Marguerite Mangeney
Christian Peskine
Lucien Szpiro

Anneaux de Gorenstein, et torsion en algèbre commutative

Séminaire Samuel. Algèbre commutative, tome 1 (1966-1967), p. 2-69
<http://www.numdam.org/item?id=SAC_1966-1967__1__A1_0>

ANNEAUX DE GORENSTEIN,

ET TORSION EN ALGÈBRE COMMUTATIVE.

-:-:-:-

En janvier 1967, dans le cadre du Séminaire d'Algèbre commutative, dirigé par Pierre SAMUEL, Maurice AUSLANDER a donné quatre conférences à l'Ecole Normale Supérieure de Jeunes Filles. On trouvera la matière de ces conférences dans les chapitres 2 et 3 de ce texte. Pour en rendre l'étude plus accessible, les rédacteurs les ont faits précéder par :

- le chapitre 0, qui est un survol rapide de toutes les notions et de tous les résultats d'algèbre homologique supposés connus. Pour avoir plus de détails, les lecteurs pourront se reporter à l'Algèbre locale de J.-P. SERRE [8], où toutes ces notions, sauf celle du grade, sont largement explicitées. Les propriétés du grade, bien que moins connues, sont toutes des conséquences immédiates de la proposition 1 du chapitre 0.

- le chapitre 1, qui suit de très près un article de H. BASS [2], sur les anneaux de Gorenstein. La théorie des enveloppes injectives est supposée connue, on peut la trouver dans un exposé de P. GABRIEL [7] au Séminaire Dubreil-Pisot.

La technique développée au chapitre 2 est l'esquisse d'une théorie homologique qui est loin d'être close. Maurice AUSLANDER, au cours de conversations qu'il a eues avec les rédacteurs, a laissé entendre qu'il fallait reformuler le problème dans le cadre plus large de la théorie des satellites, et étudier simultanément le foncteur $\overline{F}$ et la catégorie $\overline{C}$ qui sont des notions duales de celles étudiées dans ce chapitre.

L'outil construit a donné la clef du chapitre 3, où l'on voit des résultats de pure algèbre commutative. On obtient, au moyen de la G-dimension et des anneaux de Gorenstein, des résultats semblables au théorème sur la profondeur des modules de dimension projective finie et au théorème de Hilbert-Serre.

Cette similitude conduit directement à plusieurs conjectures, dont la plus intéressante est la suivante : Sur un anneau noethérien quelconque, un module de type fini, qui est ponctuellement de G-dimension finie, est-il globalement de G-dimension finie ?

Ce texte s'adresse d'abord aux auditeurs du Séminaire, mais aussi aux mathématiciens ayant un minimum de connaissances d'algèbre commutative et d'algèbre homologique. Les rédacteurs remercient le créateur du Séminaire, Pierre SAMUEL, pour son aide et ses conseils, et bien entendu Maurice AUSLANDER, pour sa participation intense au Séminaire et pour les nombreux autres contacts fructueux qu'ils ont eus avec lui.

-:-:-:-

TABLE DES MATIÈRES

Pages

-:-:-:-

Chapitre 0

Préliminaires

Sauf mention du contraire, tous les anneaux considérés seront commutatifs, unitaires et noethériens, tous les modules seront de type fini.

§ 0.1. Suites M-régulières.

DÉFINITION. - Soient A un anneau local, et M un A-module ; une suite

$$f_1 , \dots , f_n ,$$

d'éléments non inversibles de A , sera dite une M-suite (ou une suite M-régulière), de longueur n , si, $\forall\ i = 1 , \dots , n$, f_i n'est pas diviseur de zéro dans $M/(f_0 M + \dots + f_{i-1} M)$, où l'on a posé $f_0 = 0$.

PROPOSITION 1. - Soient A un anneau local, M et N deux A-modules ; les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Ext}^i_A(M , N) = 0$ pour $i = 0 , \dots , n - 1$;

(ii) Il existe une suite N-régulière, de longueur n , contenue dans l'annulateur de M .

PROPOSITION 2. - Soient A un anneau local, M un A-module, et f un élément A-régulier et M-régulier ; alors, dans la catégorie des A/fA-modules, on a les isomorphismes de foncteurs :

$$\mathrm{Ext}^n_{A/fA}(M/fM , .) \simeq \mathrm{Ext}^n_A(M , .) , \qquad \forall\ n \geq 0 ,$$

$$\mathrm{Ext}^n_{A/fA}(. , M/fM) \simeq \mathrm{Ext}^{n+1}_A(. , M) , \qquad \forall\ n \geq 0 .$$

§ 0.2. La profondeur.

DÉFINITION. - Soient A un anneau local de corps résiduel k , et M un A-module. On appelle profondeur de M (et on note $\mathrm{prof}(M)$ le plus petit entier $i \geq 0$ tel que $\mathrm{Ext}^i_A(k , M) \neq 0$.

PROPOSITION 3. - Soient A un anneau local et M un A-module. Toutes les suites M-régulières maximales ont même longueur ; cette longueur est égale à la profondeur de M .

PROPOSITION 4. - *Toujours sous les mêmes hypothèses, toute suite* M-*régulière se prolonge en un système de paramètres de* M . *Si* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, *on a*

$$\mathrm{prof}(M) \leq \dim A/\mathfrak{p} \leq \dim M .$$

DÉFINITION. - *Si* $\mathrm{prof}(M) = \dim(M)$, *on dira que* M *est un module de Cohen-Macaulay*.

PROPOSITION 5. - *Toujours sous les mêmes hypothèses, si* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *est une suite exacte de* A-*modules tous différents de* 0 , *on a* :

(i) *Si* $\mathrm{prof}(M') < \mathrm{prof}(M)$, *alors* $\mathrm{prof}(M') = 1 + \mathrm{prof}(M'')$;
(ii) *Si* $\mathrm{prof}(M'') < \mathrm{prof}(M)$, *alors* $\mathrm{prof}(M') = 1 + \mathrm{prof}(M'')$;
(iii) *Si* $\mathrm{prof}(M) = \mathrm{prof}(M') = r$, *alors* $\mathrm{prof}(M'') \geq r - 1$;
(iv) *Si* $\mathrm{prof}(M) < \mathrm{prof}(M')$, *alors* $\mathrm{prof}(M) = \mathrm{prof}(M'')$.

§ 0.3. Le grade.

DÉFINITION. - *Soient* A *un anneau, et* M *un* A-*module. On appelle* grade(M) *le plus petit* $i \geq 0$ *tel que* $\mathrm{Ext}^i_A(M , A) \neq 0$.

PROPOSITION 6. - *Soient* A *un anneau local, et* M *un* A-*module ; toutes les suites* A-*régulières maximales contenues dans l'annulateur de* M *ont même longueur égale à* grade(M) .

PROPOSITION 7. - *Soient* A *un anneau, et* M *un* A-*module ; on a*

$$\mathrm{grade}(M) = \inf_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)} \mathrm{prof}\, A_{\mathfrak{p}} .$$

§ 0.4. La dimension projective.

DÉFINITION. - *Soient* A *un anneau, et* M *un* A-*module* quelconque ; *on appelle dimension projective de* M (*et on note* $\mathrm{dp}(M)$) *le plus petit positif* i *tel que* $\mathrm{Ext}^{i+1}_A(M , .) = 0$.

PROPOSITION 8. - *Soient* A *un anneau local,* k *son corps résiduel, et* M *un* A-*module ; les propositions suivantes sont équivalentes* :

(i) $\mathrm{dp}(M) \leq n$;
(ii) $\mathrm{Ext}^{n+1}_A(M , k) = 0$.

PROPOSITION 9. - Soient A un anneau, et M un A-module ; alors, si $dp(M) = n$

$$\mathrm{Ext}_A^n(M , N) \neq 0 \qquad \text{pour tout } A\text{-module (i. e. de type fini).}$$

PROPOSITION 10. - Soient A un anneau local, et M un A-module de dimension projective finie ; on a

$$dp(M) + \mathrm{prof}(M) = \mathrm{prof}(A) .$$

§ 0.5. La dimension injective.

DÉFINITION. - Soient A un anneau, et M un A-module quelconque, on appelle dimension injective de M (et on note $di_A M$) le plus petit entier positif i tel que $\mathrm{Ext}_A^{i+1}(. , M) = 0$.

PROPOSITION 11. - Pour que $di_A M \leq i$, il faut et il suffit,que $\mathrm{Ext}_A^{i+1}(N , M) = 0$ pour tout A-module monogène N .

Chapitre 1

Anneaux de Gorenstein

§ 1.1 Rappels sur les enveloppes injectives (GABRIEL [7]).

DÉFINITION. - Soient A un anneau, M et E deux A-modules, et $M \xrightarrow{i} E$ une injection ; on dira que $i : M \to E$ est extension essentielle de M si, pour tout sous-module N de E , les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $i^{-1}(N) = 0$;

(ii) $N = 0$.

PROPOSITION 1. - Soient A un anneau, et M un A-module ; alors il existe un A-module E et une injection $i : M \to E$, qui vérifient les propriétés équivalentes suivantes :

(i) E est un module injectif, et $i : M \to E$ est une extension essentielle de M ;

(ii) E est injectif et, pour tout injectif F tel qu'il existe une injection $j : M \to F$, il existe une application injective $p : E \to F$ telle que $p \circ i = j$;

(iii) $i : M \to E$ est une extension essentielle de M et, pour toute extension essentielle $j : M \to F$, il existe une injection $p : F \to E$ telle que $p \circ j = i$.

Un tel E est appelé une enveloppe injective de M, on le notera souvent, par abus d'écriture, $E(M)$. Toutes les enveloppes injectives de M sont isomorphes.

DÉFINITION. - On dit qu'un module injectif est indécomposable, s'il est indécomposable en tant que module.

PROPOSITION 2. - Soient A un anneau, et M un A-module. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) (0) est irréductible dans M ;

(ii) $E(M)$ est indécomposable.

PROPOSITION 3. - Soient A un anneau, et M un A-module. Alors $E(M)$ est somme directe d'injectifs indécomposables. Si $0 = \bigcap_{i=1}^{n} N_i$ est une décomposition de (0) dans M où tous les N_i sont irréductibles, alors $E(M) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} E(M/N_i)$.

PROPOSITION 4. - Soit A un anneau ; alors, si $\mathfrak{p}$ est un idéal de A, $E(A/\mathfrak{p})$ est un module injectif indécomposable. Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des $E(A/\mathfrak{p})$ pour $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ et l'ensemble des modules injectifs indécomposables.

DÉFINITION. - On appelle résolution injective minimale d'un A-module toute suite exacte :

$$0 \to M \to E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \to \dots \to E_i \xrightarrow{f_i} E_{i+1} \to \dots$$

où E_i est une enveloppe injective de $\mathrm{Im}(f_{i-1})$.

D'après les propositions précédentes, pour tout module M, il existe une résolution injective minimale de M. Pour tout $i \geq 0$, on a

$$E_i \simeq \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}A} \mu_i(\mathfrak{p}, M)\, E(A/\mathfrak{p}) \quad (^1)$$

où les $\mu_i(\mathfrak{p}, M)$ sont des cardinaux qui ne dépendent que de i, $\mathfrak{p}$ et M. On vérifie que si r est le petit entier tel que $E_{r+1} = 0$, alors r est égal à la dimension injective de M.

([1]) Pour des raisons de commodité, on a adopté ici la notation additive, plutôt que la notation multiplicative $\prod_{\mathfrak{p}} E(A/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p},M)}$, car, dans tous les cas que nous étudierons, les $\mu_i(\mathfrak{p}, M)$ seront finis.

§ 1.2. Propriétés des $\mu_i(\mathfrak{p}, M)$.

Dans ce numéro, A sera toujours un anneau noethérien.

PROPOSITION 5. - Si S est une partie multiplicativement stable de A , ne rencontrant pas 0 , alors $S^{-1} E_A(M)$ est une enveloppe injective du $(S^{-1} A)$-module $S^{-1} M$. En conséquence, les résolutions injectives minimales se localisent.

Démontrons d'abord que $S^{-1} E$ est un $(S^{-1} A)$-module injectif.

On sait (proposition 11) qu'il suffit de montrer que si $\mathfrak{i}$ est un idéal de $S^{-1}A$, et que si on a une application $\mathfrak{i} \to S^{-1} E(M)$, elle se prolonge en une application $S^{-1} A \to S^{-1} E(M)$. On a, pour tout module de type fini N (BOURBAKI [4], Chap. 2, § 2, n° 7, prop. 19) un isomorphisme canonique

$$\operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1} N , S^{-1} E(M)) \simeq S^{-1} \operatorname{Hom}_A(N , E(M)) .$$

Comme il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de A tel que $\mathfrak{i} = S^{-1} \mathfrak{a}$, l'application $\mathfrak{i} \to S^{-1}E(M)$ provient d'une application $\mathfrak{a} \to E(M)$, qui se prolonge en une application $A \to E(M)$ et finalement en une application $S^{-1} A \to S^{-1} E(M)$.

Montrons que $S^{-1} E(M)$ est une extension essentielle de $S^{-1} M$. Posons $E(M)=E$; Soit $y \in S^{-1} E$ tel que $y \neq 0$. Il faut montrer qu'il existe $\lambda \in S^{-1} A$ tel que $\lambda y \neq 0$ et $\lambda y \in S^{-1} M$. On peut prendre $y = x/1$ avec $x \in E$, et $sx \neq 0$ pour tout $s \in S$. Soit $\mathfrak{a}$ un élément maximal parmi les annulateurs de sx où s parcourt S . Alors $\mathfrak{a}$ est maximum : en effet, si $\mathfrak{a} = \operatorname{ann}(sx)$, soient $t \in S$ et $\lambda \in A$ tels que $\lambda tx = 0$, alors $\lambda tsx = 0$, d'où $\lambda \in \operatorname{ann}(stx)$; or,

$$\operatorname{ann}(stx) \supset \operatorname{ann}(sx) ,$$

donc $\lambda \in \mathfrak{a}$. Comme $sx \neq 0$, il existe $\lambda' \in A$ tel que $\lambda'sx \neq 0$, et $\lambda'sx \in M$, on a donc

$$\lambda'tsx \neq 0 \qquad \text{pour tout } t \in S ,$$

c'est-à-dire

$$\lambda'sy \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda'sy \in S^{-1} M .$$

COROLLAIRE de la proposition 5. - Pour tout A-module M , on a

1° $\operatorname{di}_{S^{-1}A} S^{-1} M \leq \operatorname{di}_A M$;

2° $\operatorname{di}_A M = \sup_{\mathfrak{p} \text{ maximal}} \operatorname{di}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$

3° *Si* $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, *alors* $\mu_i(\mathfrak{p}, M) = \mu_i(S^{-1}\mathfrak{p}, S^{-1}M)$ *pour tout* $i \geq 0$

4° $\mu_i(\mathfrak{p}, M) = 0$ *si* $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp} M$.

Ce sont des conséquences immédiates de la proposition 5.

PROPOSITION 6. - *Soient* M *un module de type fini sur l'anneau local* A , *et*

$$0 \to M \to E_0 \xrightarrow{do} E_1 \to \dots$$

une résolution injective minimale de M . *Si* f *est un élément* A*-régulier et* M*-régulier, et si* $D = do(E_0)$, *on a une suite exacte* :

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(A/fA , D) \to \operatorname{Hom}_A(A/fA , E_1) \to \dots \to \operatorname{Hom}_A(A/fA , E_i) \to \dots$$

qui est une résolution injective minimale du A/fA*-module* $\operatorname{Hom}_A(A/fA , D)$. *Ce dernier est isomorphe à* M/fM .

Comme A/Af est de dimension projective 1 , on a $\operatorname{Ext}^i_A(A/fA , .) = 0$ pour $i \geq 2$. Ceci montre l'exactitude de la suite écrite.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& & & 0 \arrow[d] & \\
& 0 \arrow[d] & & \operatorname{Hom}_A(A/fA , D) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & E_0 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & D \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & E_0 \arrow[r] & D \arrow[r] & 0 \\
& M/fM \arrow[d] & & & \\
& 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Les lignes et les colonnes sont exactes. Si $N = \operatorname{Ker}(E_0 \xrightarrow{f} E_0)$, $N \cap M = 0$, donc $N = 0$, car E_0 est une extension essentielle de M . Montrons aussi que $E_0 \xrightarrow{f} E_0$ est surjective. Soit $x \in E$. Alors $g(f) = x$ définit une application $g : Af \to E_0$ qui se prolonge en une application $g' : A \to E_0$. Si $y = g'(1)$, alors $x = fy$, donc $\operatorname{Coker}(E_0 \xrightarrow{f} E_0) = 0$.

Le "diagramme du serpent" montre alors l'isomorphisme

$$\operatorname{Hom}_A(A/fA , D) \xrightarrow{\sim} M/fM .$$

La proposition résultera du lemme suivant.

LEMME 1. - *Si* $0 \to D \to E \to C \to 0$ *est une suite exacte de* A-*modules, où* E *est l'enveloppe injective de* D , *alors la suite :*

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}\ , D) \to \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}\ , E) \to \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}\ , C)\ ,$$

où $\mathfrak{a}$ *est un idéal de* A , *est exacte, et* $\mathrm{Hom}(A/\mathfrak{a}\ , E)$ *est une enveloppe injective du* $A/\mathfrak{a}$-*module* $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}\ , D)$.

On sait (BOURBAKI [3], § 5, n°2, Remarque 4) que $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}\ , E)$ est injectif. Montrons que c'est une extension essentielle de $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}\ , D)$. Soit

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}\ , E)\ .$$

Posons $\varphi(\overline{1}) = e$, où $\overline{1}$ est l'image de 1 dans $A/\mathfrak{a}$. Il existe $\lambda \in A$ tel que $\lambda e \in D$ et $\lambda e \neq 0$. On voit que

$$\lambda\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}\ , D) \qquad \text{et} \qquad \lambda\varphi \neq 0\ .$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - *Sous les hypothèses de la proposition précédente, si* $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier contenant* f , *alors*

$$\mu_i(\mathfrak{p}/fA\ , M/fM) = \mu_{i+1}(\mathfrak{p}\ , M)\ .$$

En effet,

$$\mathrm{Hom}_A(A/fA\ , E_i) = \sum_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec} A} \mu_i(\mathfrak{p}\ , M)\ \mathrm{Hom}_A(A/fA\ , E(A/\mathfrak{p}))$$
$$= \sum_{f\in\mathfrak{p}} \mu_i(\mathfrak{p}\ , M)\ \mathrm{Hom}_A(A/fA\ , E(A/\mathfrak{p}))\ .$$

Comme $\mathrm{Hom}_A(A/fA\ , E(A/\mathfrak{p}))$ est l'enveloppe injective du A/fA-module $A/\mathfrak{p}$, le corollaire est démontré.

PROPOSITION 7. - *On a*

$$\mu_i(\mathfrak{p}\ , M) = \dim_{k(\mathfrak{p})} \mathrm{Ext}^i_{A_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p})\ , M_\mathfrak{p}) = \dim_{k(\mathfrak{p})}(\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{p}\ , M))_\mathfrak{p}\ .$$

En particulier, si M *est de type fini,* $\mu_i(\mathfrak{p}\ , M) < \infty$.

