous-anneau dense dans S. Soient T une R-algèbre et f un homomorphisme du R-module S dans le R-module T, tel que $f(1_S) = 1_T$. Alors, f est aussi un homomorphisme de R-algèbres.

Considérons, en effet, l'application R-linéaire Φ de $S \otimes S$ dans T, définie par $\Phi(s \otimes s') = f(s)\, f(s')$. Comme $s \otimes s' = 1 \otimes ss'$ (d'après (iii)), on a donc :

$$f(s)\, f(s') = \Phi(s \otimes s') = \Phi(1 \otimes ss') = f(1)\, f(ss') = f(ss') .$$

3. Anneaux denses dans des sur-modules.

La propriété, pour un anneau R, d'être dense dans un anneau S, ne fait intervenir que la structure de R-module de S : c'est ce qui ressort, par exemple, dans chacune des caractérisations (vi) ou (vii) du théorème 1. Nous allons préciser ce fait.

DÉFINITION. - Soient R un anneau et S un sur-R-module du R-module R. Nous dirons que R est dense dans le module S s'il existe sur S une structure d'anneau prolongeant sa structure de R-module telle que R soit un sous-anneau dense de l'anneau S .

PROPOSITION 3. - Soient R un anneau et S un sur-R-module de R . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) R est dense dans le module S ;

(ii) L'algèbre tensorielle de S sur R est commutative, et l'application R-linéaire $i_1 : S \to S \otimes_R S$, définie par $s \mapsto s \otimes_R 1$, est bijective.

Si ces conditions sont réalisées, il existe sur S une seule structure d'anneau prolongeant sa structure de R-module telle que R soit un sous-anneau de S (et c'est donc pour cette structure unique d'anneau que R est dense dans l'anneau S).

(i) $\Longrightarrow$ (ii). - Car ici (ii) résulte de (vi) et de $(v)_1$ du théorème 1.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). - On suppose que (ii) est vraie. Soient s et s' deux éléments de S .

D'après (ii), $s \otimes s'$ s'écrit de manière unique sous la forme $s'' \otimes 1$ avec $s'' \in S$. Posons $s'' = ss'$, de sorte que

$$s \otimes s' = ss' \otimes 1 .$$

On va vérifier que l'application de $S \times S$ dans S , définie par $(s , s') \mapsto ss'$ jointe à la structure additive de S , fait de S un anneau dont R est un sous-anneau ; cet anneau sera commutatif du fait que $s \otimes s' = s' \otimes s$. D'abord, l'isomorphisme

$$i_1 : S \to S \otimes S \quad (s' \mapsto s' \otimes 1)$$

entraîne un isomorphisme

$$i'_1 : S \to S \otimes S \otimes S \quad (s \otimes s' \mapsto s \otimes s' \otimes 1) ;$$

d'où, en composant, un isomorphisme

$$i''_1 : S \to S \otimes S \otimes S \quad (s \mapsto s \otimes 1 \otimes 1) .$$

Cela étant, pour s , s' et s'' dans S on a, dans $S \otimes S \otimes S$:

$$\begin{aligned} s \otimes s' \otimes s'' &= (ss') \otimes 1 \otimes s'' \\ &= (ss') \otimes s'' \otimes 1 \quad (\text{commutativité de } T(S)\ ) = (ss')s'' \otimes 1 \otimes 1 \end{aligned}$$

et aussi

$$= s \otimes s's'' \otimes 1 = s(s's'') \otimes 1 \otimes 1 .$$

D'où $(ss')s'' = s(s's'')$ (associativité).

Dans $S \otimes S$, on a :

$$(s + s')s'' \otimes 1 = (s + s') \otimes s'' = s \otimes s'' + s' \otimes s'' = ss'' \otimes 1 + s's'' \otimes 1$$
$$= (ss'' + s's'') \otimes 1 ,$$

d'où $(s + s')s'' = ss'' + s's''$ (distributivité).

Le fait que $s \otimes 1 = 1 \otimes s = (s1) \otimes 1$ montre que 1 est un élément unité. De même, pour $r \in R$, rs (nouvelle définition) garde sa signification ancienne : la structure d'anneau de S prolonge sa structure de R-module. En particulier, R est un sous-anneau de S .

Du théorème 1, (vi), on déduit que R est dense dans l'anneau S , donc R est dense dans le module S .

