Pierre Samuel

Introduction

Séminaire Samuel. Algèbre commutative, tome 2 (1967-1968), exp. nº 1, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SAC_1967-1968__2__A1_0>

INTRODUCTION

par Pierre SAMUEL

Un certain nombre de jeunes mathématiciens français ont récemment trouvé des résultats intéressants et variés sur les épimorphismes de la catégorie des anneaux commutatifs. Ils les ont exposés pendant la première partie du Séminaire d'Algèbre commutative, tenu à l'Ecole Normale Supérieure de Jeunes Filles, en 1967/68 [1]. Les textes qui suivent ne sont pas exactement conformes aux exposés faits, car la confrontation des résultats a permis d'en améliorer quelques-uns.

Les notations et la terminologie utilisées sont celles de BOURBAKI ("Algèbre commutative") et de GROTHENDIECK ("Eléments de Géométrie algébrique"). A priori, les résultats de ces ouvrages sont supposés connus, mais on s'est efforcé de ne pas exagérer et de rester accessible à la moyenne des algébristes (par exemple par des rappels).

Dans cet esprit, il est peut-être utile de commencer par quelques considérations élémentaires sur les notions d'épimorphisme et de monomorphisme dans une catégorie.

DÉFINITION 1. - Une flèche $u : A \to B$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ est appelée un épimorphisme (resp. monomorphisme) si, quels que soient l'objet C et la double flèche $(v , v') : B \rightrightarrows C$ (resp. $C \rightrightarrows A$), la relation $vu = v'u$ (resp. $uv = uv'$) implique $v = v'$.

On voit aussitôt que les épimorphismes (resp. monomorphismes) de la catégorie (Ens) des ensembles [2] sont les surjections (resp. les injections).

---

(1) Ce Séminaire d'Algèbre commutative a lieu depuis 1964/65. Jusqu'à présent seules une partie du Séminaire de 1966/67 ("Anneaux de Gorenstein et torsion en Algèbre commutative" , rédigé par M. MANGENEY, C. PESKINE et L. SZPIRO d'après des exposés de Maurice AUSLANDER. - Paris, Secrétariat mathématique, 1967), et la partie qui va suivre du Séminaire 1967/68, ont fait l'objet de rédactions multigraphiées. Dans le reste de ces séminaires, on a exposé des résultats maintenant publiés dans divers périodiques.

(2) Ici, comme dans la suite, nous omettons les génuflexions logiques usuelles. Le lecteur scrupuleux ajoutera de lui-même les univers (ou classes de Bernays-Gödel) nécessaires.

Nous nous intéresserons surtout aux catégories définies par les <u>espèces de structures avec morphismes</u> à la Bourbaki. Pour simplifier l'exposé, nous nous limiterons même à celles définies sur un ensemble de base unique, par exemple : groupes, anneaux, espaces topologiques, ensembles ordonnés, etc. Dans ce cas, nous avons une catégorie $\mathcal{C}$, munie d'un foncteur <u>fidèle</u> T de $\mathcal{C}$ dans (Ens) (le foncteur d'oubli de structure) ; dans ces conditions, la fidélité de T montre aussitôt la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - <u>Si une flèche</u> u <u>de</u> $\mathcal{C}$ <u>est telle que</u> $T(u)$ <u>soit une surjection (resp. une injection), alors</u> u <u>est un épimorphisme (resp. un monomorphisme)</u>.

En effet, $vu = v'u$ donne $T(v)\,T(u) = T(v')\,T(u)$, d'où $T(v) = T(v')$ (car $T(u)$ est surjective), et $v = v'$ (car T est fidèle).

C. Q. F. D.

C'est la réciproque de la proposition 1 qui va nous intéresser. Par abus de langage, nous dirons qu'une flèche u de $\mathcal{C}$ est injective (resp. surjective) si $T(u)$ est injective (resp. surjective).

<u>Cas des monomorphismes</u>. - Soit toujours $\mathcal{C}$ une catégorie munie d'un foncteur fidèle T de $\mathcal{C}$ dans (Ens). Moyennant une hypothèse souvent satisfaite, tout monomorphisme de $\mathcal{C}$ est injectif. Plus précisément, nous appellerons "<u>objet libre</u>" un couple $(L\ ,\ a)$ formé d'un objet L de $\mathcal{C}$ et d'un élément $a \in T(L)$ tels que pour tout objet X de $\mathcal{C}$ et tout élément $x \in T(X)$, il existe une flèche $w : L \to X$, et une seule, telle que $x = T(w)(a)$ (3).