D'après le corollaire de la proposition 5, on peut supposer que A est local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$. Dans ce cas, on a le lemme suivant :

LEMME 2. - *Soit* A *un anneau local d'idéal maximal* $\mathfrak{p}$ *et de corps résiduel* k . *Si* E *est l'enveloppe injective de* k , *et* M *un* A-*module de longueur finie, on a*

$$\ell(M) = \ell(\mathrm{Hom}_A(M , E))$$

Raisonnons par récurrence sur $\ell(M)$. Pour $\ell(M) = 1$, on a $M \simeq k$. Alors

$$\mathrm{Hom}_A(k , E) = \{x \in E \text{ tel que } x\mathfrak{p} = 0\} .$$

Si $x\mathfrak{p} = 0$ et $x \neq 0$, on sait qu'il existe $\lambda \in A$ tel que $\lambda x \in k$ et $\lambda x \neq 0$. Alors λ est inversible, ceci implique $x \in k$.

Pour $\ell(M) > 1$, on a une suite exacte :

$$0 \to k \to M \to N \to 0 .$$

On en déduit une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(N , E) \to \mathrm{Hom}_A(M , E) \to k \to 0 .$$

Ce qui démontre le lemme.

Revenons à la proposition : D'après le lemme 1,

$$\mathrm{Hom}_A(k , A/\mathfrak{a}) = 0 \quad \text{implique} \quad \mathrm{Hom}_A(k , E(A/\mathfrak{a})) = 0 ,$$

car $E(A/\mathfrak{a})$ est extension essentielle de $A/\mathfrak{a}$. On a donc

$$\mathrm{Hom}_A(k , E_i) = \mathrm{Hom}_A(k , \mu_i(\mathfrak{p} , M)\, E(k)) = \mu_i(\mathfrak{p} , M)\, k$$

où $0 \to M \to E_0 \to \dots \to E_i \xrightarrow{di} E_{i+1} \to \dots$ est une résolution injective minimale de M.

Considérons la suite :

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(k , M) \to \mathrm{Hom}_A(k , E_0) \to \dots \to \mathrm{Hom}_A(k , E_i) \xrightarrow{f_i} \mathrm{Hom}_A(k , E_{i+1}) \to \dots$$

Montrons que $f_i = 0$ pour tout $i \geq 0$. Soit $x \in \mathrm{Hom}_A(k , E_i)$. Comme E_i est une extension essentielle de $\mathrm{Ker}\, di$, il existe $\lambda \in A$ tel que $\lambda x \in \mathrm{Ker}\, di$. Comme λ est inversible, ceci implique $x \in \mathrm{Ker}\, di$, donc $f_i(x) = 0$. On en déduit

$$\mu_i(\mathfrak{p} , M)k = \mathrm{Hom}_A(k , E_i) = \mathrm{Ext}^i_A(k , M) .$$

Donc

$$\mu_i(\mathfrak{p} , M) = \dim_k(\mathrm{Ext}^i_A(k , M)) .$$

PROPOSITION 8 (DIEUDONNE). - Soient A un anneau local artinien, et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est un A-module injectif ;
(ii) $\mu_0(\mathfrak{m}, A) = 1$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Comme A est indécomposable, $A = E(k)$, où $k = A/\mathfrak{m}$.
(ii) $\Rightarrow$ (i). On a $E(A) = E(k)$, donc A s'injecte dans $E(k)$. Comme

$$\ell(E(k)) = \ell(\mathrm{Hom}_A(A , E(k))) = \ell(A) \qquad \text{d'après le lemme 2 ,}$$

on en déduit

$$A = E(k) .$$

§ 1.3. Modules de type fini de dimension injective finie.

LEMME 3. - Soit M un A-module de type fini. Si $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}$ sont deux idéaux premiers de A tels que $\dim(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}) = 1$, alors $\mu_i(\mathfrak{q} , M) \neq 0 \Rightarrow \mu_{i+1}(\mathfrak{p} , M) \neq 0$.

On peut supposer que A est local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$. Posons

$$B = A/\mathfrak{q} .$$

Soit x un élément de A tel que $x \notin \mathfrak{q}$ et $x \in \mathfrak{p}$. Alors $C = B/xB$ est un module de longueur finie sur A . De la suite exacte $0 \to B \xrightarrow{x} B \to C \to 0$, on déduit une suite exacte

$$\mathrm{Ext}^i_A(B , M) \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}^i_A(B , M) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_A(C , M)$$

qui montre que $\mathrm{Ext}^{i+1}_A(C , M) \neq 0$. Supposons $\ell(C) > 1$. La suite exacte

$$0 \to k \to C \to C' \to 0$$

donne une suite exacte :

$$\mathrm{Ext}^{i+1}_A(C' , M) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_A(C , M) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_A(k , M) .$$

Ce qui montre qu'il existe toujours un module N tel que $1 \leq \ell(N) < \ell(C)$ et tel que $\mathrm{Ext}^{i+1}_A(N , M) \neq 0$. On en déduit que $\mathrm{Ext}^{i+1}_A(k , M) \neq 0$.

COROLLAIRE. - Soit M un A-module de type fini de dimension injective finie. Alors, on a

$$\dim M \leq \mathrm{di}\, M$$

et si $r = \mathrm{di}\, M$, alors $\mu_r(\mathfrak{p} , M) \neq 0$ entraîne $\mathfrak{p}$ maximal.

Soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$. Si $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ est un idéal premier minimal de $\operatorname{Supp} M$, on a

$$(\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{q} , M)_{\mathfrak{q}} \neq 0 ,$$

donc

$$\mu_0(\mathfrak{q} , M) \neq 0 .$$

Si $s = \dim(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$, on déduit du lemme précédent que $\mu_s(\mathfrak{p} , M) \neq 0$, donc

$$s \leq \operatorname{di} M = r .$$

Donc, il reste bien que $\dim M \leq \operatorname{di} M$ (ceci montre, entre autre, que $\dim M < \infty$).

Maintenant, soit $\mathfrak{p}$ tel que $\mu_r(\mathfrak{p} , M) \neq 0$. Si $\mathfrak{p}$ n'était pas maximal, il existerait un idéal premier $\mathfrak{q}$ tel que

$$\mu_{r+1}(\mathfrak{q} , M) \neq 0 ,$$

ce qui est évidemment impossible.

PROPOSITION 9. - Soit M un module de type fini non nul et de dimension injective finie sur l'anneau local A . Alors $\operatorname{di}_A M = \operatorname{prof} A$.

Posons $s = \operatorname{prof} A$ et $r = \operatorname{di} M$. Soient $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de A , et k son corps résiduel. On a

$$\operatorname{Ext}^r_A(k , M) \approx \mu_r(\mathfrak{p} , M).k ,$$

donc $\operatorname{Ext}^r_A(k , M) \neq 0$ d'après le corollaire du lemme précédent. Soit $\underset{\sim}{f} = (f_1 , \ldots, f_s)$ une suite A-régulière maximale. On sait que $\operatorname{dp} A/\underset{\sim}{f}A = s$. La suite exacte

$$0 \to k \to A/\underset{\sim}{f}A$$

donne une suite exacte :

$$\operatorname{Ext}^r_A(A/\underset{\sim}{f}A , M) \to \operatorname{Ext}^r_A(k , M) \to 0$$

qui montre que $\operatorname{Ext}^r_A(A/\underset{\sim}{f}A , M) \neq 0$, donc que $r \leq s$. Mais $\operatorname{Ext}^s_A(A/\underset{\sim}{f}A , M) \neq 0$ d'après le § 0.9. Donc $s \leq r$, et il reste $s = r$.

COROLLAIRE. - Si un anneau local est de dimension injective finie sur lui-même, il est de Cohen-Macaulay, et sa dimension injective est égale à sa dimension de Krull.

PROPOSITION 10. - Soit M un A-module de type fini. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A , les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{di}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \infty$;

(ii) $\mu_i(\mathfrak{p} , M) \neq 0$ <u>pour tout</u> $i \geq h(\mathfrak{p})$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). On peut évidemment supposer $A = A_{\mathfrak{p}}$. Raisonnons par récurrence sur $h(\mathfrak{p})$. Pour $h(\mathfrak{p}) = 0$, on a

$$E_i(M) = \mu_i(\mathfrak{p} , M)\ E(A/\mathfrak{p}) \qquad \text{pour tout } i ,$$

et la proposition est évidente.

Pour $h(\mathfrak{p}) > 0$, supposons qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{p}$, tel que

$$\mathrm{di}_{A_{\mathfrak{q}}} M_{\mathfrak{q}} = \infty .$$

Si $s = \dim A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$, on a

$$h(\mathfrak{q}) + s \leq h(\mathfrak{p}) .$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\mu_i(\mathfrak{q} , M) \neq 0 \qquad \text{pour } i \geq h(\mathfrak{q}) ,$$

donc

$$\mu_{i+s}(\mathfrak{p} , M) \neq 0 \qquad \text{pour } i \geq h(\mathfrak{q}) .$$

Ceci implique

$$\mu_j(\mathfrak{p} , M) \neq 0 \qquad \text{pour } j \geq h(\mathfrak{p}) .$$

Si, pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{p}$, $\mathrm{di}_{A_{\mathfrak{q}}} M_{\mathfrak{q}} < \infty$, on a

$$\mu_i(\mathfrak{q} , M) = 0 \qquad \text{pour } i \geq \mathrm{prof}\, A_{\mathfrak{q}} ,$$

donc

$$\mu_i(\mathfrak{q} , M) = 0 \qquad \text{pour } i \geq h(\mathfrak{p}) .$$

On en déduit

$$E_i = \mu_i(\mathfrak{p} , M)\ E(A/\mathfrak{p}) \qquad \text{pour } i \geq h(\mathfrak{p}) .$$

Ce qui démontre la proposition

(ii) $\Rightarrow$ (i) est évident.

PROPOSITION 11. - Soit M un A-module de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{di}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} < \infty$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$;

(ii) $\mathrm{ht}(\mathrm{ann}(\mathrm{Ext}_A^i(N , M))) \geq i$ pour tout $i \geq 0$ et tout module de type fini N.

(i) $\Rightarrow$ (ii). On a

$$\mathrm{di}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \leq h(\mathfrak{p}) ,$$

donc

$$\mathrm{Ext}^i_{A_{\mathfrak{p}}}(N_{\mathfrak{p}} , M_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{Ext}^i_A(N , M)_{\mathfrak{p}} = 0 \qquad \text{pour} \quad i > h(\mathfrak{p}) ,$$

ce qui exprime bien que $h(\mathrm{ann}(\mathrm{Ext}^i_A(N , M))) \geq i$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Si $h(\mathrm{ann}(\mathrm{Ext}^i_A(N , M))) \geq i$ pour $i \geq 0$, on a

$$(\mathrm{Ext}^i_A(N , M))_{\mathfrak{p}} = 0 \qquad \text{pour} \quad h(\mathfrak{p}) < i ,$$

donc

$$\mathrm{Ext}^i_A(N_{\mathfrak{p}} , M_{\mathfrak{p}}) = 0 \qquad \text{pour} \quad h(\mathfrak{p}) < i .$$

En particulier,

$$\mathrm{Ext}^i_{A_{\mathfrak{p}}}(k(\mathfrak{p}) , M_{\mathfrak{p}}) = 0 \qquad \text{pour} \quad i > h(\mathfrak{p}) ,$$

ce qui d'après la proposition 10 implique $\mathrm{di}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} < \infty$.

§ 1.4. Anneaux de Gorenstein.

Posons $\mu_i(\mathfrak{p} , A) = \mu_i(\mathfrak{p})$.

PROPOSITION 12. - Soit A un anneau, et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A ; les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{di}_{A_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}} < \infty$;

(ii) $\mu_i(\mathfrak{p}) = 0$ pour tout $i > h(\mathfrak{p})$;

(iii) il existe $i \geq h(\mathfrak{p})$ tel que $\mu_i(\mathfrak{p}) = 0$;

(iv) $\mu_i(\mathfrak{p}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i < h(\mathfrak{p}) ; \\ 1 & \text{pour } i = h(\mathfrak{p}) ; \end{cases}$

(v) $\mu_i(\mathfrak{q}) = \delta_{i,h(\mathfrak{q})}$ <u>pour tout</u> $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ <u>et pour tout</u> i .

Les assertions (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) résultent des propositions 9 et 10 du paragraphe précédent.

(i) $\Rightarrow$ (iv). Raisonnons par récurrence sur $\dim A_\mathfrak{p}$. Pour $\dim A_\mathfrak{p} = 0$, c'est le théorème de Dieudonné. Pour $\dim A_\mathfrak{p} > 0$,on sait qu'il existe un élément $f A_\mathfrak{p}$-régulier puisque $A_\mathfrak{p}$ est de Cohen-Macaulay (corollaire de la proposition 9). D'après la proposition 6 du paragraphe 2, A/fA est de dimension injective finie sur lui-même. L'hypothèse de récurrence montre alors,

$$\mu_i(\mathfrak{p}/Af) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq i < h(\mathfrak{p}) - 1 \qquad \text{et} \qquad \mu_i(\mathfrak{p}/Af) = 1 \quad \text{pour} \quad i = h(\mathfrak{p}) - 1 \ .$$

On sait que $\mu_i(\mathfrak{p}/Af) = \mu_{i+1}(\mathfrak{p})$, donc

$$\mu_i(\mathfrak{p}) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1 \ , \ \ldots \ , \ h(\mathfrak{p}) - 1 \qquad \text{et} \qquad \mu_i(\mathfrak{p}) = 1 \quad \text{pour} \quad i = h(\mathfrak{p}) \ .$$

Il reste à démontrer que $\mu_0(\mathfrak{p}) = 0$. Mais $\mathrm{Hom}(k(\mathfrak{p}) , A) = 0$, car $A_\mathfrak{p}$ est de Cohen-Macaulay de dimension > 0 . Ceci montre bien

$$\mu_0(\mathfrak{p}) = 0 \ .$$

(iv) $\Rightarrow$ (ii). On a

$$\mathrm{Ext}^i_{A_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}) \ , \ A_\mathfrak{p}) = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq h(\mathfrak{p}) - 1$$

et

$$\mathrm{Ext}^i_{A_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}) \ , \ A_\mathfrak{p}) = k(\mathfrak{p}) \qquad \text{pour} \quad i = h(\mathfrak{p}) \ ,$$

donc $A_\mathfrak{p}$ est un anneau de Cohen-Macaulay. Pour $\dim(A_\mathfrak{p}) = 0$, $\mathrm{di}_{A_\mathfrak{p}} A_\mathfrak{p} = 0$ d'après le théorème de Dieudonné. Pour $\dim A_\mathfrak{p} = d$, soit $(f_1 , \ldots , f_d) = \underset{\sim}{f}$ une suite $A_\mathfrak{p}$-régulière maximale. Alors, $A_\mathfrak{p}/fA_\mathfrak{p}$ est de dimension 0 . On voit, par un décalage évident, que

$$\mathrm{Hom}_A(k(\mathfrak{p}) \ , \ A_\mathfrak{p}/fA_\mathfrak{p}) \simeq k(\mathfrak{p}) \ ,$$

donc $A_\mathfrak{p}/fA_\mathfrak{p}$ est de dimension injective finie sur lui-même, d'après le théorème de Dieudonné. Ceci implique

$$\mu_i(\mathfrak{p}/fA_\mathfrak{p} \ , \ A_\mathfrak{p}/fA_\mathfrak{p}) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geq 1 \qquad \text{donc} \qquad \mu_i(\mathfrak{p}) = 0 \quad \text{pour} \quad i > h(\mathfrak{p}) \ ,$$

c'est-à-dire (ii).

(i) $\Rightarrow$ (v). En effet, $\mathrm{di}_{A_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}} < \infty$, donc $\mathrm{di}_{A_{\mathfrak{q}}} A_{\mathfrak{q}} < \infty$ et $\mu_i(\mathfrak{q}) \equiv \delta_{i,h(\mathfrak{q})}$.

(v) $\Rightarrow$ (iv) est évident.

THÉORÈME 1 (théorème local). - Soit A un anneau local de dimension n , d'idéal maximal $\mathfrak{p}$ et de corps résiduel k . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{di}_A A < \infty$;

(ii) A est un anneau de Cohen-Macaulay tel qu'il existe un système de paramètres de A engendrant un idéal irréductible ;

(iii) Tout système de paramètres de A engendre un idéal irréductible ;

(iv) $\mu_i(\mathfrak{p}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i < n ; \\ 1 & \text{pour } i = n ; \end{cases}$

(v) A est un anneau de Cohen-Macaulay et $\mathrm{Ext}^n_A(M , A) \simeq \mathrm{Hom}_A(M , E(k))$ pour tout A-module M de longueur finie (l'isomorphisme étant fonctoriel) ;

(vi) $\mu_i(\mathfrak{q}) = \delta_{i,ht(\mathfrak{q})}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de A .

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (vi) d'après la proposition 12.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Si $\dim A = 0$, c'est le théorème de Dieudonné. Pour $\dim A = n > 0$ montrons que $\mathrm{prof}\, A \geq 1$. Soit $\underset{\sim}{f} = (f_1 , \ldots , f_n)$ un système de paramètres de A . Posons

$$\underset{\sim}{f}_r = (f_1^r , \ldots , f_n^r) ,$$

c'est aussi un système de paramètres de A . On a

$$\mathrm{Hom}_A(k , \underset{\sim}{f}_r/\underset{\sim}{f}_{r+1}) \neq 0 ;$$

comme $\mathrm{Hom}_A(k , A/\underset{\sim}{f}_{r+1})$ est un k-espace vectoriel de dimension 1 le contenant, on a alors,

$$\underset{\sim}{f}_{r+1} : \mathfrak{p} \subset \underset{\sim}{f}_r \qquad \text{pour tout } r .$$

Donc

$$0 : \mathfrak{p} \subset \bigcap_r (\underset{\sim}{f}_{r+1} : \mathfrak{p}) \subset \bigcap_r \underset{\sim}{f}_r = 0 .$$

Raisonnons maintenant par récurrence sur n . Soit f un élément A-régulier. Comme A/fA vérifie (iii), c'est un anneau de Cohen-Macaulay, et A aussi.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $\underset{\sim}{f} = (f_1 , \ldots , f_n)$ un système de paramètres de A . On a

$$\mathrm{Hom}_A(k\ ,\ A/\underset{\sim}{f}) \simeq \mathrm{Ext}^n_A(k\ ,\ A)$$

par décalage. Dire que $\underset{\sim}{f}$ est irréductible, c'est dire que $\mu_0(A/\underset{\sim}{f}) = 1$, c'est donc dire que $\mathrm{Ext}^n_A(k\ ,\ A)$ est un k-espace vectoriel de dimension 1 . Donc, si un système de paramètres engendre un idéal irréductible, tout système de paramètres engendre un idéal irréductible.

(ii), (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv). Comme $\mu_i(\mathfrak{p}) = \dim_k \mathrm{Ext}^i_A(k\ ,\ A)$, on a une équivalence :

$$\mu_i(\mathfrak{p}) = 0 \quad \text{pour} \quad i < n \iff A \quad \text{anneau de Cohen-Macaulay.}$$

On peut donc supposer, dans la suite, que A est de Cohen-Macaulay.