Supposons qu'il existe une autre structure d'anneau sur S , prolongeant la structure de R-module, avec une multiplication $*$; (on note S_* le module S équipé en anneau par la multiplication $*$, tandis que l'expression "anneau S " désigne le module S équipé en anneau comme il vient d'être fait ci-dessus). L'anneau S_* est une R-algèbre, et l'application identique de S dans S_* est naturellement un isomorphisme de R-module conservant l'unité. Il résulte alors de la proposition 2 que cette application est aussi un isomorphisme d'anneaux, autrement dit les anneaux S et S_* sont identiques.

4. Exemples d'anneaux denses.

Outre le fait que tout anneau est dense dans lui-même, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4. - *Soient A un anneau, E une partie multiplicativement fermée de A qui ne contient aucun diviseur de 0 . Alors A est dense dans l'anneau de fractions $E^{-1} A$.*

On sait que si E ne contient aucun diviseur de 0 , A est un sous-anneau de $E^{-1} A$ quand on identifie $a \in A$ à $a/1 \in E^{-1} A$.

Soit $x \in E^{-1} A$; il s'écrit $x = a/e$, avec $a \in A$ et $e \in E$. Alors, dans $E^{-1} A \otimes_A E^{-1} A$, on a :

$$x \otimes 1 = x \otimes e/e = ex \otimes 1/e = a \otimes 1/e = 1 \otimes a/e = 1 \otimes x .$$

Donc A est dense dans $E^{-1} A$ (théorème 1, (iii)).

COROLLAIRE. - *Tout anneau intègre est dense dans son corps des fractions.*

5. Transitivité de la densité.

PROPOSITION 5. - Soient R, S, T trois anneaux dans la situation $R \subset S \subset T$.

(a) Si R est dense dans S et si S est dense dans T, alors R est dense dans T ;

(b) Si R est dense dans T, alors S est dense dans T ; il se peut que R ne soit pas dense dans S.

(a). - Soient f et g deux morphismes d'anneaux définis sur T et coïncidant sur R ; alors leurs restrictions à S coïncident (car R est dense dans S) ; donc f et g coïncident sur T (car S est dense dans T) ; R est dense dans T.

(b). - Soient f et g deux morphismes d'anneaux définis sur T et coïncidant sur S ; ils coïncident en particulier sur R, donc aussi sur T (car R est dense dans T) ; S est dense dans T.

Nous donnerons plus loin l'exemple d'une situation $R \subset S \subset T$, où R est dense dans T, mais pas dans S (n° 8).

6. Densité dans les anneaux intègres.

THÉORÈME 2. - Soient S un anneau, R un sous-anneau de S.

(a) Si R est un corps, il est dense dans S si, et seulement si, $R = S$.

(b) Si S est un corps, R est dense dans S si, et seulement si, S est le corps des fractions de R.

(a). - Si R est un corps, S est un espace vectoriel sur R. Supposons que R soit dense dans S. Alors $T_R(S)$ est commutative (théorème 1, (vi)). Cela ne peut avoir lieu que si S est de dimension 1 ou 0 sur R. Comme ici $R \subset S$, cela entraîne $R = S$.

(b). - Supposons R dense dans le corps S. Alors R est intègre, et son corps des fractions K est un sous-corps de S : $R \subset K \subset S$. D'après la proposition 5 (b), K est dense dans S ; d'après le théorème 2 (a), on a $K = S$; S est le corps des fractions de R. La réciproque constitue le corollaire de la proposition 4.

THÉORÈME 3. - Soient S un anneau intègre, R un sous-anneau de S, K le corps des fractions de R. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) R est dense dans S ;

(ii) On a $R \subset S \subset K$, et $S \otimes_R S$ est sans torsion sur R.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). - Soit K' le corps des fractions de S. On a $R \subset S \subset K'$. On sait que S est dense dans K'. Si R est dense dans S, alors R est dense dans K'. Donc $K' = K$ (théorème 2, (b)). On a bien $R \subset S \subset K$. En outre, le théorème 1, (iv), montre que $S \otimes_R S$ est R-isomorphe à S. Comme S est sans torsion sur R puisqu'intègre, $S \otimes_R S$ est aussi sans torsion sur R.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). - Supposons $R \subset S \subset K$, et soit $s \in S$. Dans K, on peut écrire $s = r_1/r_2$, avec $r_1 \in R$, $r_2 \in R$, $r_2 \neq 0$. Dans S, on a $r_2 s = r_1$ et, dans $S \otimes_R S$, on a

$$r_2(s \otimes 1 - 1 \otimes s) = r_2 s \otimes 1 - 1 \otimes r_2 s = r_1 \otimes 1 - 1 \otimes r_1 = r_1(1 \otimes 1 - 1 \otimes 1) = 0 .$$