<u>Exemples d'objets libres</u>.

(a) Pour $\mathcal{C} = (\mathrm{Gr})$ (ou (Ab)), on prend $L = \mathbb{Z}$, $a = 1$.

(b) Pour $\mathcal{C} = (\mathrm{Ann})$, on prend $L = \mathbb{Z}[X]$ et $a = X$.

(c) Pour $\mathcal{C} = (\mathrm{Top})$, on prend, pour L , l'espace réduit à un point a .

(d) Pour $\mathcal{C} = (\mathrm{Gr\ Top})$ ("groupes topologiques"), on prend $L = \mathbb{Z}$ muni de la topologie discrète, et $a = 1$. Le cas des anneaux topologiques est analogue.

(e) Pour la catégorie $\mathcal{C} = (\text{A-Mod})$ des A-modules unitaires à gauche sur un anneau (unitaire) A , on prend $L = A_s$ et $a = 1$.

(f) Pour $\mathcal{C} = (\mathrm{Ord})$, on prend, pour L , l'ensemble ordonné réduit à un élément a .

---

(3) Autrement dit, le couple $(L\ ,\ a)$ <u>représente</u> le foncteur F .

PROPOSITION 2. - Si $\mathcal{C}$ admet un objet libre (i. e. si le foncteur $T : \mathcal{C} \to (\mathrm{Ens})$ est représentable), alors, pour tout monomorphisme u de $\mathcal{C}$, $T(u)$ est une injection.

En effet, soient (L , a) un objet libre de $\mathcal{C}$, $u : X \to Y$ un monomorphisme et $x , x' \in T(X)$. Supposons que $T(u)(x) = T(u)(x')$. Par hypothèse, il existe des flèches $w , w' : L \to X$ telles que $T(w)(a) = x$ et $T(w')(a) = x'$. On a alors $T(uw)(a) = T(uw')(a)$. L'assertion d'unicité dans la définition de l'objet libre (L , a) montre qu'on a alors $uw = uw'$. D'où $w = w'$, car u est un monomorphisme. On en déduit $x = T(w)(a) = T(w')(a) = x'$, de sorte que $T(u)$ est une injection.

C. Q. F. D.

Ainsi les monomorphismes ne présentent en général pas de problèmes. Nous allons voir qu'il n'en est pas de même des épimorphismes, ce qui est un des nombreux exemples de la dissymétrie de la catégorie (Ens).

Cas des épimorphismes. - Soit toujours $\mathcal{C}$ une catégorie, munie d'un foncteur fidèle T de $\mathcal{C}$ dans (Ens). Pour alléger, nous identifierons un objet X avec $T(X)$, et une flèche u avec $T(u)$. Pour montrer que tout épimorphisme u est surjectif, il suffit, pour toute flèche $u : X \to Y$ non surjective, de construire deux flèches $v , v' : Y \to Z$ qui coïncident sur $u(X)$ mais non sur Y. Or ceci est possible dans les cas suivants :

(a) $\mathcal{C} = (\mathrm{Ord})$ (ou (Tot Ord)) : dédoubler un élément de $Y - u(X)$.

(b) $\mathcal{C} = (\mathrm{Top})$: prendre pour Z l'espace à deux éléments muni de la topologie grossière.

(c) $\mathcal{C} = (\mathrm{Comp})$, sous-catégorie pleine de (Top) formée des espaces compacts : prendre pour Z l'espace quotient de Y obtenu en contractant le fermé $u(X)$ en un point a, pour v l'application canonique $Y \to Z$, et pour v' l'application constante de valeur a.

(d) $\mathcal{C} = (\mathrm{Ab})$ ou, plus généralement, $\mathcal{C} = (A\text{-}\mathrm{Mod})$: prendre $Z = Y/u(X)$, $v : Y \to Z$ canonique, et v' nulle.

(e) Pour $\mathcal{C} = (\mathrm{Gr})$, il faut une construction plus délicate : on prend pour Z la "somme amalgamée" $Y \underset{u(X)}{\star} Y$ de deux copies de Y sur $u(X)$, et on utilise la forme explicite des éléments de Z.

Voici maintenant des exemples d'épimorphismes non surjectifs :

(a') Dans la catégorie des espaces topologiques séparés, un épimorphisme u :

$X \to Y$ est une application continue telle que $u(X)$ soit <u>dense</u> dans Y .