Soit $\underset{\sim}{f} = (f_1\ ,\ \dots\ ,\ f_n)$ un système de paramètres, donc une suite A-régulière.

$$\mu_n(\mathfrak{p}) = 1 \iff \mu_0^{A/\underset{\sim}{f}}(\mathfrak{p}/\underset{\sim}{f}) = 1 \iff (0) \text{ irréductible dans } A/\underset{\sim}{f} \quad \text{(prop. 2)}$$

(iv) $\Longrightarrow$ (v). Soit M un module de longueur finie. La suite exacte

$$0 \to A \to E_0 \to \dots \to E_{n-1} \to E_n \to 0\ , \qquad \text{où } E_n = E(k)\ ,$$

donne une suite :

$$\mathrm{Hom}(M\ ,\ E_{n-2}) \to \mathrm{Hom}(M\ ,\ E_{n-1}) \to \mathrm{Hom}(M\ ,\ E(k)) \to 0\ .$$

Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Hom}(M\ ,\ E_{n-1}) = 0$. Comme $\mu_{n-1}(\mathfrak{p}) = 0$, il n'y a que des $E(A/\mathfrak{q})$ où $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ dans la décomposition de E_{n-1} . Il suffit donc de montrer

$$\mathrm{Hom}_A(M\ ,\ E(A/\mathfrak{q})) = 0 \qquad \text{pour } \mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}\ .$$

Comme $\mathrm{Hom}_A(k\ ,\ A/\mathfrak{q}) = 0$ et que $E(A/\mathfrak{q})$ est une extension essentielle de $A/\mathfrak{q}$, alors

$$\mathrm{Hom}_A(k\ ,\ E(A/\mathfrak{q})) = 0\ .$$

Montrons, par récurrence sur $\ell(M)$, que $\mathrm{Hom}_A(M\ ,\ E(A/\mathfrak{q})) = 0$. La suite exacte

$$0 \to k \to M \to N \to 0$$

donne une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(N\ ,\ E(A/\mathfrak{q})) \to \mathrm{Hom}_A(M\ ,\ E(A/\mathfrak{q})) \to \mathrm{Hom}_A(k\ ,\ E(A/\mathfrak{q})) \to 0\ .$$

Comme $\ell(N) < \ell(M)$, ceci démontre que $\mathrm{Hom}_A(M\ ,\ E(A/\mathfrak{q})) = 0$.

(v) $\Rightarrow$ (iv). En effet, comme A est de Cohen-Macaulay, $\mu_i(\mathfrak{p}) = 0$ pour $i < n$. Posons $M = k$. Ceci donne

$$\mathrm{Ext}^n_A(k , A) = \mathrm{Hom}_A(k , E(k)) = k \quad \text{(lemme 2)},$$

c'est-à-dire $\mu_n(\mathfrak{p}) = 1$.

Remarque. - GROTHENDIECK a démontré, au moyen de la cohomologie locale, qu'il n'était pas nécessaire de supposer A de Cohen-Macaulay dans (v).

COROLLAIRE. - *Soient* $(A , \mathfrak{p})$ *un anneau local noethérien satisfaisant aux conditions du théorème 1, et* $\mathfrak{q}$ *un idéal* $\mathfrak{p}$*-primaire. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) $\mathfrak{q}$ *est irréductible* ;

(ii) $\mathrm{Ext}^n_A(A/\mathfrak{q} , A)$ *est monogène (resp. libre sur* $A/\mathfrak{q}$).

En effet,

$$\mathrm{Ext}^n_A(A/\mathfrak{q} , A) \simeq \mathrm{Hom}(A/\mathfrak{q} , E(k))$$

qui est égal à l'enveloppe injective de k considérée comme $A/\mathfrak{q}$-module. Si $\mathfrak{q}$ est irréductible, alors $A/\mathfrak{q}$ est un $A/\mathfrak{q}$-module injectif d'après le théorème de Dieudonné, donc $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{q} , E(k))$ est égal à $A/\mathfrak{q}$. Réciproquement, comme

$$\ell(\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{q} , E(k)) = \ell(A/\mathfrak{q}) ,$$

alors, si $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{q} , E(k))$ est monogène, il est isomorphe à $A/\mathfrak{q}$. Donc, $A/\mathfrak{q}$ est un $A/\mathfrak{q}$-module injectif, donc $\mathfrak{q}$ est irréductible.

THÉORÈME 2 (Théorème global). - *Soit* A *un anneau noethérien, Les propositions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A *(resp. maximal),* $A_\mathfrak{p}$ *est de Cohen-Macaulay, et il existe un système de paramètres de* $A_\mathfrak{p}$ *engendrant un idéal irréductible de* $A_\mathfrak{p}$;

(ii) *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A *(resp. maximal), tout système de paramètres de* $A_\mathfrak{p}$ *engendre un idéal irréductible de* $A_\mathfrak{p}$;

(iii) *Pour tout* A*-module de type fini* M, $\mathrm{grade}(\mathrm{Ext}^i(M , A)) \geq i$ *pour* $i \geq 0$;

(iv) *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A, $\mathrm{di}_{A_\mathfrak{p}} A_\mathfrak{p} < \infty$;

(v) $\mu_i(\mathfrak{p}) = \delta_{i,h(\mathfrak{p})}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A .

Si A est de dimension finie, ces propositions sont équivalentes à :

(vi) $\mathrm{di}_A\, A < \infty$.

Le seul problème est de montrer (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) par exemple. On sait que

$$h(\mathrm{ann}\ \mathrm{Ext}^i(M\ ,\ A)) = \inf \dim A_{\mathfrak{p}} \qquad (\text{pour } \mathrm{Ext}^i_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}\ ,\ A_{\mathfrak{p}}) \neq 0\ )$$

et que

$$\mathrm{grade}(\mathrm{Ext}^i(M\ ,\ A)) = \inf \mathrm{prof}\ A_{\mathfrak{p}} \qquad (\text{pour } \mathrm{Ext}^i_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}\ ,\ A_{\mathfrak{p}}) \neq 0\ )\ .$$

On a donc

$$h(\mathrm{ann}\ \mathrm{Ext}^i(M\ ,\ A) \geq \mathrm{grade}\ \mathrm{Ext}^i(M\ ,\ A)\ ,$$

et c'est une égalité lorsque $A_{\mathfrak{p}}$ est de Cohen-Macaulay pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) d'après la proposition 11.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) toujours d'après la proposition 11, et parce que (iv) implique $A_{\mathfrak{p}}$ de Cohen-Macaulay pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A .

DÉFINITION. - Un anneau vérifiant les conditions équivalentes du théorème 2 est appelé un anneau de Gorenstein.

PROPOSITION 13. - Soient A un anneau local de Gorenstien, et B un anneau quotient de A , tels que $\mathrm{dp}_A\, B < \infty$ et que B soit un anneau de Cohen-Macaulay. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) B est un anneau de Gorenstein ;

(ii) Si $q = \dim A - \dim B$, alors $\mathrm{Ext}^q_A(B\ ,\ A)$ est monogène ;

(iii) $\mathrm{Ext}^q_A(B\ ,\ A)$ est un B-module libre.

Raisonnons par récurrence sur $p = \dim B$.

Pour $p = 0$, alors $q = n$, et (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) est le corollaire du théorème 1.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). On a $\mathrm{Ext}^n_A(B\ ,\ A) \simeq \mathrm{Hom}_A(B\ ,\ E(k))$, ce qui implique

$$\ell(\mathrm{Ext}^n_A(B\ ,\ A)) = \ell(B)\ .$$

Comme $\mathrm{Ext}^n_A(B\ ,\ M)$ est un B-module, cette égalité entraîne l'équivalence.

Pour $p > 0$, nous aurons besoin du lemme suivant ;

LEMME 4. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un anneau local A soit de Cohen-Macaulay est que, pour tout A-module M , on ait :

$$\text{grade } M + \dim M = \dim A \ .$$

On voit immédiatement que la condition est suffisante en prenant $M = k$, corps résiduel de A . Montrons qu'elle est nécessaire. On a

$$\text{grade}(M) = \inf_{\mathfrak{p}\in \text{Supp}(M)} (\text{prof}(A_{\mathfrak{p}})) = \inf_{\mathfrak{p}\in \text{Supp}(M)} (\text{ht}(\mathfrak{p})) \ ;$$

comme $\dim(M) = \sup\limits_{\mathfrak{p}\in \text{Supp}(M)} (\dim A/\mathfrak{p})$, et comme le spectre d'un anneau de Cohen-Macaulay est bi-équidimensionel, on a l'égalité voulue.

Revenons à la proposition.

D'après le lemme, on a $\text{grade}(B) = q$. Comme $\text{prof}(B) = p$, on a $\text{dp}_A(B) = q$. On en déduit

$$\text{Ext}^i_A(B , A) = 0 \qquad \text{pour } i \neq q \ .$$

Si f est un élément de A qui est B-régulier, la suite exacte

$$0 \to B \xrightarrow{f} B \to B/fB \to 0$$

donne une suite exacte :

(1) $0 \to \text{Ext}^q_A(B/fB , A) \to \text{Ext}^q_A(B , A) \xrightarrow{f} \text{Ext}^q_A(B , A) \to \text{Ext}^{q+1}_A(B/fB , A) \to 0.$

Mais d'après le lemme $\text{grade}_A(B/fB) = q + 1$, c'est-à-dire $\text{Ext}^q_A(B/fB , A) = 0$. On a donc un isomorphisme :

$$\text{Ext}^q_A(B , A)/f\,\text{Ext}^q(B , A) \simeq \text{Ext}^{q+1}_A(B/fB , A) \ .$$

On a

$$\text{Ext}^q_A(B , A) \text{ monogène} \iff \text{Ext}^{q+1}_A(B/fB , A) \text{ monogène}$$

et

$$\text{Ext}^q_A(B , A) \text{ libre sur } B \iff \text{Ext}^{q+1}_A(B/fB , A) \text{ libre sur } B/fB \ ,$$

car f est aussi $\text{Ext}^q_A(B , A)$-régulier d'après la suite exacte (1). Comme

$$B \text{ Gorenstein} \iff B/fB \text{ Gorenstein},$$

la proposition se déduit de l'hypothèse de récurrence.

Cette proposition montre l'accord avec la définition de Grothendieck des anneaux de Gorenstein.

Chapitre 2

La catégorie $\mathfrak{E}$.

§ 2.1. Le foncteur $\underset{\sim}{F}$.

Soient $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ deux catégories abéliennes. On suppose que $\mathbb{C}$ possède assez d'objets projectifs. Soit F un foncteur de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{D}$. On construit le foncteur $\underset{\sim}{F} : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ de la façon suivante :

1° Soit C un objet de $\mathbb{C}$. Si P est un objet projectif de $\mathbb{C}$ tel que

$$P \to C \to 0$$

soit une suite exacte, on pose

$$\underset{\sim}{F}(C) = \operatorname{Coker}(F(P) \to F(C)) .$$

Montrons que $\underset{\sim}{F}(C)$ est indépendant du choix de l'objet projectif P .

Considérons le diagramme commutatif suivant où la ligne et la colonne sont exactes.

$$\begin{tikzcd} & 0 & \\ P \arrow[r, "f"] \arrow[dr, shift left, "\alpha"] & C \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\ & P' \arrow[u, "f'"'] \arrow[ul, shift left, "\beta"] & \end{tikzcd}$$

Les objets P et P' étant projectifs, on a construit les flèches α et β factorisant les flèches f et f' . D'où le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} F(P) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, shift left, "F(\alpha)"] & F(C) \arrow[r] & \operatorname{Coker}(F(f)) \arrow[r] & 0 \\ & F(P') \arrow[u, "F(f')"'] \arrow[ul, shift left, "F(\beta)"] & & \end{tikzcd}$$

Soit D un objet de $\mathbb{D}$ et soit une flèche $\xi : F(C) \to D$ tels que $\xi \circ F(f') = 0$. Alors,

$$\xi \circ F(f') \circ F(\alpha) = 0 .$$

Donc

$$\xi \circ F(f) = 0 .$$

Ceci implique que ξ se factorise uniquement par $F(C) \to \operatorname{Coker} F(f)$. On en déduit que

$$\operatorname{Coker} F(f) = \operatorname{Coker} F(f') .$$

Ce qui montre que $\underset{\sim}{F}(C)$ est indépendant du choix de l'objet projectif P.

$$\begin{tikzcd}
 & D & & \\
F(P) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, shift left, "F(\alpha)"] & F(C) \arrow[u, "\xi"'] \arrow[r] & \operatorname{Coker}(F(P)) \arrow[r] & 0 \\
 & F(P') \arrow[u, "F(f')"'] \arrow[ul, shift left, "F(\beta)"] & &
\end{tikzcd}$$

Dans toute la suite, lorsqu'on écrira une suite exacte

$$P_C \to C \to 0 ,$$

il sera sous-entendu que P_C est un objet projectif.

2° Soit $\xi : C \to C'$ une flèche de $\mathcal{C}$. Considérons le diagramme commutatif suivant ;

$$\begin{tikzcd}
P_C \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, "\xi"] & 0 \\
P_{C'} \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} ,$$

il existe $\eta : P_C \to P_{C'}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
P_C \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\xi"] & 0 \\
P_{C'} \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On obtient alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(P_C) \arrow[r] \arrow[d, "F(\eta)"'] & F(C) \arrow[r] \arrow[d, "F(\xi)"] & \underset{\sim}{F}(C) \arrow[r] & 0 \\
F(P_{C'}) \arrow[r] & F(C') \arrow[r] & \underset{\sim}{F}(C') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} ,$$

il existe une flèche unique $\underset{\sim}{F}(\xi) : \underset{\sim}{F}(C) \to \underset{\sim}{F}(C')$ rendant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
F(P_C) \arrow[r] \arrow[d, "F(\eta)"] & F(C) \arrow[r] \arrow[d, "F(\xi)"] & \underset{\sim}{F}(C) \arrow[r] \arrow[d, "\underset{\sim}{F}(\xi)"] & 0 \\
F(P_{C'}) \arrow[r] & F(C') \arrow[r] & \underset{\sim}{F}(C') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

On a montré que $\underset{\sim}{F}$ est un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$.

On vérifie aisément que le morphisme $F \mapsto \underset{\sim}{F}$ donne un foncteur de la catégorie abélienne $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ dans elle-même

PROPOSITION 1. - *Dans la situation décrite, on a les propriétés suivantes* :

(a) *Pour tout objet projectif* P *de* $\mathcal{C}$, $\underset{\sim}{F}(P) = 0$. *Si une flèche* $f : C \to C'$ *se factorise à travers un objet projectif, on a* $\underset{\sim}{F}(f) = 0$;

(b) *Les propositions suivantes sont équivalentes* :

(i) $F \to \underset{\sim}{F}$ *est un isomorphisme de foncteur* ;
(ii) $F(P) = 0$ *pour tout objet projectif* P , *de* $\mathcal{C}$;
(iii) $F = \underset{\sim}{F}$;

(c) *Si* F *est semi-exact,* $\underset{\sim}{F}$ *est semi-exact.*

Démonstration.

(a) est évident.

(b)-(i) $\Rightarrow$ (b)-(ii) par (a). On vérifie trivialement (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (iii) $\Rightarrow$ (i).

(c). Considérons le diagramme suivant, où les lignes et les colonnes sont exactes

$$\begin{tikzcd}
 & P_{C'} \arrow[d] & & P_{C''} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & C \arrow[r, "\xi"] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

on peut le compléter de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_{C'} \arrow[r] \arrow[d] & P_{C'} \times P_{C''} \arrow[r] \arrow[d] & P_{C''} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & C \arrow[r, "\xi"] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où $P_{C'} \times P_{C''} \to C = (P_{C' \to C}) + (P_{C'' \to C})$ et où les lignes et les colonnes sont exactes.

On obtient alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(P_{C'}) \arrow[r] \arrow[d] & F(P_{C'} \times P_{C''}) \arrow[r] \arrow[d] & F(P_{C''}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& F(C') \arrow[r, "F(\eta)"] \arrow[d, "\pi'"] & F(C) \arrow[r, "F(\xi)"] \arrow[d] & F(C'') \arrow[d] & \\
& \underset{\sim}{F}(C') \arrow[r, "\underset{\sim}{F}(\eta)"] \arrow[d] & \underset{\sim}{F}(C) \arrow[r, "F(\xi)"] \arrow[d] & \underset{\sim}{F}(C'') \arrow[d] & \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Les deux premières lignes et les 3 colonnes sont exactes. Montrons que la 3e ligne est exacte.

Comme $F(\xi)\ \underset{\sim}{F}(\eta)\ \pi' = 0$, la 3e ligne est une suite nulle ([2]). Soient

$$K = \mathrm{Ker}(F(\xi)) \qquad \text{et} \qquad N = \mathrm{Ker}(\underset{\sim}{F}(\xi)) .$$

On vérifie l'existence du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(P_{C'}) \arrow[r] \arrow[dd] & & F(P_{C'} \times P_{C''}) \arrow[r] \arrow[dd] & F(P_{C''}) \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \\
0 \arrow[rr] & & K \arrow[dr] \arrow[dd] & & & \\
& F(C') \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & F(C) \arrow[r] \arrow[dd] & F(C'') \arrow[dd] & \\
0 \arrow[rr] & & N \arrow[dr] & & & \\
& \underset{\sim}{F}(C') \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[d] & & \underset{\sim}{F}(C) \arrow[r] \arrow[d] & \underset{\sim}{F}(C'') \arrow[d] & \\
& 0 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Comme $F(C') \to K$ est un épimorphisme, il suffit de montrer que $K \to N$ est un épimorphisme pour montrer que $\underset{\sim}{F}(C') \to N$ est un épimorphisme.

Soit $N' = \mathrm{Coker}(F(P_{C'}) \to K)$, on a le diagramme commutatif :

([2]) Nous appelons "nulle" une suite dont la flèche composée est nulle.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(P_{C'}) \arrow[rr] \arrow[d] & & F(P_{C'} \times P_{C''}) \arrow[r] \arrow[d] & F(P_{C''}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & F(C) \arrow[r] \arrow[dd] & F(C'') \arrow[dd] & \\
& & N \arrow[dr] & & & \\
& N' \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[d] & & \underset{\sim}{F}(C) \arrow[r] \arrow[d] & \underset{\sim}{F}(C'') \arrow[d] & \\
& 0 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

D'après le "diagramme du serpent", la 3e ligne est exacte, donc $(N' \to N)$ est un épimorphisme et $(K \to N)$ aussi.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> $\mathcal{C}$ <u>possède assez d'objets injectifs, et si</u> F <u>est exact à gauche, alors</u> $\underset{\sim}{R^i F}$ <u>est semi-exact ; de plus, pour tout</u> i <u>et pour toute suite exacte</u> $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$, <u>on a une suite exacte</u> :

$$\underset{\sim}{R^i F}(C') \to \underset{\sim}{R^i F}(C) \to \underset{\sim}{R^i F}(C'') \to R^{i+1} F(C') \to R^{i+1} F(C) \to R^{i+1} F(C'')$$

<u>Démonstration</u>. - La première assertion est une conséquence immédiate de (c). Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& P_{C''} \arrow[dl] \arrow[d] & \\
C \arrow[r] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 &
\end{tikzcd}$$

où la ligne et la colonne sont exactes. La flèche $(P_{C''} \to C)$ a pu être construite car $P_{C''}$ est projectif. Il donne le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& R^i F(P_{C''}) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
R^i F(C) \arrow[r] \arrow[d] & R^i F(C'') \arrow[r] \arrow[d] & R^{i+1} F(C') \arrow[r] & R^{i+1} F(C) \\
\underset{\sim}{R^i F}(C) \arrow[d] & \underset{\sim}{R^i F}(C'') \arrow[d] & & \\
0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

La suite $R^i F(P_{C''}) \to R^i F(C'') \to R^{i+1} F(C')$ est nulle. Donc, il existe une flèche unique $\psi : \underline{R^i} F(C'') \to R^{i+1} F(C')$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & 0 & & & \\
& \mathrm{Ker}\,\eta \arrow[ur] \arrow[dr] & R^i F(P_{C''}) \arrow[d] & & & \\
R^i F(C) \arrow[ur] \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dd, "\alpha"'] & & R^i F(C'') \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dd, "\beta"] \arrow[dr, "\eta'"] & & R^{i+1} F(C') \arrow[r, "\varphi"] & R^{i+1} F(C) \\
& & & \mathrm{Ker}\,\varphi \arrow[ur] & & \\
\underline{R^i} F(C) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[d] & & \underline{R^i} F(C'') \arrow[ur, "\psi'"'] \arrow[d] \arrow[uurr, bend right, "\psi"'] & & & \\
0 & \mathrm{Ker}\,\psi \arrow[ur] & 0 & & & \\
0 \arrow[ur] & & & & &
\end{tikzcd}
$$

(a) Exactitude en $R^{i+1} F(C')$. – On a $\varphi\psi\beta = \varphi\eta = 0$, donc $\varphi\psi = 0$, car β est un épimorphisme. Le diagramme suivant est commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
R^i F(C'') \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, "\eta'"] & R^{i+1} F(C') \arrow[r, "\varphi"] & R^{i+1} F(C) \\
\underline{R^i} F(C'') \arrow[r, "\psi'"'] \arrow[ur, "\psi"] & \mathrm{Ker}\,\varphi \arrow[u] & \\
& 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

On a $\psi'\beta = \eta'$, or η' est un épimorphisme ; par conséquent ψ' est un épimorphisme, et la suite est exacte en $R^{i+1} F(C')$.

