REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 114 (2005)

Les nilradicaux différentiels d'anneaux associés aux groupes triangulaires de Riemann-Schwarz.

FEDERICO PELLARIN (*)

ABSTRACT - In this article we study the differential nilradicals of differential rings associated to non-holomorphic quasi-modular forms for certain co-compact Riemann-Schwarz triangular subgroups of $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$. As a corollary of our investigations, we obtain an extension of a multiplicity estimate for differential rings connected with quasi-modular forms for $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$, due to Nesterenko.

1. Introduction.

Soient $E_2(z), E_4(z), E_6(z)$ les développements de Fourier complexes des séries d'Eisenstein classiques de poids $2, 4, 6$, convergents pour $|z| < 1$.

Nesterenko a demontré que pour tout nombre complexe v tel que $0 < |v| < 1$, le corps $\mathbb{Q}(v, E_2(v), E_4(v), E_6(v))$ a un degré de transcendance au moins 3 (voir [9], [10] et [11]). L'ingredient cléf de sa preuve est le «lemme de multiplicité» ci-dessous (cf. théorème 2.3 p. 33 de [10]).

THÉORÈM 1 (Nesterenko). *Il existe une constante $c_1 > 0$ avec la propriété suivante. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]$, de degré total au plus N. Alors, la fonction $F(z) = P(z, E_2(z), E_4(z), E_6(z))$ s'annule en $z = 0$ avec une multiplicité au plus $c_1 N^4$.*

Soit $\mathcal{A}$ un anneau muni d'une dérivation $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; nous dirons que le couple $(\mathcal{A}, \delta)$ est un *anneau différentiel*. La démonstration du théorème 1 utilise en profondeur le fait que l'anneau

$$\mathcal{Y}_1 = \mathbb{C}[z, E_2(z), E_4(z), E_6(z)],$$

(*) Indirizzo dell'A.: L.M.N.O. Université de Caen, Campus II - Boulevard Maréchal Juin, BP5186, F14032 Caen Cedex - France.

muni de la dérivation $z(d/dz)$, est un anneau différentiel (cf. théorème 5.3 de [8]).

Rappelons ici qu'un idéal $\mathcal{P}$ d'un anneau différentiel $(\mathcal{A},\delta)$ est dit *δ-stable* si pour tout $x \in \mathcal{P}$ on a $\delta x \in \mathcal{P}$. Nesterenko démontre le résultat qui suit (cf. proposition 5.1 p. 161 de [10]), indispensable dans la preuve du théorème 1.

PROPOSITION 1. *Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier non nul et $z(d/dz)$-stable de $\mathcal{Y}_1$, tel que pour tout $F \in \mathcal{P}$ on ait $F(0) = 0$. Alors $z\varDelta \in \mathcal{P}$, où $\varDelta = 1728^{-1}(E_4^3 - E_6^2)$.*

(la fonction $\varDelta(e^{2\pi \mathrm{i}t})$ est la forme modulaire de poids 12 dite de Jacobi; on vérifie que $z(d/dz)\varDelta = E_2\varDelta$: utiliser les formules du théorème 5.3 de [8]).

Ce résultat est au coeur de la démonstration du théorème 1 et constitue aussi la principale motivation de cet article. En effet, cette proposition est une première étude de la structure du «spectre différentiel» (ensemble des idéaux premiers $z(d/dz)$-stables) de $\mathcal{Y}_1$ qui semble avoir un interêt indépendant.

Nesterenko ne détermine pas complètement le spectre différentiel de $\mathcal{Y}_1$. D'une part, ceci n'est pas nécessaire en vue du théorème 1, d'autre part, les techniques de démonstration qu'il emploie ne le lui permettent pas (cf. discussion plus bas).

Dans [15] nous avons accompli cette tache. Nous y avons déterminé, entre autres, le spectre différentiel de $\mathcal{Y} = \mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$ (théorème 1.2 de loc. cit.); ceci permet de déterminer assez facilement aussi le spectre différentiel de $\mathcal{Y}_1$. Ces résultats s'appliquent pour démontrer des estimations de multiplicité plus générales que celle du théorème 1.