(b') Dans la catégorie des anneaux commutatifs réduits dont la caractéristique est un nombre premier p donné, l'injection canonique $A^p \to A$ est un épimorphisme. En effet, si v , v' : $A \to B$ coïncident sur A^p , on a, pour tout $x \in A$,

$$0 = v(x^p) - v'(x^p) = v(x)^p - v'(x)^p = (v(x) - v'(x))^p \ ;$$

d'où $v(x) = v'(x)$ car B est réduit.

(c') Dans la catégorie des anneaux commutatifs, l'application canonique u : $A \to S^{-1}A$ d'un anneau dans un de ses <u>anneaux de fractions</u> est un épimorphisme. En effet, deux homomorphismes de $S^{-1}A$ dans une anneau B qui coïncident sur $u(A)$, sont égaux car les éléments de $u(S)$ sont inversibles. Les composés de ces localisations et des homomorphismes surjectifs seront désormais considérés comme les épimorphismes <u>"classiques"</u> de la catégorie des anneaux commutatifs. Mais nous verrons que ce ne sont nullement les seuls.

L'exemple (e) ci-dessus nous suggère d'utiliser la notion de <u>somme amalgamée</u> dans une catégorie $\mathcal{C}$. Etant données deux flèches u : $X \to Y$ et u' : $X \to Y'$, on appelle somme amalgamée de Y et Y' au-dessous de X , tout objet S muni de deux flèches w : $Y \to S$ et w' : $Y' \to S$ satisfaisant à $wu = w'u'$, et tel que, pour tout objet Z et tout couple de flèches v : $Y \to Z$ et v' : $Y' \to Z$ satisfaisant à $vu = v'u'$, il existe une flèche unique s : $S \to Z$ telle que $v = sw$ et $v' = sw'$.

<u>Diagramme commutatif</u> :

(1)
$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr, "w"] \arrow[drr, "v"] & & \\
X \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & S \arrow[r, "s"] & Z \\
 & Y' \arrow[ur, "w'"'] \arrow[urr, "v'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Le triplet (S , w , w') , s'il existe, est unique à un isomorphisme près ; on le note souvent $Y \coprod_X Y'$.

Afin de savoir si une flèche u : $X \to Y$ de $\mathcal{C}$ est un épimorphisme, on forme la somme amalgamée $S = Y \coprod_X Y$, soit

(ε)
$$X \xrightarrow{u} Y \underset{w'}{\overset{w}{\rightrightarrows}} S$$

avec $wu = w'u$. Si u est un épimorphisme, on a $w = w'$. Réciproquement, si $w = w'$, u est un épimorphisme d'après le diagramme (1).

Dans la catégorie des anneaux commutatifs, il est classique que la somme amalgamée de $A \begin{smallmatrix} \nearrow B \\ \searrow B' \end{smallmatrix}$ est le <u>produit tensoriel</u> de A-algèbres $B \otimes_A B'$, muni des homomorphismes $b \mapsto b \otimes 1$ $(b \in B)$ et $b' \mapsto 1 \otimes b'$ $(b' \in B')$. D'où la proposition suivante :

PROPOSITION 3. - <u>Pour que</u> $A \to B$ <u>soit un épimorphisme d'anneaux commutatifs, il faut et il suffit que, dans</u> $B \otimes_A B$, <u>on ait</u> $1 \otimes b = b \otimes 1$ <u>pour tout</u> $b \in B$.

Par composition avec $x \otimes y \mapsto xy$, on voit qu'alors $b \mapsto 1 \otimes b$ est un <u>isomorphisme</u> de B sur $B \otimes_A B$. La réciproque est facile. Nous reverrons ceci plus systématiquement dans l'exposé de N. ROBY.

La proposition 3 nous permet de donner un exemple facile d'<u>épimorphisme non classique</u> d'anneaux commutatifs. Soient A un tel anneau et $a \in A$; posons

$$B = A_a \times A/Aa$$

(rappelons que A_a est l'anneau de fractions $S^{-1} A$, où $S = \{1 , a , \ldots , a^n , \ldots\}$). Alors l'homomorphisme "diagonal"

$$u : A \to A_a \times A/Aa = B$$

est un épimorphisme. En effet, $(A_a \times A/Aa) \otimes_A (A_a \times A/Aa)$ est produit de 4 anneaux, dont 2 sont nuls, et dont les autres sont

$$A_a \otimes_A A_a = A_a \qquad \text{et} \qquad (A/Aa) \otimes_A (A/Aa) = A/Aa \ ;$$

ainsi $B \otimes_A B \simeq B$, et u est bien un épimorphisme. De plus, lorsque a n'est ni nilpotent, ni inversible dans A , l'épimorphisme u est non classique, car B n'est pas un localisé de $u(A)$.