(b) Exactitude en $\underline{R^i} F(C'')$. – On a $\psi\delta\alpha = \eta\omega = 0$. Comme α est un épimorphisme, $\psi\delta = 0$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} \eta \arrow[r] & R^i F(C'') \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "\beta"] & \operatorname{Ker} \varphi \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id.}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} \psi \arrow[r] & \underset{\sim}{R}^i F(C'') \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} \varphi \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

D'après le "diagramme du serpent", l'application γ ; $\operatorname{Ker} \eta \longmapsto \operatorname{Ker} \psi$, rendant le diagramme commutatif, est telle que

$$0 \to \operatorname{Coker} \gamma \to 0$$

est une suite exacte, donc γ est un épimorphisme. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
R^i F(C) \arrow[r, "\omega'"] \arrow[d, "\alpha"] & \operatorname{Ker} \eta \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & R^i F(C'') \arrow[d, "\beta"] \\
\underset{\sim}{R}^i F(C) \arrow[r, "\delta'"] & \operatorname{Ker} \psi \arrow[r] & \underset{\sim}{R}^i F(C'')
\end{tikzcd}$$

Comme ω' et γ sont des épimorphismes, il en est de même de δ' .

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2. - *Si* $\mathcal{C}$ *possède assez d'objets injectifs, et si* F *est un foncteur exact à gauche, alors, pour tout* $i \geq 0$, *les propositions suivantes sont équivalentes* :

1° *Pour toute suite exacte de* $\mathcal{C}$: $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$, *la suite*

$$\underset{\sim}{R}^i F(C) \to \underset{\sim}{R}^i F(C'') \to \underset{\sim}{R}^{i+1} F(C') \to \underset{\sim}{R}^{i+1} F(C)$$

est exacte ;

2° *Pour toute suite exacte de* $\mathcal{C}$: $0 \to C' \to C \to C''$, *où* C *est projectif, la flèche* $\underset{\sim}{R}^i F(C'') \to \underset{\sim}{R}^{i+1} F(C')$ *est un isomorphisme* ;

3° $R^{i+1} F(P) = 0$ *pour tout objet projectif* P *de* $\mathcal{C}$.

Démonstration. - Remarquons d'abord que la flèche $\underset{\sim}{R}^i F(C'') \to \underset{\sim}{R}^{i+1} F(C')$ est la composée des flèches

$$\underline{R^i F}(C'') \to R^{i+1} F(C') \quad \text{et} \quad R^{i+1} F(C') \to \underline{R^{i+1} F}(C') .$$

Les implications, $1° \Rightarrow 2°$, et $3° \Rightarrow 1°$, sont des conséquences immédiates du corollaire et du (b) de la proposition 1.

Il reste à démontrer que $2° \Rightarrow 3°$.

Soit P un objet projectif. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & P_I \arrow[r] \arrow[d] & I/P \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & I/P \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

où I est un objet injectif et où l'existence et l'unicité de la flèche $K \to P$ se vérifient évidemment. Les lignes et les colonnes sont exactes. Soit

$$L = \mathrm{Ker}(P_I \to I) .$$

On a $(L \to P_I \to I/P) = (L \to P_I \to I \to I/P) = 0$, donc il existe un monomorphisme de L dans K rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & L \arrow[r, equal] \arrow[d] & L \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"'] & P_I \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & I/P \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d] & I/P \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

La première colonne est exacte d'après le "diagramme du serpent", donc, les lignes et les colonnes du diagramme sont toutes exactes.

Considérons le diagramme commutatif dont les lignes et les colonnes sont exactes.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & P_I \arrow[r] \arrow[d, equal] & I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & P_I \arrow[r] \arrow[d] & I/P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & P \arrow[d] & 0 & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}
$$

D'après 2°, on a le diagramme commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^i\,\mathbf{F}(I) \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d] & \mathbf{R}^{i+1}\,\mathbf{F}(L) \arrow[d] \\
\mathbf{R}^i\,\mathbf{F}(I/P) \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d] & \mathbf{R}^{i+1}\,\mathbf{F}(K) \arrow[d] \\
R^{i+1}\,F(P) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{R}^{i+1}\,\mathbf{F}(P) = 0 \\
R^{i+1}\,F(I) = 0 &
\end{tikzcd}
$$

où les colonnes sont exactes d'après le corollaire de la proposition 1 et où $R^{i+1}\,F(I) = 0$ car I est injectif, et $\mathbf{R}^{i+1}\,\mathbf{F}(P) = 0$ car P est projectif. Le diagramme montre que la flèche $\mathbf{R}^i\,\mathbf{F}(I) \to \mathbf{R}^i\,\mathbf{F}(I/P)$ est un épimorphisme, donc que $R^{i+1}\,F(P) = 0$.

§ 2.2. La catégorie $\mathfrak{C}$.

Définition. - Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant assez d'objets projectifs. Si C et D sont deux objets de $\mathcal{C}$, soit R la relation d'équivalence définie dans $\mathrm{Hom}(C , D)$ par $\xi R \eta \iff \xi - \eta$ se factorise à travers un projectif. On appelera $\mathfrak{C}$ la catégorie ayant les mêmes objets que $\mathcal{C}$ (pour éviter les confusions, on représentera en majuscules grasses les objets de $\mathfrak{C}$) et dont les flèches sont définies par

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathbf{C} , \mathbf{D}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C , D)/R$$

pour tout C et tout D de $\mathcal{C}$.

On a un foncteur canonique plein $\mathcal{U}$ de $\mathcal{C}$ dans $\underset{\sim}{C}$, défini par $\mathcal{U}(C) = \underset{\sim}{C}$, et, pour $\xi \in \mathrm{Hom}(C , D)$, $\mathcal{U}(\xi)$ = classe de ξ modulo R .

PROPOSITION 3. - <u>Les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C , .)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\underset{\sim}{C} , .) \circ \mathcal{U}$ de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des groupes abéliens sont isomorphes</u>.

Soit D un objet de $\mathcal{C}$, et $P_D \to D \to 0$ une suite exacte. On vérifie que dire que " $\xi \in \mathrm{Hom}(C , D)$ se factorise à travers un projectif" est équivalent à dire que " ξ se factorise à travers P_D ". On a donc une suite exacte de groupes abéliens :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C , P_D) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C , D) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\underset{\sim}{C} , \underset{\sim}{D}) \to 0$$

qui donne bien un isomorphisme canonique unique de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C , D)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\underset{\sim}{C} , \underset{\sim}{D})$.

Soit $\mathcal{Q}$ une catégorie abélienne ; considérons les foncteurs suivants :

$\tilde{\mathcal{U}}$: $\mathrm{Hom}(\mathfrak{C} , \mathcal{Q}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C} , \mathcal{Q})$, défini par $\tilde{\mathcal{U}}(F) = F \circ \mathcal{U}$

$\mathcal{V}$: $\mathrm{Hom}(\mathcal{C} , \mathcal{Q}) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{C} , \mathcal{Q})$, défini par $\mathcal{V}(F)(\underset{\sim}{C}) = \underset{\sim}{F}(C)$
et $\mathcal{V}(F)(\mathcal{U}(\xi)) = \underset{\sim}{F}(\xi)$

(on vérifie que $\mathcal{V}$ est bien défini).

PROPOSITION 4. - <u>Le foncteur $\mathcal{V}$ est un adjoint à gauche de $\tilde{\mathcal{U}}$ (c'est-à-dire que pour tout $G \in \mathrm{Hom}(\mathcal{C} , \mathcal{Q})$ et pour tout $F \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{C} , \mathcal{Q})$, on a un isomorphisme</u>

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{V}(G) , F) \simeq \mathrm{Hom}(G , \tilde{\mathcal{U}}(F)) .$$

Soit $\mu \in \mathrm{Hom}(G , \tilde{\mathcal{U}}(F))$; soient C et D des objets de $\mathcal{C}$, et soit $\xi : C \to D$ une flèche.

On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
F \circ \mathcal{U}(P_C) \arrow[d] & G(P_C) \arrow[l] \arrow[d] & & \\
F \circ \mathcal{U}(C) & G(C) \arrow[l, "\mu(C)"'] \arrow[r, "G(\xi)"] \arrow[d] & G(D) \arrow[r] \arrow[d] & F \circ \mathcal{U}(D) \\
 & \mathcal{V}(G)(\underset{\sim}{C}) \arrow[ul, dashed, "\mu'(\underset{\sim}{C})"] \arrow[r, "\mathcal{V}(G)(\mathcal{U}(\xi))"] \arrow[d] & \mathcal{V}(G)(\underset{\sim}{D}) \arrow[ur, dashed] \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Le diagramme sans les pointillés étant commutatif, et $\mathcal{U}(P_C)$ étant nul, on en déduit l'existence et l'unicité de $\mu'(\mathbf{C})$ (et donc aussi de $\mu'(\mathbf{D})$, rendant commutatif le diagramme. On a donc associé à μ le morphisme $\mu' \in \mathrm{Hom}(\mathcal{Y}(G)\ ,\ F)$. On vérifie que cette application est un isomorphisme de groupe.

THÉORÈME 1 (ECKMANN-HILTON). - *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie abélienne possédant assez d'objets projectifs. Le foncteur*

$$(\mathfrak{C})^0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}\ ,\ \mathbf{Ab})\ ,$$

défini par $\mathbf{C} \to \mathrm{Ext}^1(C\ ,\ .)$ *et par* $\mathcal{U}(\xi) \to \mathrm{Ext}^1(\xi\ ,\ .)$ *si* $\xi : C \to D$ *est une flèche de* $\mathcal{C}$, *est pleinement fidèle.*

Supposons que ξ se factorise par un projectif P . Alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ext}^1(P\ ,\ .) = 0 \arrow[dr] & \\ \mathrm{Ext}^1(D\ ,\ .) \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, "\mathrm{Ext}^1(\xi,.)"] & & \mathrm{Ext}^1(C\ ,\ .) \end{tikzcd}$$

montre que $\mathrm{Ext}^1(\xi\ ,\ .)$ est nul. Donc le foncteur est défini.

LEMME 1. - *Dans la catégorie* $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}\ ,\ \mathbf{Ab})$, *les foncteurs* $\mathrm{Hom}(A\ ,\ .)$ *sont des objets projectifs.*

Soit $G \in \mathrm{Hom}(\mathcal{C}\ ,\ \mathbf{Ab})$. On sait que $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A\ ,\ .)\ ,\ G)$ est isomorphe à $G(A)$ (fonctoriellement en G).

Soit $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ une suite exacte de $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}\ ,\ \mathbf{Ab})$. Alors, pour tout A , la suite $0 \to G'(A) \to G(A) \to G''(A) \to 0$ est exacte, donc la suite que voici est exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A\ ,\ .)\ ,\ G') \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A\ ,\ .)\ ,\ G) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A\ ,\ .)\ ,\ G'') \to 0$$

Ceci exprime que $\mathrm{Hom}(A\ ,\ .)$ est un projectif de la catégorie $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}\ ,\ \mathbf{Ab})$.

Revenons maintenant au théorème d'Eckmann-Hilton, et montrons que le foncteur est pleinement fidèle.

(a) Toute flèche $\mathrm{Ext}^1(C\ ,\ .) \to \mathrm{Ext}^1(C'\ ,\ .)$ provient d'une flèche $C' \to C$. En effet, considérons les suites exactes :

$$0 \to K \to P_C \to C \to 0$$

$$0 \to K' \to P_{C'} \to C' \to 0$$

On en déduit le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C\,,.) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P_C\,,\,.) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(K\,,\,.) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(C\,,\,.) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C'\,,\,.) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P_{C'}\,,\,.) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(K'\,,\,.) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(C'\,,\,.) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le lemme montre que la flèche $\mathrm{Ext}^1(C\,,\,.) \to \mathrm{Ext}^1(C'\,,\,.)$ provient d'une flèche

$$\mathrm{Hom}(C\,,\,.) \to \mathrm{Hom}(C'\,,\,.)\ ,$$

c'est-à-dire d'un élément de $\mathrm{Hom}(C'\,,\,C)$.

(b) En considérant toujours le même diagramme, si on suppose que

$$\mathrm{Ext}^1(C\,,\,.) \to \mathrm{Ext}^1(C'\,,\,.)$$

est la flèche nulle, on en déduit que toute flèche $\mathrm{Hom}(C\,,\,.) \to \mathrm{Hom}(C'\,,\,.)$, rendant le diagramme commutatif, est homotope à zéro, c'est-à-dire qu'il existe une flèche $\mathrm{Hom}(P_C\,,\,.) \to \mathrm{Hom}(C'\,,\,.)$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(C\,,\,.) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(P_C\,,\,.) \arrow[dl] \\
\mathrm{Hom}(C'\,,\,.) &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif, donc que la flèche $C' \to C$, dont provient $\mathrm{Hom}(C\,,\,.) \to \mathrm{Hom}(C',.)$, se factorise à travers le projectif P_C . On a démontré que le foncteur était non seulement plein, mais pleinement fidèle.

LEMME 2 (SCHANUEL). - <u>Si les deux suites</u>

$$0 \to K \to P \to C \to 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \to K' \to P' \to C \to 0$$

<u>sont exactes, il existe un isomorphisme entre</u> $K \oplus P'$ <u>et</u> $K' \oplus P$.

Si $P \times_C P'$ est le produit fibré de P et P' sur C , on peut construire le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & K' \arrow[d] & K' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & P \times_C P' \arrow[r] \arrow[d] & P' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

On vérifie facilement que les lignes et les colonnes sont exactes. Comme P et P' sont projectifs, on a des isomorphismes :

$$P \oplus K' \simeq P \times_C P' \simeq P' \oplus K$$

ce qui démontre le lemme.

Considérons maintenant le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K & \to & P_C & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \\ 0 & \to & K' & \to & P_{C'} & \to & C' & \to & 0 \end{array}$$

où P_C et $P_{C'}$ sont projectifs.

D'après le lemme précédent, si $C = C'$ et $\alpha = \mathrm{id}_C$, alors on a, dans $\underset{\sim}{C}$, des isomorphismes canoniques

$$\underset{\sim}{K} \simeq \underset{\sim}{K} \oplus \underset{\sim}{P_{C'}} \simeq \underset{\sim}{K'} \oplus \underset{\sim}{P_C} \simeq \underset{\sim}{K'} \ .$$

Remarquons aussi que si α est nulle, il existe une flèche $P_C \to K'$ rendant le diagramme commutatif, c'est-à-dire qu'on a $\mathcal{U}(\gamma) = 0$. Ceci nous permet de poser la définition suivante :

DÉFINITION. - <u>On appelle foncteur de suspension de</u> $\mathfrak{C}$ <u>dans</u> $\mathfrak{C}$, <u>le foncteur défini par</u> $\Omega^1(\underset{\sim}{C}) = \underset{\sim}{K}$ <u>et</u> $\Omega_1(\mathcal{U}(\alpha)) = \mathcal{U}(\gamma)$.

On écrira

$$\Omega^k(\underset{\sim}{C}) = \Omega^1(\Omega^{k-1}(\underset{\sim}{C})) \qquad \text{et} \qquad \Omega^0(\underset{\sim}{C}) = \underset{\sim}{C} \ .$$

PROPOSITION 5. - <u>On a un isomorphisme de foncteurs entre</u> $\mathrm{Ext}^i(A\ ,\ .)$ <u>et</u> $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Omega^i(\underset{\sim}{A})\ ,\ .)$

Raisonnons par récurrence. Pour $i = 0$, c'est la proposition 3. Pour $i > 0$, considérons les suites exactes

$$0 \to K_i \to P_i \to \dots \to P_1 \to A \to 0$$

$$P_C \to C \to 0$$

où les P_i et P_C sont projectifs.

De la suite exacte $0 \to K_i \to P_i \to K_{i-1} \to 0$, on déduit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(P_i\,,\,P_C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(K_i\,,\,P_C) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(K_{i-1}\,,\,P_C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(P_i\,,\,P_C) = 0 \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(P_i\,,\,C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(K_i\,,\,C) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(K_{i-1}\,,\,C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(P_i\,,\,C) = 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}(K_i\,,\,C) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Ext}}^1(K_{i-1}\,,\,C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

D'après un "diagramme du serpent", α est un isomorphisme. On a

$$\underline{\mathrm{Hom}}(K_i\,,\,.) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathfrak{C}}(\Omega^i(\underset{\sim}{A})\,,\,.)\ .$$

Comme, par décalage,

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1(K_{i-1}\,,\,.) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^i(A\,,\,.)\ ;$$

la proposition est démontrée.

COROLLAIRE 1. - <u>Les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>L'homomorphisme canonique</u> $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Omega^i(\underset{\sim}{C})\,,\,.) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Omega^{i+1}(\underset{\sim}{C})\,,\,\Omega^1(.))$ <u>est un isomorphisme</u> ;

(ii) $\mathrm{Ext}^{i+1}(C\,,\,P) = 0$ <u>pour tout projectif</u> P <u>de</u> $\mathcal{C}$.

D'après la proposition, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Omega^i(\underset{\sim}{C})\,,\,.) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^i(C\,,\,.)\ ,$$

et par abus d'écriture

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Omega^{i+1}(\underset{\sim}{C})\,,\,\Omega^1(.)) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^{i+1}(C\,,\,\Omega^1(.))\ .$$

Le corollaire résulte alors de $2° \Longleftrightarrow 3°$ dans la proposition 2, appliquée au foncteur $\mathrm{Hom}(C\,,\,.)$.

COROLLAIRE 2. - <u>Soient</u> $n \geq 1$ <u>et</u> C <u>un objet de</u> $\mathcal{C}$. <u>Si</u> $\mathrm{Ext}^i(C\,,\,P) = 0$ <u>pour tout projectif</u> P <u>et pour</u> $1 \leq i \leq n-1$, <u>alors, pour tout</u> $D \in \mathcal{C}$, <u>l'homomorphisme canonique de</u> $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\underset{\sim}{C}\,,\,\underset{\sim}{D})$ <u>dans</u> $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^n(D\,,\,.)\,,\,\mathrm{Ext}^n(C\,,\,.))$ <u>est un isomorphisme</u>.