Si $S \otimes_R S$ est sans torsion sur R, on en déduit : $s \otimes 1 = 1 \otimes s$. Donc R est dense dans S (théorème 1, (iii)).

7. Densité d'un anneau intègre dans un anneau quelconque.

PROPOSITION 6. - *Soient* S *un anneau et* R *un sous-anneau intègre de* S *qui est dense dans* S *; soit* $\mathfrak{t}$ *l'idéal de torsion de* S *sur* R. *Alors* :

(i) $\mathfrak{t}$ *est un idéal premier de* S ;

(ii) R *est dense dans l'anneau intègre* $S/\mathfrak{t}$.

Soit K le corps des fractions de R. De l'isomorphisme d'algèbres tensorielles $T_k(S \otimes_R K) \simeq T_R(S) \otimes_R K$, et du fait que $T_R(S)$ est commutative, on déduit que $T_k(S \otimes_R K)$ est commutative, donc que $S \otimes_R K$ est un K-espace vectoriel de dimension 0 ou 1. Mais $1_S \otimes_R 1_K \neq 0$, car 1_S est sans torsion sur R. On a donc $S \otimes_R K \simeq K$. L'application canonique $S \to S \otimes_R K$ est un homomorphisme d'algèbres dont le noyau est $\mathfrak{t}$ et dont l'image est intègre (car contenue dans un corps). Donc $\mathfrak{t}$ est un idéal premier de S.

On a $R \cap \mathfrak{t} = \{0\}$, car R est intègre. Par passage aux quotients, l'injection $R \to S$ donne donc une injection $R \to S/\mathfrak{t}$. En outre, $T_R(S/\mathfrak{t})$ est une algèbre quotient de $T_R(S)$, donc est commutative ; R est dense dans $S/\mathfrak{t}$.

COROLLAIRE. - *Si* R, *intègre, est dense dans* S, *et si* S *est sans torsion sur* R, *alors* S *est intègre*.

En effet, $\{0\}$ est alors un idéal premier de S.

8. Deux exemples.

(a) Soient A un anneau intègre, et a un élément ni nul ni inversible de A. L'épimorphisme injectif

$$(1) \qquad A \to A_a \times A/Aa ,$$

vu à la fin de l'introduction, donne un exemple d'un anneau intègre dense dans un anneau non-intègre. On peut présenter cet exemple de façon un peu différente : le second membre est isomorphe à l'anneau quotient

$$(2) \qquad B = A[X]/(a(aX - 1) , X(aX - 1)) .$$

En effet, en notant x la classe de X dans B, on a $a^2 x = a$ et $ax^2 = x$; ainsi $e = ax$ est un idempotent de B, et on voit que $B/Be = A/Aa$ et $B/B(1 - e) = A[X]/(aX - 1) = A_a$. Une généralisation de (2) sera étudiée dans l'exposé de J.-P. OLIVIER.

(b) Situation $R \subset S \subset T$, où R est dense dans T, mais pas dans S.

Soient A un anneau intègre, et a un élément ni nul ni inversible de A. On prend, pour S, l'anneau de polynômes $A[X]$, pour R le sous-anneau $A[aX]$, et pour T leur corps des fractions communs. Alors R est dense dans T. Pour montrer que R n'est pas dense dans S, considérons l'anneau

$$B = A[u , v , w] \qquad \text{avec} \quad u = av = aw$$

(i. e. le quotient de $A[U , V , W]$ par l'idéal $(U - aV , U - aW)$), et les A-homomorphismes f, g de $S = A[X]$ dans B, définis par $f(X) = v$, $g(Y) = w$; ils coïncident sur R, car $f(aX) = g(aX) = u$, et sont distincts sur S. Les épimorphismes d'un anneau intègre dans les sous-anneaux de son corps des fractions seront étudiés plus systématiquement dans les exposés de D. LAZARD et de D. FERRAND.