Dans ce but, on utilise seulement la propriété suivante, qui découle directement des resultats de [15]: le *nilradical différentiel* de $\mathcal{Y}_1$ (intersection de tous les idéaux premiers non nuls et $z(d/dz)$-stables) est non nul (car il contient $z\varDelta$).

Dans cet article, nous voulons étendre cette étude à des autres anneaux différentiels, cette fois-ci associés à des formes quasi-modulaires pour des groupes triangulaires de Riemann-Schwarz co-compacts.

Nous sommes persuadés qu'il s'agit d'un premier pas nécessaire vers l'étude des propriétés diophantiennes de ces formes, qui ont des propriétés analytiques et algébriques sensiblement différentes des formes quasi-modulaires classiques pour $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Voici le contexte auquel nous nous interessons.

1.1. – *Le contexte.*

Soient α, β, γ des nombres rationnels tels que

$$\gamma > \alpha + \beta, \quad 1 > \gamma > \beta > \alpha > 0, \tag{1}$$

et tels que:

$$w = 1 - \gamma, \quad \mu = \gamma - \alpha - \beta, \quad \upsilon = \beta - \alpha$$

soient des inverses d'entiers naturels non nuls.

On considère l'équation différentielle hypergéométrique complexe:

$$z(1-z)\frac{d^2V}{dz^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)\frac{dV}{dz} - \alpha\beta V = 0. \tag{2}$$

Le groupe de monodromie projective de l'équation (2) s'identifie à un sous-groupe Ω infini de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ (un sous-groupe Fuchsien de première espèce, cf. [4], chapitre 3 et chapitre 11), qui agit discontinuement sur le disque

$$B = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1\}$$

par transformations homographiques:

$$\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Omega, \quad \phi(\xi) := \frac{a\xi + b}{c\xi + d}.$$

Il existe un domaine fondamental $\mathcal{T}$ pour l'action de Ω sur B, dont l'adhérence topologique est un triangle hyperbolique compact, de sommets s_0, s_1, s_∞, et dont les angles aux sommets sont égaux à $\pi w, \pi\mu, \pi\upsilon$ (cf. [17] chapitre 3 ou [16] chapitre 5).

Un calcul direct permet de vérifier que les fonctions

$$u_0(z) = z^{\gamma/2}(1-z)^{(\alpha+\beta-\gamma+1)/2}{}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z),$$

$$u_1(z) = z^{1-\gamma/2}(1-z)^{(\alpha+\beta-\gamma+1)/2}{}_2F_1(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; z),$$

analytiques dans $\mathbb{C} - (\mathbb{R}_{\leq 0} \cup \mathbb{R}_{\geq 1})$, sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes et satisfont à l'équation différentielle (cf. [4], équation (21) p. 290)

$$\frac{d^2U}{dz^2} + p(z)U = 0, \tag{3}$$

où

$$\begin{aligned} p(z) =& \frac{1}{4}\left(\frac{1-w^2}{z^2}+\frac{1-\mu^2}{(1-z)^2}+\frac{1+\upsilon^2-w^2-\mu^2}{z(1-z)}\right) \\ =& \frac{1}{4}\left(\frac{a+c}{z^2}+\frac{b+c}{(z-1)^2}+\frac{c}{2z(1-z)}\right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \gamma(1-\alpha-\beta)+2\alpha\beta \\ b &= (\alpha+\beta)(\gamma-\alpha-\beta)+2\alpha\beta-\gamma+1 \\ c &= \gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)-2\alpha\beta. \end{aligned} \tag{4}$$

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\leq 0} \cup \mathbb{R}_{\geq 1})$, posons:

$$\tau(z) = \frac{u_1(z)}{u_0(z)}.$$

La fonction $\tau(z)$ est localement inversible sur son domaine d'holomorphie, car le wronskien $W(u_0, u_1) := \det\begin{pmatrix} u_0 & u_1 \\ u_0' & u_1' \end{pmatrix}$ de u_0, u_1 y est constant, égal à w, donc non nul.