Pour $n = 1$, c'est le théorème de Eckmann-Hilton.

Pour $n > 1$, d'après le corollaire 1, on a un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\underset{\sim}{C}\ ,\ \underset{\sim}{D}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Omega^{n-1}(\underset{\sim}{C})\ ,\ \Omega^{n-1}(\underset{\sim}{D}))\ .$$

Par abus d'écriture, le théorème d'Eckmann-Hilton nous permet d'écrire

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Omega^{n-1}(\underset{\sim}{C})\ ,\ \Omega^{n-1}(\underset{\sim}{D})) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^1(\Omega^{n-1}(\underset{\sim}{D})\ ,\ .)\ ,\ \mathrm{Ext}^1(\Omega^{n-1}(\underset{\sim}{C})\ ,\ .)\ .$$

On en déduit le corollaire par décalage.

§ 2.3. Modules n-sphériques.

Sauf mention du contraire, les anneaux considérés sont noethériens et les modules de type fini.

DÉFINITION. - <u>Soit</u> A <u>un anneau. On dira qu'un</u> A-<u>module</u> M <u>est</u> n-<u>sphérique</u> <u>si</u> $dp_A\, M \leq n$ <u>et si</u> $\mathrm{Ext}^i(M\ ,\ A) = 0$ <u>pour</u> $1 \leq i \leq n-1$.

PROPOSITION 6. - <u>Soient</u> A <u>un anneau, et</u> N <u>un</u> A-<u>module tel que</u> grade $N \geq n$, <u>où</u> $n > 0$ <u>est un entier. Alors, il existe un</u> A-<u>module</u> n-<u>sphérique</u> M <u>tel que</u> $N \simeq \mathrm{Ext}^n(M\ ,\ A)$. <u>De plus, pour tout foncteur</u> G <u>de la catégorie des</u> A-<u>modules</u> <u>dans elle-même, l'application canonique</u> :

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^n(M\ ,\ .)\ ,\ G(.)) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^n(M\ ,\ A)\ ,\ G(A))$$

<u>est un isomorphisme</u>.

Soit $X_n \to \ldots \to X_0 \to N \to 0$ une résolution projective de longueur n de N .

Pour tout A-module C , nous écrirons $\mathrm{Hom}_A(C\ ,\ A) = C^*$. Comme $\mathrm{Ext}^i(N\ ,\ A) = 0$ pour $0 \leq i \leq n-1$, la suite

$$0 \to X_0^* \to \ldots \to X_n^*$$

est exacte.

Soit $M = \mathrm{Coker}(X_{n-1}^* \to X_n^*)$, alors la suite exacte $0 \to X_0^* \to \ldots \to X_n^* \to M \to 0$ donne, en dualisant, une suite

$$0 \to M^* \to X_n \to \ldots \to X_0 \to N \to 0\ ,$$

qui est évidemment exacte.

Les deux dernières suites exactes montrent que M est n-sphérique et que $N = \mathrm{Ext}^n(M\ ,\ A)$.

LEMME 3. - Soit T un foncteur additif et covariant de la catégorie des A-modules de type fini dans elle-même. On a un homomorphisme canonique de foncteur de $T(A) \otimes_A \cdot$ dans T. Pour que cet homomorphisme soit un isomorphisme, il faut et il suffit que T soit exact à droite.

Soit X un A-module. Pour tout $x \in X$, on notera $\varepsilon_x : A \to X$ l'homomorphisme défini par $\varepsilon_x(1) = x$. On en déduit un homomorphisme

$$T(\varepsilon_x) : T(A) \to T(X) .$$

On définit $\varphi_X : T(A) \otimes_A X \to T(X)$ par $\varphi_X(a \otimes x) = T(\varepsilon_x)(a)$. On vérifie aisément qu'on a défini ainsi un homomorphisme de foncteurs. Si cet homomorphisme est un isomorphisme, T, étant isomorphe à un foncteur exact à droite, est exact à droite.

Réciproquement, considérons une présentation $L \to P \to X \to 0$ de X. On en déduit le diagramme

$$\begin{tikzcd}
T(L) \arrow[r] & T(P) \arrow[r] & T(X) \arrow[r] & 0 \\
T(A) \otimes_A L \arrow[r] \arrow[u, "\varphi_L"', "\wr"] & T(A) \otimes_A P \arrow[r] \arrow[u, "\wr"', "\varphi_P"] & T(A) \otimes X \arrow[r] \arrow[u, "\varphi_X"'] & 0
\end{tikzcd}$$

φ_L et φ_P étant des isomorphismes, il en est de même de φ_X.

Revenons à la proposition. D'après le lemme, il suffit de montrer que

$$\mathrm{Hom}_A(N \otimes \cdot \, , G) \to \mathrm{Hom}_A(N \otimes A \, , G(A))$$

est un isomorphisme. Soit X un A-module. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
N \otimes A \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "1 \otimes \varepsilon_x"'] & G(A) \arrow[d, "G(\varepsilon_x)"] \\
N \otimes X \arrow[r, "f_X"] & G(X)
\end{tikzcd}$$

où $f \in \mathrm{Hom}(N \otimes \cdot \, , G)$ et où x est un élément de X.

Le diagramme pouvant être construit pour tout x, il montre que l'application que nous avons définie est injective et surjective, moyennant quelques vérifications.

COROLLAIRE. - Soient $N_1, \ldots, N_r$ des modules de type fini sur l'anneau A tels que $\mathrm{grade}(N_i) \geq i$ pour $i = 1, \ldots, r$. Alors, il existe un module M tel que $\mathrm{dp}_A M \leq r$ et $\mathrm{Ext}^i(M, A) \simeq N_i$ pour $i = 1, \ldots, r$. Réciproquement, si M est un module de dimension projective finie, alors $\mathrm{grade}\ \mathrm{Ext}_A^i(M, A) \geq i$ pour tout i.

D'après la proposition 6, il existe des A-modules M_i i-sphériques tels que $\mathrm{Ext}_A^i(M_i, A) \simeq N_i$. Posons $M = \bigoplus M_i$. On a alors :

$$\mathrm{dp}_A(M) \leq \sup \mathrm{dp}_A(M_i) \leq r \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ext}^i(M, A) = \bigoplus_j \mathrm{Ext}^i(M_j, A) = \mathrm{Ext}_A^i(M_i, A).$$

Réciproquement, si M est de dimension projective finie, on a

$$\mathrm{grade}(\mathrm{Ext}_A^i(M, A)) = \inf_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(\mathrm{Ext}^i(M,A))} (\mathrm{prof}\ A_{\mathfrak{p}}).$$

Mais, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\ \mathrm{Ext}_A^i(M, A)$ exprime que $\mathrm{Ext}_{A_{\mathfrak{p}}}^i(M_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}}) \neq 0$. Comme $M_{\mathfrak{p}}$ est de dimension projective finie sur $A_{\mathfrak{p}}$, on en déduit que $i \leq \mathrm{dp}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \leq \mathrm{prof}\ A_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\ \mathrm{Ext}^i(M, A)$, c'est-à-dire

$$i \leq \mathrm{grade}\ \mathrm{Ext}_A^i(M, A).$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 7. - Soient A un anneau et M un module sur A, tels que $\mathrm{Ext}_A^i(M, A) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ et tels que $\mathrm{grade}\ \mathrm{Ext}_A^n(M, A) \geq n$. Alors, il existe un module n-sphérique N et une application $\xi : M \to N$ tels que

$$\mathrm{Ext}_A^n(\xi, A) : \mathrm{Ext}_A^n(N, A) \to \mathrm{Ext}_A^n(M, A)$$

soit un isomorphisme.

D'après la proposition 6, il existe un module n-sphérique N tel que $\mathrm{Ext}_A^n(N, A)$ soit isomorphe à $\mathrm{Ext}_A^n(M, A)$. Montrons qu'il existe $\xi : M \to N$ tel que cet isomorphisme soit $\mathrm{Ext}_A^n(\xi, A)$.

D'après la 2e partie de la proposition 6, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}_A^n(N, .), \mathrm{Ext}_A^n(M, .)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}_A^n(N, A), \mathrm{Ext}_A^n(M, A)).$$

Mais le corollaire 2 de la proposition 5, nous donne un isomorphisme canonique de $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathfrak{C}}}(\underline{M}, \underline{N})$ dans $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}_A^n(N, .), \mathrm{Ext}_A^n(M, .))$.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 8. - Soient A un anneau et M un module sur A tel que $\mathrm{grade}(\mathrm{Ext}_A^i(M, A)) \geq i$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors, il existe un A-module libre F et une suite $M \oplus F = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n$ tels que :

(a) M_{i-1}/M_i est i-sphérique $(i = 1, \dots, n)$;

(b) l'homomorphisme canonique $M_{i-1} \to M_{i-1}/M_i$ donne, pour $j = 1, \dots, i$ un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}_A^j(M_{i-1}/M_i, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_A^j(M_{i-1}, A) .$$

Raisonnons par récurrence. Pour $n = 0$, l'hypothèse et la conclusion sont vides. Supposons la propriété vraie pour $n - 1$. On a la suite exacte :

$$\mathrm{Ext}_A^{n-2}(M_{n-2}/M_{n-1}, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_A^{n-2}(M_{n-2}, A) \to \mathrm{Ext}_A^{n-2}(M_{n-1}, A)$$
$$\to \mathrm{Ext}_A^{n-1}(M_{n-2}/M_{n-1}, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_A^{n-1}(M_{n-2}, A) \to \mathrm{Ext}_A^{n-1}(M_{n-1}, A)$$
$$\to \mathrm{Ext}_A^{n}(M_{n-2}/M_{n-1}, A) \to \mathrm{Ext}_A^{n}(M_{n-2}, A) \to \mathrm{Ext}_A^{n}(M_{n-1}, A) \to 0$$

Elle montre que

$$\mathrm{Ext}_A^i(M_{n-1}, A) = 0 \qquad \text{pour } i \leq n-1$$

et que

$$\mathrm{Ext}_A^n(M_{n-2}, A) \simeq \mathrm{Ext}_A^n(M_{n-1}, A) .$$

On vérifie de même que

$$\mathrm{Ext}_A^n(M_{n-i}, A) \simeq \mathrm{Ext}_A^n(M_{n-i+1}, A) \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq n-2 .$$

On en déduit que

$$\mathrm{Ext}_A^n(M, A) \simeq \mathrm{Ext}_A^n(M_{n-1}, A) .$$

Ceci implique $\mathrm{grade}(\mathrm{Ext}_A^n(M_{n-1}, A)) \geq n$. On peut donc appliquer la proposition 7 à M_{n-1}. Il existe un module N, n-sphérique, et une application $\xi : M_{n-1} \to N$ telle que $\mathrm{Ext}_A^n(\xi, A)$ soit un isomorphisme. On peut prendre un module libre de type fini L tel qu'on ait une suite exacte $M_{n-1} \oplus L \to N \to 0$.

Soit $M_n = \mathrm{Ker}(M_{n-1} \oplus L \to N)$. On vérifie facilement que la suite

$$M_0 + L \supset \dots \supset M_{n-i} + L \supset \dots \supset M_{n-1} + L \supset M_n$$

satisfait aux conditions de la proposition.

DÉFINITION. - Une suite $M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_n$, satisfaisant aux conditions de la proposition 8, est appelée une filtration sphérique de longueur n , de M .

PROPOSITION 9. - Soit $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_n$ une suite décroissante de sous-modules de M . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1° La chaîne est une filtration sphérique, de longueur n , de M ;

2° Pour $i = 1 , \ldots , n$, la suite $M^*_{i-1} \to M^*_i \to 0$ est exacte et

$$\mathrm{Ext}^j_A(M_i , A) = 0 \qquad \text{pour } 1 \leq j \leq i ,$$

de plus

$$\mathrm{Ext}^j_A(M_{i-1} , .) \to \mathrm{Ext}^j_A(M_i , .)$$

est un isomorphisme pour $j > i$;

3° Pour $i = 1 , \ldots , n$, la suite $M^* \to M^*_i \to 0$ est exacte et

$$\mathrm{Ext}^j_A(M_i , A) = 0 \qquad \text{pour } 1 \leq j \leq i ,$$

de plus

$$\mathrm{Ext}^j_A(M , .) \to \mathrm{Ext}^j_A(M_i , .)$$

est un isomorphisme pour $j > i$;

4° Pour $i = 1 , \ldots , n$, $\mathrm{dp}(M/M_i) \leq i$ et l'application $M \to M/M_i$ donne des isomorphismes :

$$\mathrm{Ext}^j_A(M/M_i , A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^j_A(M , A) \qquad \text{pour } 1 \leq j \leq i .$$

Démonstration.

1° $\Rightarrow$ 2° . Pour $i > 1$, $\mathrm{Ext}^1_A(M_{i-1}/M_i , A) = 0$. Pour $i = 1$,

$$\mathrm{Ext}^1_A(M_0/M_1 , A) \to \mathrm{Ext}^1_A(M_0 , A)$$

est un isomorphisme, donc $M^*_{i-1} \to M^*_i$ est toujours un épimorphisme. Comme M_i/M_{i+1} est $(i + 1)$-sphérique, l'isomorphisme $\mathrm{Ext}^j_A(M_i/M_{i+1} , A) \simeq \mathrm{Ext}^j_A(M_i , A)$ montre que

$$\mathrm{Ext}^j_A(M_i , A) = 0 \qquad \text{pour } 1 \leq j \leq i .$$

Puisque $dp(M_{i-1}/M_i) \leq i$, on voit évidemment dans la suite des Ext correspondant à $0 \to M_i \to M_{i-1} \to M_{i-1}/M_i \to 0$, que

$$\mathrm{Ext}_A^j(M_{i-1}\ ,\ .) \to \mathrm{Ext}_A^j(M_i\ ,\ .)$$

est un isomorphisme pour $j > i$.

2° $\Rightarrow$ 3° se voit trivialement.

3° $\Rightarrow$ 4° . Considérons la suite exacte de foncteurs :

$$\mathrm{Ext}_A^i(M_i\ ,\ .) \to \mathrm{Ext}_A^{i+1}(M/M_i\ ,\ .) \to \mathrm{Ext}_A^{i+1}(M\ ,\ .) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_A^{i+1}(M_i\ ,\ .) \ldots$$

$$\to \mathrm{Ext}_A^{i+2}(M/M_i\ ,\ .) \to \mathrm{Ext}_A^{i+2}(M\ ,\ .) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_A^{i+2}(M_i\ ,\ .)\ .$$

Elle montre que $\mathrm{Ext}_A^{i+2}(M/M_i\ ,\ .) = 0$, donc $dp(M/M_i) \leq i+1$. Comme

$$\mathrm{Ext}_A^i(M_i\ ,\ A) = 0\ ,$$

elle montre aussi que

$$\mathrm{Ext}_A^{i+1}(M/M_i\ ,\ A) = 0\ ,$$

donc $dp(M/M_i) \leq i$.

L'isomorphisme $\mathrm{Ext}_A^j(M/M_i\ ,\ A) \simeq \mathrm{Ext}_A^j(M\ ,\ A)$ est une conséquence du fait que $\mathrm{Ext}_A^j(M_i\ ,\ A) = 0$ pour $1 \leq j \leq i$ et du fait que $M^* \to M_i^*$ est un épimorphisme.

4° $\Rightarrow$ 1° . La suite exacte $0 \to M_{i-1}/M_i \to M/M_i \to M/M_{i-1} \to 0$ montre que $\mathrm{Ext}_A^{i+1}(M_{i-1}/M_i\ ,\ .) = 0$, donc que $dp(M_{i-1}/M_i) \leq i$. La suite exacte de foncteurs:

$$\mathrm{Ext}_A^1(M/M_{i-1}\ ,\ .) \to \mathrm{Ext}_A^1(M/M_i\ ,\ .) \to \mathrm{Ext}_A^1(M_{i-1}/M_i\ ,\ .) \to \ldots$$

$$\to \mathrm{Ext}_A^{i-2}(M_{i-1}/M_i\ ,\ .) \to \mathrm{Ext}_A^{i-1}(M/M_{i-1}\ ,\ .) \to \mathrm{Ext}_A^{i-1}(M/M_i\ ,\ .)$$

$$\to \mathrm{Ext}_A^{i-1}(M_{i-1}/M_i\ ,\ .) \to \mathrm{Ext}_A^i(M/M_{i-1}\ ,\ .) = 0$$

montre que $\mathrm{Ext}_A^j(M_{i-1}/M_i\ ,\ A) = 0$ pour $1 \leq j \leq i-1$, car les applications $\mathrm{Ext}^j(M/M_{i-1}\ ,\ A) \to \mathrm{Ext}_A^j(M/M_i\ ,\ A)$ sont des isomorphismes pour $1 \leq j \leq i-1$.

Finalement, M_{i-1}/M_i est bien i-sphérique.

Montrons maintenant la condition (b) de la proposition 8. Pour $i = 1$, c'est l'hypothèse. Pour $i > 1$ et pour $1 \leq j \leq i$, $\mathrm{Ext}_A^j(M_{i-1}/M_i\ ,\ A) = 0$, car M_{i-1}/M_i

est i-sphérique et les isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^j_A(M/M_{i-1}\ ,\ A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^j_A(M\ ,\ A) \qquad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq i-1$$

montre que

$$\mathrm{Ext}^j_A(M_{i-1}\ ,\ A) = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq i-1 \ .$$

On voit de même que

$$\mathrm{Ext}^j_A(M_i\ ,\ A) = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq i \ .$$

La suite exacte $0 \to M_i \to M_{i-1} \to M_{i-1}/M_i \to 0$ donne alors un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^i_A(M_{i-1}/M_i\ ,\ A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_A(M_{i-1}\ ,\ A)\ .$$

Remarques.

1° On sait que si $\mathrm{dp}_A(M) < \infty$, alors $\mathrm{grade}(\mathrm{Ext}^i_A(M\ ,\ A)) \geq i$ pour tout $i \geq 1$.

2° On en déduit, par la condition 4° de la proposition 9, que les conditions (a) et (b) de la proposition 8 caractérisent les modules tels que

$$\mathrm{grade}(\mathrm{Ext}^i_A(M\ ,\ A)) \geq i \qquad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n \ .$$

3° On sait que tout module de type fini sur un anneau de Gorenstein vérifie les hypothèses de la proposition 8.

Chapitre 3

Torsion.

§ 3.1. La k-torsion.

Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des modules de type fini sur un anneau noethérien A . Si M est un objet de $\mathcal{C}$, on notera $M^* = \mathrm{Hom}_A(M\ ,\ A)$.

Soit $F_1 \to F_0 \to M \to 0$ une suite exacte, où F_1 et F_0 sont des modules projectifs. On a alors une suite exacte

$$0 \to M^* \to F_0^* \to F_1^* \to M_1 \to 0$$

où $M_1 = \mathrm{Coker}(F_0^* \to F_1^*)$.