Annexe

Epimorphismes finis

(d'après une lettre de G. SABBAG)

On dit qu'un A-module M possède la propriété (C) si tout quotient non-nul de M admet un quotient monogène non-nul ; il revient au même de dire que tout sous-module N de M, distinct de M, est contenu dans un sous-module maximal parmi ceux qui sont distincts de M. Il est clair qu'un module de type fini possède la propriété (C).

LEMME. - *Si un* A-*module* M *possède la propriété* (C) *et si* P *est un quotient de* M , *alors* $P \otimes_A P = 0$ *implique* $P = 0$.

En effet, si $P \neq 0$, il admet un quotient monogène $P' \neq 0$. Or $P' \otimes P' = P'$, car P' est monogène ; d'autre part, $P' \otimes P'$ est un quotient de $P \otimes P$, donc est nul. D'où $P' = 0$ contradiction.

PROPOSITION 7. - *Soit* $f : A \to B$ *un épimorphisme d'anneaux. Si le* A-*module* B *possède la propriété* (C) (*en particulier si* f *est fini, i. e. si* B *est un* A-*module de type fini*), *alors* f *est surjectif*.

En effet, on a $B \otimes_A B/f(A) = 0$ (théorème 1, (vii)), d'où $B/f(A) \otimes B/f(A) = 0$, et $B/f(A) = 0$ par le lemme.

On trouvera une autre démonstration de la proposition 6 dans l'exposé de D. LAZARD.

Remarque. - John R. ISBELL nous a fait savoir que, pour que tout A-module M ait la propriété (C), il faut et il suffit que les idéaux principaux de A vérifient la condition *minimale*. En particulier, un épimorphisme, dont la source est un anneau *artinien* (par exemple *fini*), est surjectif.

Compléments au texte

Le théorème 3 du § 6 admet les corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. - *Avec les notations du théorème 3, si l'on a :* $R \subset S \subset K$ *et si* S *est plat sur* R , *alors* R *est dense dans* S .

En effet, si S est plat sur R , alors $S \otimes_R S$ est plat aussi, donc est sans torsion.

COROLLAIRE 2. - *Si l'on a* $R \subset S \subset K$ *et si* R *est un anneau de Dedekind, alors* R *est dense dans* S .

En effet, S est intègre, donc sans torsion sur R , donc il est plat sur R .

De plus, dans la proposition 6 du § 7, on peut remarquer que :

(iii) $\mathfrak{t}$ *est le plus grand des idéaux* $\mathfrak{a}$ *de* S *tels que* $\mathfrak{a} \cap R = 0$. En effet, si $\mathfrak{a}$ est un idéal de S tel que $\mathfrak{a} \cap R = 0$, on voit que R est dense dans $S/\mathfrak{a}$; d'où $S/\mathfrak{a} \otimes_R K = K$.

Considérons alors le diagramme suivant d'applications canoniques :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "u"] \arrow[d, "q"'] & S \otimes K \simeq K \arrow[d, "q'"'] \\ S/\mathfrak{a} \arrow[r, "v"] & S/\mathfrak{a} \otimes K \simeq K \end{tikzcd}$$

Il est commutatif et q' ne peut être qu'un isomorphisme. On a

$$\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ker}(v \circ q) = \mathrm{Ker}(q' \circ u) = \mathrm{Ker}\, u = \mathfrak{t} ,$$

donc $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{t}$,

C. Q. F. D.

Compléments sur les spectres d'anneaux

Nous notons $\mathrm{Spec}(R)$ l'ensemble des idéaux premiers d'un anneau R . Si $R \subset S$, il existe une application canonique φ_R^S : $\mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$, définie par $J \longmapsto J \cap R$. Nous notons $\mathrm{Spec}(R|S)$ l'ensemble des idéaux premiers I de R tels que $IS \cap R = I$.

THÉORÈME 4. - Soient S un anneau, R un sous-anneau dense de S . Alors :

(i) L'application canonique φ_R^S est une bijection de $\mathrm{Spec}(S)$ sur $\mathrm{Spec}(R|S)$ (croissante pour la relation d'inclusion).