Soit $\mathcal{H}$ le demi-plan supérieur complexe. On peut montrer que la fonction τ définit un isomorphisme analytique

$$\tau : \mathcal{H} \to \mathcal{T}^\circ,$$

où $\mathcal{T}^\circ$ désigne le triangle $\mathcal{T}$ privé de son bord topologique; on vérifie aussi $\tau(i) = s_i$ avec $i = 0, 1, \infty$.

Posons

$$B^* = \bigcup_{\phi \in \Omega} \phi(\mathcal{T} \setminus \{s_0, s_1, s_\infty\}).$$

Ainsi, B^* est le disque B privé de l'ensemble E dont les éléments sont tous les points ξ tels qu'il existe $\gamma \in \Omega$ avec

$$\gamma(\xi) \in \{s_0, s_1, s_\infty\}.$$

Soit $\zeta : \mathcal{T}^\circ \to \mathcal{H}$ la fonction analytique réciproque de τ: elle admet un prolongement analytique à B^* et définit sur B une fonction modulaire Fuchsienne associée à Ω, c'est-à-dire une fonction $f : B \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ satisfaisant:

$$f(\phi(t)) = f(t), \qquad \text{pour tout } \phi \in \Omega$$

(cf. [4], chapitre 10). Posons

$$
\begin{aligned}
y_0 &= u_0 u_0', \\
y_1 &= u_0 u_0' - \frac{u_0^2}{z}, \qquad (5)\\
y_2 &= u_0 u_0' - \frac{u_0^2}{z-1}
\end{aligned}
$$

et

$$Y_i(t) = y_i(\zeta(t)), \quad i = 0, 1, 2. \tag{6}$$

Les trois fonctions $Y_0(t)$, $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ sont holomorphes dans B^*, méromorphes dans B (cf. proposition 2 p. 439 de [18]), et satisfont à des relations d'automorphie de poids 2 par rapport à l'action de Ω sur B (cf. [18], proposition 3 p. 439): si $\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Omega$, alors on a:

$$Y_i(\phi(t)) = (ct+d)^2 Y_i(t) + \frac{1}{\pi \mathrm{i}} c(ct+d), \quad i = 0, 1, 2. \tag{7}$$

Les cinq fonctions $e^t, t, Y_0(t), Y_1(t), Y_2(t)$ sont algébriquement indépendantes (cf. lemme 1).

Toute fonction F qui est un polynôme en t, e^t et les fonctions $Y_i(t)$ $(i = 0, 1, 2)$ à coefficients complexes admet un développement en série de Laurent au voisinage de tout élément $\xi \in \mathcal{T}$:

$$F(t) = \sum_{k=s}^{\infty} v_k (t - \xi)^k,$$

avec $s \in \mathbb{Z}$ et $v_s \neq 0$. On définit alors la multiplicité de F en ξ par:

$$\mathrm{ord}_\xi(F) = s.$$

Si $\xi \neq s_0, s_1, s_\infty$, alors $\mathrm{ord}_\xi(F) \in \mathbb{N}$, autrement, $\mathrm{ord}_\xi(F) \in \mathbb{Z}$ peut être négatif. L'anneau

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}[t, e^t, Y_0(t), Y_1(t), Y_2(t)],$$

muni de la dérivation d/dt, possède une structure d'anneau différentiel (cf. lemme 2). Dans ce texte nous démontrons:

THÉORÈM 2. *Le nilradical différentiel de* $(\mathcal{A}, d/dt)$ *est non nul, et contient l'élément:*

$$\kappa := e^t (Y_0 - Y_1)(Y_0 - Y_2)(Y_1 - Y_2).$$

Nous n'avons pas déterminé complètement le spectre différentiel de $(\mathcal{A}, d/dt)$ [1], mais ce théorème suffit pour démontrer le résultat suivant.