PROPOSITION 1. - On a une suite exacte de foncteurs :

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_A(M_1\ ,\ .) \to M \otimes_A . \to \mathrm{Hom}_A(M^*\ ,\ .) \to \mathrm{Ext}^2_A(M_1\ ,\ .) \to 0$$

En effet, soit $K = \mathrm{Coker}(M^* \to F_0^*) = \mathrm{Ker}(F_1^* \to M_1)$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[r] & M^* \arrow[r] & F_0^* \arrow[rr] \arrow[dr] & & F_1^* \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & 0 \\ & & & K \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\ & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & \end{tikzcd}$$

montre l'existence et l'exactitude de la suite de foncteurs :

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(K\ ,\ .) \to \mathrm{Hom}_A(F_0^*\ ,\ .) \to \mathrm{Hom}_A(M^*\ ,\ .) \to \mathrm{Ext}^1_A(K\ ,\ .) \to 0\ .$$

Par décalage, on voit que

$$\mathrm{Ext}^1_A(K\ ,\ .) = \mathrm{Ext}^2_A(M_1\ ,\ .)\ .$$

Comme F_0 est projectif, $\mathrm{Hom}_A(F_0^*\ ,\ A) = F_0$, et, d'après le lemme 3 du chapitre 2, on en déduit l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_A(F_0^*\ ,\ .) \simeq F_0 \otimes_A .\ .$$

On peut alors construire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & 0 & 0 & & & \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(M_1\ ,\ .) \arrow[r] \arrow[u] & M \otimes_A . \arrow[u] \arrow[dr] & & & \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(K\ ,\ .) \arrow[r] \arrow[u] & F_0 \otimes_A . \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_A(M^*\ ,\ .) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_A(M_1\ ,\ .) \arrow[r] & 0 \\ & \mathrm{Hom}_A(F_1^*\ ,\ .) \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & F_1 \otimes_A . \arrow[u] & & & \end{tikzcd}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier l'exactitude de la suite écrite dans la proposition.

Considérons maintenant un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\ F'_1 \arrow[r] & F'_0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où F_0 , F_1 , F'_0 et F'_1 sont projectifs et où les lignes sont exactes. On en déduit aisément un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M^* & \to & F_0^* & \to & F_1^* & \to & M_1 & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \beta & & \\ 0 & \to & M'^* & \to & F_0'^* & \to & F_1'^* & \to & M'_1 & \to & 0 \end{array}$$

où $M'_1 = \mathrm{Coker}(F_0'^* \to F_1'^*)$.

Par la proposition 1, on voit qu'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M_1\ ,\ .) & \to & M \otimes_\Lambda . & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(M^*\ ,\ .) & \to & \mathrm{Ext}^2_\Lambda(M_1\ ,\ .) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M'_1\ ,\ .) & \to & M' \otimes_\Lambda . & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(M'^*\ ,\ .) & \to & \mathrm{Ext}^2_\Lambda(M'_1\ ,\ .) & \to & 0 \end{array}$$

On vérifie facilement que si α se factorise à travers un projectif, on peut factoriser β à travers un projectif. Le diagramme montre donc que $\underset{\sim}{M} \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M_1\ ,\ .)$ est un foncteur de $\underset{\sim}{C}$ dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}\ ,\ \underset{\sim}{Ab})$.

D'après le théorème d'Eckmann-Hilton, on sait que $M_1 \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M_1\ ,\ .)$ est un foncteur pleinement fidèle de $(\underset{\sim}{C})^0$ dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}\ ,\ \underset{\sim}{Ab})$.

Il reste que si on pose $D(M) = M_1$, $D(.)$ est un foncteur contravariant de $\underset{\sim}{C}$ dans $\underset{\sim}{C}$.

PROPOSITION 1 bis. - On a une suite exacte de foncteurs

$$0 \to \mathrm{Tor}_2^\Lambda(D(M)\ ,\ .) \to M^* \otimes_\Lambda . \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M\ ,\ .) \to \mathrm{Tor}_1^\Lambda(D(M)\ ,\ .) \to 0$$

La démonstration est laissée au soin du lecteur.

DÉFINITION. - Avec les notations précédentes, on dit que M est sans k-torsion si $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(D(M)\ ,\ \Lambda) = 0$ pour $i = 1\ ,\ \dots\ ,\ k$.

$D(M)$ étant un foncteur de $\underset{\sim}{C}$ dans $\underset{\sim}{C}$, cette définition a bien une signification, car $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(D(M)\ ,\ \Lambda)$ est indépendant du choix de $D(M)$ pour $i \geq 1$.

Remarque. - M est sans 1-torsion $\Leftrightarrow$ M s'injecte dans M^{**} (c'est-à-dire M est sans torsion).

M est sans 2-torsion $\Leftrightarrow$ $M \simeq M^{**}$ (M est alors réflexif).

Ceci découle immédiatement de la première suite exacte.

PROPOSITION 2. - *Soit* k *un entier* $\geqslant 1$. *Les propositions suivantes sont équivalentes* :

(i) M *est sans* k-*torsion* ;

(ii) *Il existe une suite exacte* $0 \to M \to F_0 \to \dots \to F_{k-1}$, *où les* F_i *sont des modules libres, telle que la suite* $F^*_{k-1} \to \dots \to F^*_0 \to M^* \to 0$ *soit exacte*.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Pour $k = 1$, on sait que M s'injecte dans M^{**} . Soit $F_0 \to M^* \to 0$ une suite exacte où F_0 est libre, alors la suite $0 \to M^{**} \to F^*_0$ est exacte, donc M s'injecte dans le module libre F^*_0 .

Pour $k \geqslant 2$, une résolution libre $F_{k-1} \to \dots \to F_0 \to M^* \to 0$ donne, en dualisant, une suite $0 \to M^{**} \to F^*_0 \to F^*_{k-1}$ qui est exacte, car

$$\mathrm{Ext}^i_A(M^* \ , \ .) = \mathrm{Ext}^{i+2}_A(D(M) \ , \ .) \qquad \text{pour} \quad i \geqslant 1$$

par un décalage évident. Comme $M = M^{**}$, l'implication est démontrée.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Pour $k = 1$, la suite exacte $0 \to M \to F_0$ donne, en dualisant deux fois, une suite exacte $0 \to M^{**} \to F_0$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \arrow[d, "\wr\ \mathrm{id.}"] \\ 0 \arrow[r] & M^{**} \arrow[r] & F_0 \end{tikzcd}$$

qui montre que $M \to M^{**}$ est une injection.

Pour $k \geqslant 2$, (ii) exprime que $\mathrm{Ext}^i_A(M^* \ , A) = 0$ pour $i = 1 , \dots , k - 2$, donc que $\mathrm{Ext}^i_A(D(M) \ , A) = 0$ pour $i = 3 , \dots , k$. Il suffira donc de montrer que M est réflexif, ce qui est une conséquence du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & F_1 \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & M^{**} \arrow[r] & F_0 \arrow[r, "f"] & F_1 \end{tikzcd}$$

THÉORÈME 1. - *Soit* $k \geqslant 1$. *Les propositions suivantes sont équivalentes* :

1° $\Omega^k(M)$ *est sans* k-*torsion* ;

2° *Il existe une suite exacte* $0 \to B \to N \to M \to 0$ *telle que*

(a) $\mathrm{dp}\ B \leq k-1$;

(b) $\mathrm{Ext}^i_A(N , A) = 0$ pour $i = 1 , \ldots , k$;

3° $\mathrm{grade}(\mathrm{Ext}^{i+1}_A(M , A)) \geq i$ pour $1 \leq i \leq k-1$.

1° $\Rightarrow$ 2°. Pour $k \geq 2$, on a la suite exacte :

(i) $$0 \to \Omega^k \to F_{k-1} \to \ldots \to F_0 \to M \to 0$$

où les F_i sont projectifs.

Considérons maintenant une résolution projective de longueur $k-1$ de $(\Omega^k)^*$:

(ii) $$P_{k-1} \to P_{k-2} \to \ldots \to P_0 \to \Omega^{k*} \to 0$$

qui donne, en dualisant, une suite :

(iii) $$0 \to \Omega^{k**} \to P_0^* \to \ldots \to P_{k-2}^* \to P_{k-1}^* \to N \to 0$$

Par hypothèse, on a $\mathrm{Ext}^i_A(\Omega^{k*} , A) = 0$ pour $i = 1 , \ldots , k-2$, donc cette suite est exacte en tous ses termes si l'on a posé

$$N = \mathrm{Coker}(P_{k-2}^* \to P_{k-1}^*) .$$

Comme $k \geq 2$, Ω^k est réflexif, donc $\Omega^{k**} = \Omega^k$. Si on dualise à nouveau, on obtient la suite :

$$0 \to N^* \to P_{k-1} \to \ldots \to P_0 \to \Omega^{k*} \to 0 ,$$

qui est exacte en ses trois premiers termes, d'après l'exactitude à gauche du foncteur $\mathrm{Hom}_A(. , A)$, et en ses autres termes car on retrouve la suite (ii) .

Mais si $F_{k+1} \to F_k \to \Omega^k \to 0$ est une résolution projective de Ω^k , on a une suite exacte :

$$0 \to \Omega^{k*} \to F_k^* \to F_{k+1}^* \to D \to 0 \qquad (\text{on a posé } D = D(\Omega^k))$$

et les suites exactes :

$$F_{k+1} \to F_k \to P_0^* \to \ldots \to P_{k-1}^* \to N \to 0$$

$$0 \to N^* \to P_{k-1} \to \ldots \to P_0 \to F_k^* \to F_{k+1}^* \to D \to 0$$

montrent que $\mathrm{Ext}^i_A(N , A) = 0$ pour $i = 1 , \ldots , k$, donc que $\mathrm{Ext}^i_A(N , P) = 0$ pour $i = 1 , \ldots , k$ pour tout projectif P .

Dans les suites (i) et (iii), on voit , par décalage, des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}_A^{k+1}(N\ ,\ .) \simeq \mathrm{Ext}_A^1(\Omega^k\ ,\ .) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ext}_A^{k+1}(M\ ,\ .) \simeq \mathrm{Ext}_A^1(\Omega^k\ ,\ .)\ .$$

Par les corollaires de la proposition 5 du chapitre 2, l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}_A^{k+1}(M\ ,\ .) \simeq \mathrm{Ext}_A^{k+1}(N\ ,\ .)$$

provient d'un homomorphisme $\varepsilon\ :\ N \to M$, que l'on peut supposer surjectif en remplaçant s'il le faut N par son produit avec un module libre.

A partir de $\varepsilon\ :\ N \to M$, on peut construire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Omega^k \arrow[r] & F_{k-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Omega^k \arrow[r] \arrow[u, "\eta"] & P_0^* \arrow[r] \arrow[u] & {} \arrow[r] & P_{k-1}^* \arrow[r] \arrow[u] & N \arrow[r] \arrow[u, "\varepsilon"'] & 0 \end{tikzcd}$$

qui montre que $\mathrm{Ext}_A^1(1_{\Omega^k}\ ,\ .) = \mathrm{Ext}_A^1(\eta\ ,\ .)$. D'après le théorème d'Eckmann-Hilton, on en déduit que $\eta - 1_{\Omega^k}$ se factorise à travers un projectif, donc, pour tout $i \geqslant 1$, $\mathrm{Ext}^i(\eta\ ,\ .)$ est l'identité du foncteur $\mathrm{Ext}_A^i(\Omega^k\ ,\ .)$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}_A^{k+i}(M\ ,\ .) \arrow[r, "\mathrm{Ext}_A^{k+i}(\varepsilon,.)"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \mathrm{Ext}_A^{k+i}(N\ ,\ .) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ \mathrm{Ext}_A^i(\Omega^k\ ,\ .) \arrow[r, "\mathrm{Ext}_A^i(\eta,.)"] & \mathrm{Ext}_A^i(\Omega^k\ ,\ .) \end{tikzcd}$$

montre que $\mathrm{Ext}_A^{k+i}(\varepsilon\ ,\ .)$ est un isomorphisme pour $i \geqslant 1$. La suite exacte $0 \to B \to N \to M \to 0$ montre alors que $\mathrm{dp}\ B \leqslant k$. Comme $\mathrm{Ext}_A^k(N\ ,\ A) = 0$, $\mathrm{Ext}_A^k(B\ ,\ A) = 0$, donc $\mathrm{dp}\ B \leqslant k - 1$. Il reste à démontrer que $1° \Rightarrow 2°$ dans le cas $k = 1$.

Soit donc une suite exacte $0 \to \Omega \to F \to M \to 0$ où F est libre. Il existe alors un module libre P tel que l'on ait une suite exacte :

$$F^* \oplus P \to \Omega^* \to 0\ .$$

En dualisant, on obtient

$$0 \to \Omega^{**} \to F \oplus P^*\ .$$

Mais comme $\Omega \subset \Omega^{**}$, on peut écrire une suite exacte :

(i) $$0 \to \Omega \to F \oplus P^{*} \to K \to 0$$

en dualisant

(ii) $$0 \to K^{*} \to F^{*} \oplus P \to \Omega^{*} \to 0 .$$

Alors, (i) montre que $\mathrm{Ext}^{i}_{A}(M , .) \simeq \mathrm{Ext}^{i}_{A}(K , .)$ pour $i \geq 2$, et (ii) montre que $\mathrm{Ext}^{1}_{A}(K , A) = 0$. On termine le raisonnement comme pour le cas $k \geq 2$ en considérant l'application $K \to M$.

2° => 3° est évident car, par décalage, on a

$$\mathrm{Ext}^{i+1}_{A}(M , A) \simeq \mathrm{Ext}^{i}_{A}(B , A) \qquad \text{pour } i = 1 , \dots , k-1 .$$

3° => 1° . Enonçons d'abord le lemme suivant :

LEMME 1. - <u>Soit</u> I <u>un module sans torsion. Considérons une suite exacte</u>

$$0 \to H \to P \to I \to 0$$

<u>où</u> P <u>est projectif. Soit</u> $T = \mathrm{Coker}(I^{*} \to P^{*})$. <u>Alors, on a un diagramme commutatif</u> :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H & \to & P & \to & I & \to & 0 \\ & & \wr\!\mid & & \wr\!\mid & & \downarrow & & \\ 0 & \to & T^{*} & \to & P^{**} & \to & I^{**} & \to & \mathrm{Ext}^{1}_{A}(T , A) & \to & 0 . \end{array}$$

<u>où les lignes sont exactes. De plus, les suites</u>

$$0 \to I \to I^{**} \to \mathrm{Ext}^{1}_{A}(T , A) \to 0$$

et

$$0 \to T \to T^{**} \to \mathrm{Ext}^{1}_{A}(I , A) \to 0 .$$

<u>sont exactes</u>.

La démonstration de l'existence et des propriétés du diagramme est laissée au soin du lecteur. On en déduit évidemment la première suite exacte. La deuxième se voit de la même façon en remarquant que T est sans torsion, car si la suite $L \to P \to I \to 0$, où L est un module libre, est exacte, alors T s'injecte dans L^{*} , et $I = \mathrm{Coker}(T^{*} \to P^{**})$.

Revenons au théorème. Pour $k = 1$, le 1° est toujours vrai. Démontrons l'implication pour $k = 2$. On a une suite exacte :

$$0 \to \Omega^2 \to L \to \Omega^1 \to 0 ,$$

où Ω^1 est sans torsion.

En appliquant le lemme précédent, et en posant $T = \operatorname{Coker}(\Omega^{1*} \to L^*)$, on obtient le diagramme suivant à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^2 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Omega^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
0 \arrow[r] & T^* \arrow[r] & L \arrow[r] & \Omega^{1**} \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_A(T , A) \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

et la suite exacte

$$0 \to T \xrightarrow{\sigma} T^{**} \to \operatorname{Ext}^1_A(\Omega^1 , A) \to 0 .$$

En dualisant cette dernière suite, on obtient une suite exacte

$$0 \to (\operatorname{Ext}^1_A(\Omega^1 , A))^* \to T^{***} \to T^*$$

Comme par décalage, on a

$$\operatorname{Ext}^2_A(M , A) \simeq \operatorname{Ext}^1_A(\Omega^1 , A) ,$$

l'hypothèse " $\operatorname{grade}(\operatorname{Ext}^2_A(M , A)) \geq 1$ " entraîne que $(\operatorname{Ext}^1_A(\Omega^1 , A))^* = 0$. Il reste:

$$0 \to T^{***} \xrightarrow{\sigma^*} T^* .$$

Si φ est l'injection canonique de T^* dans T^{***} , on a toujours $\sigma^* \circ \varphi = \mathrm{id}_{T^*}$. Par conséquent, Ω^2 qui est isomorphe à T^* est réflexif.

C. Q. F. D.

Montrons maintenant l'implication par récurrence. Considérons la suite exacte :

$$0 \to \Omega^k \to L \to \Omega^{k-1} \to 0 \qquad \text{pour} \quad k > 2 .$$

On suppose que Ω^{k-1} est sans $(k - 1)$-torsion, ce qui implique, par décalage,

$$\operatorname{Ext}^i_A((\Omega^{k-1})^* , A) = 0 \qquad \text{pour} \quad i = 1 , \dots , k - 3 .$$

On va de nouveau utiliser le lemme, c'est-à-dire qu'on a une suite exacte :

$$0 \to T \to T^{**} \to \operatorname{Ext}^1_A(\Omega^{k-1} , A) \to 0 .$$

Ce qui donne la suite exacte :

$$(\mathrm{I})\quad 0 \to (\mathrm{Ext}_A^1(\Omega^{k-1}, A))^* \to T^{***} \to T^* \to \mathrm{Ext}_A^i(\mathrm{Ext}_A^1(\Omega^{k-1}, A), A)$$

$$\to \mathrm{Ext}_A^1(T^{**}, A) \to \mathrm{Ext}_A^1(T, A) \to \dots$$

Mais par hypothèse, $\mathrm{grade}(\mathrm{Ext}_A^k(M, A)) \geq k-1$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Ext}_A^i(\mathrm{Ext}_A^1(\Omega^{k-1}, A), A) = 0 \qquad \text{pour} \quad i = 0, \dots, k-2 .$$

Mais, on a aussi

$$\mathrm{Ext}_A^i(T, A) = \mathrm{Ext}_A^{i-1}(\Omega^{k-1\,*}, A), \qquad \forall\, i \geq 2$$

c'est-à-dire $\mathrm{Ext}_A^i(T, A) = 0$ pour $i = 2, \dots, k-2$. De plus

$$\mathrm{Ext}_A^1(T, A) = \mathrm{Coker}(\Omega^{k-1} \to \Omega^{k-1\,**}) = 0$$

puisque Ω^{k-1} est réflexif $(k-1 \geq 2)$. D'après (I), ceci implique

$$\mathrm{Ext}_A^i(\Omega^{k*}, A) = \mathrm{Ext}_A^i(T^{**}, A) = 0 \qquad \text{pour} \quad i = 1, \dots, k-2 .$$

Ceci donne

$$\mathrm{Ext}_A^i(D(\Omega^k), A) = 0 \qquad \text{pour} \quad i = 3, \dots, k$$

et on a déjà

$$\mathrm{Ext}_A^i(D(\Omega^k), A) = 0 \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2$$

puisqu'on sait, d'après le cas $k = 2$, que Ω^k est au moins réflexif. Il reste finalement que Ω^k est sans k-torsion.

COROLLAIRE 1. - <u>Si $\Omega^k(M)$ est sans k-torsion, alors $\Omega^j(M)$ est sans j-torsion pour tout</u> $j \leq k$.

COROLLAIRE 2. - <u>Les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $\Omega^k(M)$ <u>est sans k-torsion</u> ;

(ii) $\Omega^k(M_{\mathfrak{p}})$ <u>est sans k-torsion pour tout $\mathfrak{p}$ tel que</u> $\mathrm{prof}(A_{\mathfrak{p}}) \leq k-2$;

(iii) $(\mathrm{Ext}_A^{i+1}(M, A))_{\mathfrak{p}} = 0$ <u>pour tout $\mathfrak{p}$ tel que</u> $\mathrm{prof}(A_{\mathfrak{p}}) < i$ <u>pour tout</u> $i = 1, \dots, k-1$.