(ii) Soit ψ_R^S : $\mathrm{Spec}(R|S) \to \mathrm{Spec}(S)$ l'application réciproque de φ_R^S . Alors, pour $I \in \mathrm{Spec}(R|S)$, $\psi_R^S(I)$ est l'ensemble des éléments $s \in S$ pour lesquels il existe $r \in R$, $r \notin I$ avec $rs \in IS$.

(iii) Soit $I \in \mathrm{Spec}(R|S)$ et $J = \psi_R^S(I)$. Alors, J est le plus grand des idéaux $\mathfrak{a}$ de S dont l'intersection avec R est I .

Soit $J \in \mathrm{Spec}(S)$, et soit $I = \varphi_R^S(J) = J \cap R$. On a

$$I \subset IS \cap R \subset J \cap R = I ;$$

donc $I = IS \cap R$, de sorte que φ_R^S prend ses valeurs dans $\mathrm{Spec}(R|S)$. Désormais, on considère φ_R^S comme une application de $\mathrm{Spec}(S)$ dans $\mathrm{Spec}(R|S)$.

Soit $I \in \mathrm{Spec}(R|S)$. Considérons le diagramme commutatif suivant, où les flèches horizontales sont des injections :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d, "q"'] \\ R/I \arrow[r] & S/IS \end{tikzcd}$$

On prend $R/I \subset S/IS$; alors, R/I est dense dans S/IS (car l'injection canonique de R/I dans S/IS est un épimorphisme). En outre, R/I est intègre. Soit $\mathfrak{t}$ l'idéal de torsion de S/IS sur R/I. Pour $s \in S$, la condition $q(s) \in \mathfrak{t}$ équivaut à celle-ci : Il existe $r \in R$, $r \notin I$, avec $rs \in IS$. Soit $J = \psi_R^S(I)$ l'ensemble des $s \in S$ qui vérifient cette condition ; cette notation est en accord avec le (ii) du théorème. On a $J = q^{-1}(\mathfrak{t})$; comme $\mathfrak{t}$ est un idéal premier de S/IS alors J est un idéal premier de S. Soit $r' \in J \cap R$. Alors, il existe $r \in I$, $r \notin I$, tel que $rr' \in IS$; comme aussi $rr' \in R$, on a $rr' \in I$; comme $r \notin I$, on a $r' \in I$. Donc $J \cap R \subset I$.

Réciproquement, si $r' \in I$, on a

$$1.r' \in IS \quad \text{avec} \quad 1 \in R \text{ et } 1 \notin I ,$$

donc $r' \in J \cap R$. Ainsi, $J \cap R = I$. Autrement dit,

$$\varphi_R^S \circ \psi_R^S(I) = I ,$$

de sorte que φ_R^S est <u>surjective</u>.

Soit, en outre, $\mathfrak{a}$ un idéal de S tel que $\mathfrak{a} \cap R = I$. Si $a \in \mathfrak{a}$ est tel que $q(a) \in R/I$, on a :

$$a \in q^{-1}(R/I) = R + IS ,$$

soit $a = r + s$, avec $r \in R$ et $s \in IS$; mais $IS \subset \mathfrak{a}$, de sorte que

$$r = a - s \in \mathfrak{a} ;$$

alors, $r \in a \cap R = I \subset IS$, et finalement $a \in IS$, donc $q(a) = 0$. Donc, $q(\mathfrak{a})$ est un idéal de S/IS tel que $q(\mathfrak{a}) \cap R/I = 0$. On en déduit : $q(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{t}$, d'où $\mathfrak{a} \subset J$. Cela démontre (iii).

Supposons, plus particulièrement, que $\mathfrak{a}$ soit premier dans S. Pour $s \in J$, il existe $r \in R$, $r \notin I$ avec $rs \in IS \subset \mathfrak{a}$. Comme $r \notin \mathfrak{a}$, on a $s \in \mathfrak{a}$. Donc $J \subset \mathfrak{a}$ et finalement $J = \mathfrak{a}$. Cela montre que J est le seul idéal de Spec(S) dont la restriction à R soit I ; autrement dit φ_R^S est <u>injective</u>, et finalement <u>bijective</u>.

La relation $\varphi_R^S \circ \psi_R^S(I) = I$ montre alors que ψ_R^S est l'application réciproque de φ_R^S, ce qui achève de démontrer (ii).

C. Q. F. D.