THÉORÈM 3. *Il existe une constante $c_2 > 0$, dépendant seulement de a, β, γ, avec les propriétés suivantes. Soit $\xi \in B$, soit P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]$, posons:*

$$M_1 = \min\{\deg_{X_1}(P), \deg_{X_2}(P)\} + 1$$

$$M_2 = \max\{\deg_{X_1}(P), \deg_{X_2}(P)\} + \max\{\deg_{X_3}(P), \deg_{X_4}(P), \deg_{X_5}(P)\}.$$

Alors la fonction $F(z) = P(t, e^t, Y_0(t), Y_1(t), Y_2(t))$ satisfait

$$\mathrm{ord}_{\xi}(F) \leq c_2 M_1 M_2^4. \tag{8}$$

En particulier, si P est de degré total au plus N, alors la fonction $F(z)$ satisfait

$$\mathrm{ord}_{\xi}(F) \leq c_2 (2N)^5. \tag{9}$$

Si de plus P ne dépend pas de la variable X_1 (ou si P ne dépend pas de la variable X_2), alors

$$\mathrm{ord}_{\xi}(F) \leq c_2 (2N)^4. \tag{10}$$

Ce théorème généralise le théorème 1 de Nesterenko [2].

Nous espérons que le théorème 3 aura des applications diophantiennes; remarquons qu'il s'agit toutefois déjà d'un résultat non trivial de «bonne approximation» sur un corps de fonctions rationnelles.

Faisons maintenant un commentaire sur la nature des preuves. La partie difficile de la démonstration de la proposition 1 donnée par Nesterenko consiste à déterminer les idéaux $\mathcal{P}$ premiers $z(d/dz)$-stables de $\mathcal{Y} = \mathbb{C}[E_2(z), E_4(z), E_6(z)]$ qui sont de codimension 2 et qui sont tels que pour tout $F \in \mathcal{P}$ on ait $F(0) = 0$; soit Π l'ensemble de ces idéaux.

Il faut établir d'abord une corréspondence bijective entre l'ensemble Π et l'ensemble des solutions algébriques (f, g) du système différentiel:

$$\begin{aligned} f' &= 4\frac{xf - g}{x^2 - f}, \\ g' &= 6\frac{xg - f^2}{x^2 - f} \end{aligned} \tag{11}$$

telles que $f(1) = 1, g(1) = 1$.

(1) Voir la remarque à la fin du paragraphe 1.2.
(2) Il contient aussi un lemme de multiplicité de Bertrand: lemme 3 p. 348 de [1].

Nesterenko démontre ensuite que $(f, g) = (x^2, x^3)$ est la seule solution algébrique de (11), d'où l'on déduit que l'idéal premier de $\mathcal{Y}$ corréspondant est l'idéal premier de codimension 2 engendré par les deux fonctions $E_2^2 - E_4$ et $E_2^3 - E_6$. Pour obtenir cette propriété il généralise une idée qu'il attribue à Siegel dans une étude des solutions algébriques des équations de Riccati ([3]).

1.2. – *Nature des preuves et plan de l'article.*

Pour démontrer le théorème 2 (paragraphe 2) nous suivons de près nombreuses techniques déjà utilisées par Nesterenko dans [10], [11].

Cependant, nous ne sommes pas arrivés à modifier ou généraliser l'idée de Siegel mentionnée ci-dessus de manière compatible à ce nouveau contexte ([4]).

Pour résoudre ce problème (situé au niveau des idéaux non principaux) dans la preuve du théorème 2, nous avons introduit une technique complètement algébrique inspirée par la formule ([5]):

$$(2\pi \mathrm{i})1728\Delta = 3zE_6\frac{dE_4}{dz} - 2zE_4\frac{dE_6}{dz} \tag{12}$$

qui dit que Δ, générateur du nilradical différentiel de $\mathcal{Y}$, est aussi une sorte de Wronskien des générateurs de l'anneau des formes modulaires (c'est plus précisement un *crochet de Rankin*). La formule (12) possède des analogues pour les anneaux différentiels $(\mathcal{A}, d/dt)$ (cf. paragraphe 2.2). C'est sur la base de ces formules que nous avons résolu le problème ci-dessus, et ceci sans passer par la méthode de Nesterenko-Siegel.

([3]) Voir le lemme 5.2 p. 161 de [11] et le comparer avec, par exemple, [19] p. 209. Noter que des arguments similaires apparaissent dans les travaux sur l'irréductibilité de certaines équations différentielles non linéaires, comme les équations de Painlevé ; voir par exemple [20] p. 161.