Rappelons que pour tout module N ,

$$\mathrm{grade}(N) = \inf_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Supp} N} (\mathrm{prof}\ A_{\mathfrak{p}})) .$$

Les équivalences s'en déduisent immédiatement.

COROLLAIRE 2 bis. - Pour qu'un dual soit réflexif, il faut et il suffit qu'il le soit en profondeur 0 .

En effet, un dual est un deuxième module de syzigies.

COROLLAIRE 3. - Pour que $\Omega^k(M)$ soit sans k-torsion pour tout module de type fini M , il faut et il suffit que $A_{\mathfrak{p}}$ soit de Gorenstein pour tout $\mathfrak{p}$ tel que $\mathrm{prof}(A_{\mathfrak{p}}) \leq k-2$.

En effet, si $\Omega^k(M)$ est sans k-torsion, $\mathrm{Ext}^k_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}} , A_{\mathfrak{p}}) = 0$ pour tout M et pour tout $\mathfrak{p}$ tels que $\mathrm{prof}(A_{\mathfrak{p}}) \leq k-2$ (c'est-à-dire $\mathrm{Ext}^k_{A_{\mathfrak{p}}}(. , A_{\mathfrak{p}}) = 0$, si $\mathrm{prof}\ A_{\mathfrak{p}} \leq k-2$. Ceci implique que $A_{\mathfrak{p}}$ est de dimension injective finie sur lui-même, donc qu'il est de Gorenstein. La réciproque est une conséquence immédiate du corollaire 2, car si $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de Gorenstein, on a toujours

$$\mathrm{grade}(\mathrm{Ext}^{i+1}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}} , A_{\mathfrak{p}})) \geq i+1 > i .$$

COROLLAIRE 4. - Tout module M de dimension projective finie est tel que $\Omega^k(M)$ soit k-torsion, pour tout k .

En effet, $\mathrm{grade}(\mathrm{Ext}^i_A(M , A)) \geq i$ pour tout i .

PROPOSITION 2 bis. - Si $\mathrm{grade}(\mathrm{Ext}^{i+1}_A(D(M) , A)) \geq i$ pour $i = 1 , \dots , k-1$, alors il existe un module R sans k-torsion et un homomorphisme $M \to R$ tel que $R^* \to M^*$ donne un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^{k-1}_A(M^* , .) \to \mathrm{Ext}^{k-1}_A(R^* , .) .$$

D'après le 2° du théorème, il existe une suite exacte :

$$0 \to B \to N \to D(M) \to 0$$

où $\mathrm{dp}(B) \leq k-1$ et $\mathrm{Ext}^i_A(N , A) = 0$ pour $i = 1 , \dots , k$.

Une suite exacte $Q \to P \to N \to 0$, où P et Q sont projectifs, nous donne, en dualisant, une suite exacte :

$$0 \to N^* \to P^* \to Q^* \to D(N) \to 0$$

et, en dualisant à nouveau, la suite exacte :

$$0 \to D(N)^* \to Q \to P \to N \to 0 \ .$$

On peut alors construire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M^* & \to & F & \to & L & \to & D(M) & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & D(N)^* & \to & Q & \to & P & \to & N & \to & 0 \end{array}$$

qui donne, en dualisant,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & D(M)^* & \to & L^* & \to & F^* & \to & M & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & N^* & \to & P^* & \to & Q^* & \to & D(N) & \to & 0 \end{array}$$

Montrons que $D(N)$ est le module R cherché.

Comme $D(D(N)) = N$, $D(N)$ est évidemment sans k-torsion. Par décalage, on voit que

$$\mathrm{Ext}_A^{k-1}(M^* , .) \simeq \mathrm{Ext}_A^{k+1}(D(M) , .) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ext}_A^{k-1}(D(N)^* , .) \simeq \mathrm{Ext}_A^{k+1}(N , .) \ .$$

Tous ces isomorphismes étant canoniques, il suffit de montrer que l'application canonique

$$\mathrm{Ext}_A^{k+1}(D(M) , .) \to \mathrm{Ext}_A^{k+1}(N , .)$$

est un isomorphisme. Mais ceci est une conséquence immédiate de la suite exacte

$$0 \to B \to N \to D(M) \to 0 \qquad \text{où } \ dp(B) \leq k - 1 \ .$$

§ 3.2. G-dimension.

3.2.1. G-dimension des modules sur les anneaux de Gorenstein locaux.

DÉFINITION. - Soit M un module de type fini sur un anneau local de Gorenstein A . On appelera G-dimension de M , et on écrira G-dim M , le plus grand entier i tel que $\mathrm{Ext}^i(M , A) \neq i$.

Cette G-dimension est finie, car on a toujours $\mathrm{Ext}_A^r(M , A) = 0$ pour $r > \dim A$. Remarquons que si M est de dimension projective finie, on a

$$dp\ M = G\text{-dim}\ M \ .$$

On sait que dans ce cas, on a :

$$\mathrm{dp}_A\, M + \mathrm{prof}\, M = \mathrm{prof}\, A\ .$$

On va généraliser cette formule à la G-dimension.

PROPOSITION 3. - Sous les hypothèses de la définition, on a

$$\text{G-dim}\, M + \mathrm{prof}\, M = \mathrm{prof}\, A = \dim A\ .$$

Raisonnons par récurrence sur prof M. Si prof $M = 0$, il existe une suite exacte :

$$0 \to k \to M\ ,$$

où k est le corps résiduel de A. Si $n = \dim A$, on en déduit une suite exacte:

$$\mathrm{Ext}_A^n(M\ ,\ A) \to \mathrm{Ext}_A^n(k\ ,\ A) \to 0$$

Comme $\mathrm{Ext}_A^n(k\ ,\ A) \neq 0$, il en est de même pour $\mathrm{Ext}_A^n(M\ ,\ A)$.

C. Q. F. D.

Pour prof$(M) \geq 1$, il existe un élément x de A qui est M-régulier. La suite exacte

$$0 \to M \xrightarrow{x} M \to M/xM \to 0$$

donne une suite exacte ;

$$\mathrm{Ext}_A^{i-1}(M\ ,\ A) \to \mathrm{Ext}_A^i(M/xM\ ,\ A) \to \mathrm{Ext}_A^i(M\ ,\ A) \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}_A^i(M\ ,\ A)$$
$$\to \mathrm{Ext}_A^{i+1}(M/xM\ ,\ A)\ .$$

Si $i = \text{G-dim}(M/xM)$, cette suite montre que :

$$\mathrm{Ext}_A^j(M\ ,\ A) = 0 \qquad \text{pour} \quad j \geq i$$

en appliquant le lemme de Nakayama. D'autre part, $\mathrm{Ext}_A^{i-1}(M\ ,\ A) \neq 0$, car la suite

$$\mathrm{Ext}_A^{i-1}(M\ ,\ A) \to \mathrm{Ext}_A^i(M/xM\ ,\ A) \to 0$$

est exacte.

Donc $\text{G-dim}\, M = \text{G-dim}(M/xM) - 1$. Comme prof M = prof $M/xM + 1$ la proposition est démontrée en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Pour éviter des confusions, nous noterons parfois

$$D_A(M) = D(M) \qquad \text{et} \qquad M^{*A} = M^*$$

pour bien préciser de quelle structure de module de M il s'agit.

LEMME 2. - <u>Soient</u> A <u>un anneau local noethérien, et</u> M <u>un</u> A-<u>module tels que</u>

$$\mathrm{prof}(A) > 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{prof}(M) > 0 \ .$$

<u>Soit</u> f <u>un élément</u> A-<u>régulier et</u> M-<u>régulier. Si</u> $\mathrm{Ext}^1(M , A) = 0$, <u>on a des isomorphismes canoniques</u> :

$$M^{*A}/fM^{*A} \simeq (M/fM)^{*A/fA} \qquad \text{et} \qquad D_A(M)/fD_A(M) \simeq D_A/fA(M/fM) \ .$$

<u>De plus,</u> f <u>est</u> $D_A(M)$-<u>régulier</u>.

Comme $D_A(D_A(M)) = M$, $D_A(M)$ est sans torsion, donc f est $D_A(M)$-régulier. On a

$$\mathrm{Ext}^1_A(M/fM , A) \simeq \mathrm{Hom}_{A/fA}(M/fM , A/fA) = (M/fM)^{*A/fA} \ .$$

Comme f est M^{*A}-régulier, la suite exacte $0 \to M \xrightarrow{f} M \to M/fM \to 0$ donne la suite exacte :

$$0 \to M^{*A} \xrightarrow{f} M^{*A} \to \mathrm{Ext}^1_A(M/fM , A) \to 0 \ .$$

Ceci nous donne le premier isomorphisme.

Soit maintenant $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ une suite exacte de A-modules où les P_i sont projectifs. En appliquant le "diagramme du serpent", on voit que la suite $P_1/fP_1 \to P_0/fP_0 \to M \to 0$ est exacte, les P_i/fP_i étant des A/fA-modules projectifs. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & M^* & \to & P_0^* & \to & P_1^* & \to & D_A(M) & \to & 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f & & \\
0 & \to & M^* & \to & P_0^* & \to & P_1^* & \to & D_A(M) & \to & 0
\end{array}$$

où les flèches verticales représentent toutes la multiplication par f . Une double application du "daigramme du serpent" montre que la suite

$$0 \to M^*/fM^* \to P_0^*/fP_0^* \to P_1^*/fP_1^* \to D_A(M)/fD_A(M) \to 0$$

est exacte. Compte tenu du premier isomorphisme, on obtient alors le second.

Donnons maintenant une caractérisation des modules de G-dimension nulle.

PROPOSITION 4. - Soient A un anneau local de Gorenstein et M un A-module de type fini. Si $\text{G-dim } M = 0$, alors $\text{G-dim } M^* = 0$, et M est réflexif.

Remarque. - La réciproque se déduit de la proposition.

On sait que, pour $i \geq 1$,

$$\mathrm{Ext}^i(M^* , A) \simeq \mathrm{Ext}^{i+2}(D(M) , A) ,$$

donc, il suffira de démontrer que $\text{G-dim}(D(M)) = 0$.

Considérons une résolution libre de M , soit

$$L_{n+1} \to L_n \to \dots \to L_0 \to M \to 0 ,$$

où $n = \text{dimension } A$. En dualisant, on obtient une suite exacte :

$$0 \to M^* \to L_0^* \to \dots \to L_n^* \to L_{n+1}^* .$$

Si nous posons $N = \mathrm{Coker}(L_n^* \to L_{n+1}^*)$, on a une suite exacte :

$$0 \to D(M) \to L_2^* \to \dots \to L_{n+1}^* \to N \to 0 .$$

Comme $\text{G-dim}(N) \leq n$, on voit, par un décalage évident, que $\text{G-dim}(D(M)) = 0$.

3.2.2. G-dimension sur les anneaux noethériens.

DÉFINITION. - Soit A un anneau noethérien. On appellera $G(A)$ la classe des A-modules réflexifs tels que, pour tout $i \geq 1$, on ait

$$\mathrm{Ext}_A^i(M , A) = \mathrm{Ext}_A^i(M^* , A) = 0 .$$

LEMME 3. - Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. Alors

1° Si $M'' \in G(A)$, les suites

$$0 \to M''^* \to M^* \to M'^* \to 0$$

$$0 \to M'^{**} \to M^{**} \to M''^{**} \to 0$$

sont exactes ;

2° Si $M'' \in G(A)$, alors $M \in G(A)$ est équivalent à $M' \in G(A)$;

3° Si la suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est scindée, alors $M \in G(A)$ est équivalent à $M' \in G(A)$ et $M'' \in G(A)$.

De plus tous les modules projectifs sont dans $G(A)$.

1° La suite $0 \to M''^{*} \to M^{*} \to M'^{*} \to 0$ est exacte, car $\mathrm{Ext}^1_A(M'', A) = 0$.

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & M' & \to & M & \to & M'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \wr\!\!\mid & & \\
0 & \to & M'^{**} & \to & M^{**} & \to & M''^{**} & &
\end{array}$$

montre bien l'exactitude de la suite

$$0 \to M'^{**} \to M^{**} \to M''^{**} \to 0 .$$

La fin de la démonstration du lemme est laissée au soin du lecteur.

Ce lemme montre que, si F est le foncteur canonique qui à M fait correspondre (M^{*}, M^{**}), $G(A)$ est ce qu'on appelle une classe résolvante pour le foncteur F. On en déduit (CHEVALLEY [6]) la proposition qui va suivre. Nous en donnerons néanmoins une démonstration pour la commodité du lecteur.

PROPOSITION 5. - Soient deux suites exactes

$$0 \to \Omega_n \to X_n \to \dots \to X_0 \to M \to 0 ,$$

$$0 \to \Omega_n^1 \to Y_n \to \dots \to Y_0 \to M \to 0 ,$$

où, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a X_i, $Y_i \in G(A)$. Alors

$$\Omega_n \in G(A) \iff \Omega_n^1 \in G(A) .$$

Supposons d'abord qu'il existe des homomorphismes $X_i \xrightarrow{f_i} Y_i$ et $\Omega_n \xrightarrow{g_n} \Omega_n^1$ rendant commutatif le diagramme :

$$(D)\qquad \begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \to & \Omega_n & \to & X_n & \to & \dots & \to & X_i & \to & \dots & \to & X_0 & \to & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_i} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & & & \\
0 & \to & \Omega_n^1 & \to & Y_n & \to & \dots & \to & Y_i & \to & \dots & \to & Y_0 & \to & M & \to & 0
\end{array}$$

Si on pose

$$\Omega_i = \mathrm{Ker}(X_i \to X_{i-1}) = \mathrm{Im}(X_{i+1} \to X_i)$$

et

$$\Omega_i^1 = \mathrm{Ker}(Y_i \to Y_{i-1}) = \mathrm{Im}(Y_{i+1} \to Y_i)$$

on a des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega_n \arrow[r] \arrow[d] & X_n \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega'_n \arrow[r] & Y_n \arrow[r] & \Omega'_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega_i \arrow[r] \arrow[d, "g_i"'] & X_i \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega'_i \arrow[r] & Y_i \arrow[r] & \Omega'_{i-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega_0 \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega'_0 \arrow[r] & Y_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Montrons par récurrence que, pour tout i, il existe un module libre L_i et des applications surjectives $\varphi_i : \Omega_i \times L_i \to \Omega_i^1$ prolongeant g_i et telles que :

(a) $R_i = \mathrm{Ker}\ \varphi_i$ soit dans $G(A)$;

(b) Les applications dérivées $\mathrm{Ext}_A^1(\Omega'_i , A) \to \mathrm{Ext}_A^1(\Omega_i \times L_i , A)$ soient des isomorphismes. Supposons le résultat vrai pour $i - 1$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & R_{i-1} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Omega_i \times L_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & L_i \times L_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{i-1} \times L_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega'_i \arrow[r] & Y_i \arrow[r] & \Omega_{i-1}^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

où les lignes et la colonne sont exactes.

On peut alors choisir un module libre L_i de telle façon que le diagramme suivant soit commutatif, et ses lignes et ses colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & R_{i-1} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Omega_i \times L_i \arrow[r] \arrow[d] & X_i \times L_i \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{i-1} \times L_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega'_i \arrow[r] \arrow[d] & Y_i \arrow[r] \arrow[d] & \Omega'_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Posons $R_i = \mathrm{Ker}(X_i \times L_i \to Y_i)$. Comme L_i est libre, d'après le lemme préliminaire, $X_i \times L_i$ est dans $G(A)$. Alors, si dans le diagramme :

$$\text{(I)} \qquad \begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & R_i \arrow[r] \arrow[d] & K_i \arrow[r] \arrow[d] & R_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega_i \times L_i \arrow[r] \arrow[d] & X_i \times L_i \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{i-1} \times L_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega'_i \arrow[r] \arrow[d] & Y_i \arrow[r] \arrow[d] & \Omega'_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

on applique deux fois encore le lemme préliminaire, on voit que K_i , puis R_i , sont dans $G(A)$. Ce diagramme nous donne, par dualisation, le diagramme :

$$\text{(II)} \qquad \begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & & \\
0 \arrow[r] & R^*_{i-1} \arrow[r] \arrow[u] & K^*_i \arrow[r] \arrow[u] & R^*_i \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(R_{i-1}, A) = 0 & \\
0 \arrow[r] & (\Omega_{i-1} \times L_{i-1})^* \arrow[r] \arrow[u] & (X_i \times L_i)^* \arrow[r] \arrow[u] & (\Omega_i \times L_i)^* \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Ext}^1(\Omega_{i-1}, A) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega'^*_{i-1} \arrow[r] \arrow[u] & Y^*_i \arrow[r] \arrow[u] & \Omega'^*_i \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Ext}^1(\Omega'_{i-1}, A) \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\wr"] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

où les lignes et les colonnes sont exactes.

Le diagramme (II) montre que $(\Omega_i \times L_i)^* \to R_i^*$ est un épimorphisme, donc qu'on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ext}_A^1(\Omega_i^! , A) \to \mathrm{Ext}_A^1(\Omega_i \times L_i , A) \to \mathrm{Ext}_A^1(R_i , A) = 0$$

L'application dérivée $\mathrm{Ext}_A^1(\Omega_i^! , A) \to \mathrm{Ext}_A^1(\Omega_i \times L_i , A)$ est donc bien un iso morphisme. Ceci démontre les assertions intermédiaires (a) et (b).

Les suites exactes

$$0 \to \Omega_n^{1*} \to (\Omega_n \times L_n)^* \to R_n^* \to \mathrm{Ext}_A^1(\Omega_n' , A) \to \mathrm{Ext}_A^1(\Omega_n \times L_n , A) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Ext}_A^i(\Omega_n' , A) \to \mathrm{Ext}_A^i(\Omega_n \times L_n , A) \to 0 , \qquad i \geq 2$$

$$0 \to R_n \to (\Omega_n \times L_n)^{**} \to \Omega_n'^{**} \to 0 , \qquad \text{où } R_n = R_n^{**}$$

$$0 \to \mathrm{Ext}_A^i((\Omega_n \times L_n)^* , A) \to \mathrm{Ext}_A^i(\Omega_n'^* , A) \to 0 , \qquad i \geq 1$$

montrent que

$$\Omega_n' \in G(A) \iff \Omega_n \times L_n \in G(A) .$$

Soit, d'après le lemme préliminaire,

$$\Omega_n' \in G(A) \iff \Omega_n \in G(A) ,$$

d'où notre assertion, dans le cas où il existe un diagramme (D).

La proposition se déduit facilement de ce cas particulier. En effet, on peut prendre une résolution projective de longueur n de M :

$$0 \to k_n \to P_n \to \dots \to P_0 \to M \to 0 .$$

Comme on **sait** qu'on peut construire des homomorphismes

$$P_i \to X_i , \quad P_i \to Y_i , \quad k_n \to \Omega_n \quad \text{et} \quad k_n \to \Omega_n^1$$

rendant commutatifs les diagrammes :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & k_n & \to & P_n & \to & \dots & \to & P_0 & \to & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \wr\!\wr & & \\
0 & \to & \Omega_n & \to & X_n & \to & \dots & \to & X_0 & \to & M & \to & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & k_n & \to & P_n & \to & \cdots & \to & P_0 & \to & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \wr\wr & & \\
0 & \to & \Omega'_n & \to & Y_n & \to & \cdots & \to & Y_0 & \to & M & \to & 0
\end{array}$$

On en déduit

$$\Omega_n \in G(A) \iff k_n \in G(A) \iff \Omega'_n \in G(A) .$$

C. Q. F. D.

DÉFINITION. - <u>On dira qu'un module</u> M <u>sur</u> A <u>est de</u> G-<u>dimension</u> n <u>s'il existe une suite exacte</u> :

$$0 \to X_n \to \dots \to X_0 \to M \to 0$$

<u>où les</u> X_i <u>sont dans</u> $G(A)$ <u>et s'il n'en existe pas de plus courte</u>.

Dans le cas où A est un anneau de Gorenstein, on retrouve bien la G-dimension que nous avons définie précédemment. En effet, on voit, par décalage, que

$$\mathrm{Ext}^{n+i}(M , A) = 0 , \qquad \forall\ i \geq 1$$

et que

$$\mathrm{Ext}^n_A(M , A) \neq 0 .$$

La réciproque se voit de la même façon, car, d'après la proposition 4, lorsque A est de Gorenstein,

$$G(A) = \{M , \quad \mathrm{Ext}^i_A(M , A) = 0 , \quad \forall\ i \geq 1\} .$$

THÉORÈME 2. - <u>Si</u> M <u>est un module de type fini et de</u> G-<u>dimension finie sur un anneau local</u> A , <u>alors</u>

$$\text{G-dim } M + \mathrm{prof}(M) = \mathrm{prof}\ A .$$

Nous allons raisonner par récurrence, sur $\mathrm{prof}\ A$. Pour $\mathrm{prof}(A) = 0$, montrons que si $\text{G-dim } M \leq 1$, alors

$$\text{G-dim } M = 0 .$$

On a une suite exacte

$$0 \to X_1 \to X_0 \to M \to 0 , \qquad \text{où } X_0 , X_i \in G(A) .$$

Par dualisation, on obtient :

$$0 \to M^* \to X_0^* \to X_1^* \to \mathrm{Ext}_A^1(M, A) \to 0$$

et en dualisant à nouveau

$$0 \to (\mathrm{Ext}_A^1(M, A))^* \to X_1 \to X_0 \to M^{**} .$$

Cette suite exacte montre que $(\mathrm{Ext}_A^1(M, A))^* = 0$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Ass}\ A \cap \mathrm{Supp}\ \mathrm{Ext}_A^1(M, A) = \emptyset .$$

Comme l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A est dans $\mathrm{Ass}\ A$, ceci implique

$$\mathrm{Ext}_A^1(M, A) = 0 .$$

La suite exacte $0 \to M^* \to X_0^* \to X_1^* \to 0$ montre, d'après le lemme préliminaire que $M^* \in G(A)$. En la dualisant, on obtient une suite exacte :

$$0 \to X_1 \to X_0 \to M^{**} \to 0$$

qui montre que $M = M^{**}$. On a donc bien montré que $M \in G(A)$.

Supposons $\text{G-dim}\ M \leq n$ où $n > 1$. On a une suite exacte :

$$0 \to X_n \to X_{n-1} \to \dots \to X_0 \to M \to 0 , \qquad \text{où } X_i \in G(A) \quad \text{pour tout } i .$$

Posons

$$k_{n-1} = \mathrm{Ker}(X_{n-1} \to X_{n-3}) .$$

La suite exacte $0 \to X_n \to X_{n-1} \to k_{n-1} \to 0$ montre que $k_{n-1} \in G(A)$ et $\text{G-dim}\ M \leq n - 1$.

Donc, si $\text{G-dim}\ M < \infty$, $M \in G(A)$. Comme $M = M^{**}$,

$$\mathrm{Ass}\ M = \mathrm{Ass}(M^*)^* = \mathrm{Ass}\ A \cap \mathrm{Supp}\ M^* .$$

Ceci montre que $\mathrm{prof}\ M = 0$, et on a donc bien

$$\text{G-dim}\ M + \mathrm{prof}\ M = \mathrm{prof}\ A .$$

Supposons maintenant $\mathrm{prof}\ A > 0$ et $\mathrm{prof}\ M > 0$.

LEMME 4. - Soit M un module de type fini sur l'anneau local A . Supposons que l'élément f soit A-régulier et M-régulier. Alors, pour que M soit dans $G(A)$, il faut et il suffit que M/fM soit dans $G(A/fA)$.

On sait qu'on a :

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{Ext}^i_{A/fA}(M/fM\ ,\ A/fA) \simeq \operatorname{Ext}^{i+1}_A(M/fM\ ,\ A) \qquad \text{pour} \quad i \geq 0\ ,$$

on a aussi une suite exacte (II) :

$$\operatorname{Ext}^1_A(M\ ,\ A) \xrightarrow{f} \operatorname{Ext}^1_A(M\ ,\ A) \to \operatorname{Ext}^2_A(M/fM\ ,\ A) \to \dots$$

$$\to \operatorname{Ext}^i_A(M/fM\ ,\ A) \to \operatorname{Ext}^i_A(M\ ,\ A) \xrightarrow{f} \operatorname{Ext}^i_A(M\ ,\ A) \to \operatorname{Ext}^{i+1}_A(M/fM\ ,\ A) \to \dots$$

1° Supposons que $M/fM \in G(A/fA)$.

Ceci implique $\operatorname{Ext}^j_A(M/fM\ ,\ A) = 0$ pour $j \geq 2$, donc $\operatorname{Ext}^i_A(M\ ,\ A) = 0$ d'après le lemme de Nakayama. Comme f est M^*-régulier, on voit de la même façon que :

$$\operatorname{Ext}^i_A(M^*\ ,\ A) = 0 \qquad \text{pour} \quad i \geq 1\ .$$

D'après le lemme 1, on sait qu'on peut prendre $D_{A/fA}(M/fM)$ isomorphe à $D(M)/fD(M)$. On voit donc, toujours par la même méthode (car f est $D(M)$-régulier) que

$$\operatorname{Ext}^i_A(D(M)\ ,\ A) = 0 \qquad \text{pour} \quad i \geq 1\ .$$

En particulier, M est réflexif.

2° Réciproquement, supposons que $M \in G(A)$.

L'isomorphisme (I) et la suite (II) montrent que

$$\operatorname{Ext}^i_{A/fA}(M/fM\ ,\ A/fA) = 0 \qquad \text{pour} \quad i \geq 1\ .$$

Comme f est M^*-régulier, on voit de même que

$$\operatorname{Ext}^i_{A/fA}(M^*/fM^*\ ,\ A/fA) = 0 \qquad \text{pour} \quad i \geq 1\ .$$

D'après le lemme 1,

$$M^*/fM^* \simeq (M/fM)^{*A/fA}\ ,$$

il suffit donc de montrer que M/fM est réflexif. Mais

$$(M/fM)^{**A/fA} \simeq (M^*/fM^*)^{*A/fA} \simeq M^{**}/fM^{**} \simeq M/fM\ ,$$

car on peut appliquer successivement le lemme 1 à M et à M^* , puisque

$$\operatorname{Ext}^1_A(M\ ,\ A) = \operatorname{Ext}^1_A(M^*\ ,\ A) = 0\ .$$

Le lemme est démontré.

Supposons maintenant G-dim $M = n$, c'est-à-dire qu'on a une suite exacte :

$$0 \to X_n \to X_{n-1} \to \dots \to X_0 \to M \to 0 , \qquad \text{où } X_i \in G(A) .$$

On vérifie facilement que si f est A-régulier et M-régulier (donc X_i-régulier pour tout i), la suite :

$$0 \to X_n/fX_n \to \dots \to X_0/fX_0 \to M/fM \to 0$$

est exacte.

D'après le lemme précédent M/fM est de G-dim n sur A/fA .

D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$n + \operatorname{prof}_{A/fA}(M/fM) = \operatorname{prof}(A/fA)$$

ce qui implique évidemment

$$n + \operatorname{prof}_A(M) = \operatorname{prof}(A) .$$

Il reste le cas $\operatorname{prof}(M) = 0$, $\operatorname{prof} A > 0$ et G-dim $M < \infty$. Considérons une suite exacte :

$$0 \to k \to X \to M \to 0 , \qquad \text{où } X \in G(A) .$$

Comme $\operatorname{prof} X > 0$ et $\operatorname{prof} M = 0$, on sait que $\operatorname{prof} k = 1$. On a donc

$$\text{G-dim } k + \operatorname{prof} k = \operatorname{prof} A .$$

Mais, comme G-dim M = G-dim $k + 1$, on en déduit

$$\text{G-dim } M = \operatorname{prof} A .$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 6. - <u>Soit</u> M <u>un module de type fini sur l'anneau</u> A . <u>Si</u> M <u>est de G-dimension finie, alors</u> $\operatorname{grade}(\operatorname{Ext}^i_A(M , A)) \geq i$ <u>pour tout</u> i .

Il suffira évidemment de le montrer lorsque $\operatorname{Ext}^i(M , A) \neq 0$. On sait alors que

$$\operatorname{grade}(\operatorname{Ext}^i_A(M , A)) = \inf(\operatorname{prof} A_p)$$

pour P dans le support de $\operatorname{Ext}^i_A(M , A)$, c'est-à-dire pour P tel que

$$\operatorname{Ext}^i_{A_p}(M_p , A_p) \neq 0 .$$

Comme $G\text{-dim } M < \infty$,

$$G\text{-dim}_{A_p} M_p < \infty \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ext}^i_{A_p}(M_p , A_p) \neq 0$$

implique

$$G\text{-dim}_{A_p} M_p \geq i \ .$$

Donc $i \leq \text{prof } A_p$ et $i \leq \text{grade}(\mathrm{Ext}^i(M , A))$.

THÉORÈME 3. - <u>Une condition nécessaire et suffisante, pour que l'anneau local</u> A <u>soit un anneau de Gorenstein, est que tout module de type fini sur</u> A <u>soit de</u> <u>G-dimension finie</u>.

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante d'après la proposition précédente et le théorème fondamental sur les anneaux de Gorenstein locaux.

<u>Remarque</u>: - D'après la proposition 10 du chapitre 1, les conditions équivalentes du théorème sont aussi équivalentes à $G\text{-dim}(k) < \infty$ si k est le corps résiduel de A .

PROPOSITION 7. - <u>Soit</u> M <u>un module de</u> <u>G-dimension finie sur l'anneau</u> A . <u>Alors les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) M <u>est un</u> <u>k-ième module de syzygies</u> ;

(b) M <u>est sans</u> <u>k-torsion</u> ;

(c) $\text{grade}(\mathrm{Ext}^i_A(M , A)) \geq k + i$.

(a) $\Rightarrow$ (b) . Il existe une suite exacte :

$$0 \to M \to L_{k-1} \to L_{k-2} \to \dots \to L_0 \to N \to 0$$

Cette suite montre que $G\text{-dim } N < \infty$. Ce qui implique que

$$\text{grade}(\mathrm{Ext}^i(N , A)) \geq i > i - 1 \ .$$

On en déduit, d'après le théorème 1, que $M = \Omega^k(N)$ est sans k-torsion.

(b) $\Rightarrow$ (a) . Ceci découle de la proposition 2 du paragraphe précédent.

(a) $\Rightarrow$ (c) . Par décalage, il vient :

$$\mathrm{Ext}^i_A(M , A) = \mathrm{Ext}^{k+i}_A(N , A) ,$$

donc

$$\mathrm{grade}(\mathrm{Ext}_A^i(M , A)) = \mathrm{grade}(\mathrm{Ext}_A^{k+i}(N , A)) \geq k + i .$$

(c) $\Rightarrow$ (b) . Raisonnons par récurrence sur G-dim M , l'implication étant évidente si $M \in G(A)$, car alors M est sans k-torsion pour tout k, si G-dim $M > 0$, considérons la suite exacte :

$$0 \to N \to L_0 \to M \to 0$$

où L est libre. Alors

$$\text{G-dim}(N) = \text{G-dim}(M) - 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Ext}_A^i(N , A) = \mathrm{Ext}_A^{i+1}(M , A) \qquad \text{pour tout } i \geq 1 ,$$

donc

$$\mathrm{grade}\ \mathrm{Ext}_A^i(N , A) \geq k + 1 + i \qquad \text{pour tout } i \geq 1 .$$

L'hypothèse de récurrence entraîne que N est sans $(k + 1)$-torsion. Des suites exactes :

$$\begin{cases} L \to L_0 \to M \to 0 \\ 0 \to N \to L_0 \to M \to 0 \\ L_2 \to L_1 \to N \to 0 \end{cases}$$

on en déduit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M^* \arrow[r] & L_0^* \arrow[r] & L_1^* \arrow[r] & D(M) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M^* \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] & L_0^* \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] & N^* \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Ext}^1(M , A) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
& & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

où les deux lignes et la colonne sont exactes. Le "diagramme du serpent" nous donne alors une suite exacte :

$$\text{(I)} \qquad 0 \to \mathrm{Ext}^1(M , A) \to D(M) \to L_1^*/N^* \to 0$$

La suite exacte $0 \to N^* \to L_1^* \to L_1^*/N^* \to 0$ donne, en dualisant, des suites exactes :

$$L_1 \to N^{**} \to \mathrm{Ext}^1_A(L_1^*/N^* , A) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Ext}^i_A(N^* , A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^{i+1}_A(L_1^*/N^* , A) \to 0 \qquad \text{pour } i \geq 1 .$$

Le problème ne se pose que pour $k \geq 1$, donc comme N est sans $(k+1)$-torsion, $N = N^{**}$. On en déduit $\mathrm{Ext}^1_A(L^*/N^* , A) = 0$. Comme

$$\mathrm{Ext}^i_A(N^* , A) = \mathrm{Ext}^{i+2}_A(D(N) , A) = 0 \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq k-1 ,$$

on a finalement

$$\mathrm{Ext}^j_A(L_1^*/N^* , A) = 0 \qquad \text{pour } 1 \leq j \leq k .$$

On sait que $\mathrm{grade}(\mathrm{Ext}^1_A(M , A)) \geq k+1$ veut dire que :

$$\mathrm{Ext}^i_A(\mathrm{Ext}^1_A(M , A) , A) = 0 \qquad \text{pour } 0 \leq i \leq k .$$

D'après (I), on a

$$\mathrm{Ext}^i_A(D(M) , A) = 0 \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq k$$

c'est-à-dire que M est sans k-torsion.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> $G\text{-dim}\, M < \infty$, <u>alors</u> " $G\text{-dim}\, M \leq r$ " <u>est équivalent à</u>

" $\mathrm{Ext}^i_A(M , A) = 0$ <u>pour tout</u> $i > r$ " .

Montrons d'abord que c'est vrai pour $r = 0$. Alors, $\mathrm{Ext}^i(M , A) = 0$ pour $i \geq 1$. Inversement, d'après la proposition précédente, M est un k-ième module de syzygies pour tout k. Supposons d'abord A local. Soit $n = \mathrm{prof}\, A$. Il existe une suite exacte :

$$0 \to M \to L_{n-1} \to \dots \to L_0 \to N \to 0 .$$

Comme $G\text{-dim}\, M < \infty$, alors $G\text{-dim}\, N < \infty$ évidemment. Mais alors

$$G\text{-dim}\, N \leq n \text{ implique } M \in G(A) .$$

Revenons au cas global, on vient de voir que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $M_{\mathfrak{p}} \in G(A_{\mathfrak{p}})$. On en déduit évidemment que M est dans $G(A)$.

Supposons maintenant $r > 0$. Considérons une suite exacte :

$$0 \to k \to L_{r-1} \to \dots \to L_0 \to M \to 0$$

Alors k est évidemment de G-dimension finie. Par décalage, on voit que

$$\mathrm{Ext}^i_A(k , M) = 0 \qquad \text{pour } i \geq 1 .$$

Donc d'après ce qu'on vient de voir, $k \in G(A)$ et $G\text{-dim} \leq r$.

PROPOSITION 8. - Si M est un module de G-dimension finie sur l'anneau A , il existe un module N de dimension projective finie, un module libre L et une suite exacte :

$$0 \to K \to M + L \to N \to 0$$

tels que les applications dérivées

$$\mathrm{Ext}^i(N , A) \to \mathrm{Ext}^i(M , A)$$

soient des isomorphismes pour $1 \leq i \leq \mathrm{dp}\, N$. De plus, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $G\text{-dim}\, K = 0$;

(b) $\mathrm{Ext}^i(K , A) = 0$ pour $i \geq 1$;

(c) Il existe une suite exacte infinie de modules libres

$$\ldots \to L_i \to L_{i+1} \to \ldots \to L_1 \xrightarrow{f_1} L_0 \to L'_1 \to \ldots \to L'_j \to \ldots ,$$

$i , j \in \mathbb{Z}$, telle que $K = \mathrm{Im}(f_1)$ et telle que la suite reste exacte, par dualisation.

On sait que $G\text{-dim}\, M < \infty$, donc $\mathrm{grade}(\mathrm{Ext}^i(M , A)) \geq i$ pour $i \geq 1$.

D'après la proposition 8 du paragraphe 3 du chapitre 2, il existe, pour tout n , un module libre L tel que $M + L$ admette une filtration sphérique de longueur n :

$$M + L = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_n .$$

Posons $N = M/M_n$. On sait (loc. cit., prop. 9) que $\mathrm{dp}\, N < n$ et que les applications dérivées

$$\mathrm{Ext}^i(N , A) \to \mathrm{Ext}^i(M , A)$$

sont des isomorphismes pour $1 \leq i \leq \mathrm{dp}\, N = r$. Considérons maintenant la suite exacte :

$$0 \to K \to M + L \to N \to 0 .$$

Si (F_i) et (P_i) sont des résolutions libres de K et N, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F_{r+1} & \longrightarrow & F_{r+1} & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F_r & \longrightarrow & F_r \times P_r & \longrightarrow & P_r & \longrightarrow & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & F_0 \times P_0 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M + L & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où les lignes et les colonnes sont exactes. Il montre, en utilisant le lemme 3, que, puisque N et $M + L$ sont de G-dimension finie, K est de G-dimension finie.

(a) $\Rightarrow$ (b) est évident.

(b) $\Rightarrow$ (a), d'après le corollaire de la proposition 7, car K est de G-dimension finie.

(a) $\Rightarrow$ (c), car si

$$L'_i \to \dots \to L'_0 \to K^* \to 0$$

et

$$L_i \to \dots \to L_1 \to K \to 0$$

sont des résolutions libres de K^* et K, la suite

$$\to L_i \to \dots \to L_1 \to L'^*_0 \to L'^*_1 \to \dots \to L'^*_i \to \dots$$

est la suite cherchée.

(c) $\Rightarrow$ (b). La suite restant exacte par dualisation, on a

$$\mathrm{Ext}^i(K , A) = 0 \qquad \text{pour } i \geq 1 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUSLANDER (Maurice). - Remarks on a theorem of Bourbaki, Nagoya math. J., t. 27, 1966, p. 361-369.

[2] BASS (Hyman). - On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z., t. 82, 1963, p. 8-28.

[3] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre. Chap. 2 : Algèbre linéaire, 3e édition. - Paris, Hermann, 1962 (Act. scient. et ind., 1236 ; Bourbaki, 6).

[4] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative. Chap. 1 : Modules plats ; Chap. 2 : Localisation. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1236 ; Bourbaki, 27).

[5] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[6] CHEVALLEY (Claude). - Cours d'algèbre homologique, professé à la Faculté des Sciences de Paris, 1965/66 (à paraître).

[7] GABRIEL (Pierre). - Objets injectifs dans les catégories abéliennes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 12e année, 1958/59, n° 17, 32 p.

[8] SERRE (Jean-Pierre). - Algèbre locale, multiplicités. - Berlin, Springer-Verlag, 1965 (Lecture Notes in Mathematics, 11).