([4]) Une raison héuristique nous semble être la suivante. Le point $z = 0$ joue un rôle particulier dans la preuve de Nesterenko: c'est un point privilégié car il corréspond à l'unique classe d'équivalence de points d'adhérence paraboliques («pointe») pour l'action de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan supérieur complexe.

Or, sous nos hypothèses (1), le quotient $\Omega\backslash B$ n'a pas de pointes, et nous ne savions pas comment choisir un analogue raisonnable du point $z = 0$ pour pouvoir faire fonctionner la méthode de démonstration de Nesterenko.

([5]) Cette technique nous permet aussi de raffiner et généraliser les résultats du paragraphe 5 pp. 162-165 de [11], en supprimant l'hypothèse $F(0) = 0$ dans la proposition 1.

Dans le paragraphe 3 nous donnons des éléments de démonstration du théorème 3 à partir du théorème 2. Nous faisons quelques rappels de théorie de l'élimination, bien que cette partie soit standard. Nous y supposerons que $(\mathcal{A}, \delta)$ soit plus généralement un anneau différentiel de fonctions F méromorphes dans un certain domaine de $\mathbb{C}$. Cet anneau différentiel $(\mathcal{A}, \delta)$ satisfait aussi à une «propriété D» (cette propriété est très proche d'une propriété homonyme dans [11]: définition 1.2 p. 150). Sous toutes ces hypothèses, on a un lemme de multiplicité: la proposition 5.

Si la propriété D est vérifiée pour l'anneau différentiel $(\mathcal{A}, \delta)$ du théorème 2, alors on obtient le théorème 3 comme corollaire de la proposition 5. Or, nous vérifierons que la propriété décrite par le théorème 2 (la non nullité du nilradical différentiel) implique la propriété D pour $(\mathcal{A}, \delta)$.

Les techniques de démonstration de la proposition 5 sont essentiellement les mêmes que celles du théorème 1.1 p. 149 de [11] (voir aussi [3]). On la démontre comme corollaire d'un résultat plus général, la proposition 6 (analogue du théorème 2.2 p. 154 de [11]). Il y a seulement deux différences mineures.

Premièrement, les fonctions Y_0, Y_1, Y_2 ne sont pas holomorphes dans $\mathcal{T}$, à cause des singularités en s_0, s_1, s_∞, mais on voit que les démonstrations des théorèmes 1.1, 2.2 de loc. cit. s'étendent facilement à notre cas.

Deuxièmement, la constante c_3 de la proposition 5 dépend uniquement d'un invariant local, l'exposant $\rho(\xi)$, qui est uniformément borné en fonction du point ξ du domaine de définition, lorsque la propriété D *uniforme* (cf. définition du paragraphe 3) est vérifiée. On peut cependant remarquer que cette information sur la dépendance en $\rho(\xi)$ est déjà contenue implicitement dans le théorème 1.1 de [11].

C'est pour cette raison que nous ne donnerons pas de démonstration de la proposition 6, mais seulement une esquisse de démonstration de la proposition 5 comme une conséquence de la proposition 6.

Remarque. Dans [15], nous avons complétement déterminé tous les idéaux premiers $z(d/dz)$-stables de l'anneau différentiel $(\mathcal{Y}, z(d/dz))$ (la «structure différentielle»). Ceci est possible aussi pour l'anneau différentiel $(\mathcal{R}, d/dt)$ quand α, β, γ sont des nombres rationnels, mais cette structure est en général plus compliquée (elle sera décrite dans un autre travail).

En revanche, nous ne savons pas calculer la structure différentielle de $(\mathcal{R}, d/dt)$ quand α, β, γ ne sont pas tous rationnels. Ce serait intéressant de le faire, mais les techniques introduites ici et dans [15] ne semblent pas suffir.

2. Propriétés différentielles et algébriques de l'anneau $\mathcal{A}$.

LEMME 1. *Les cinq fonctions $e^t, t, Y_0(t), Y_1(t), Y_2(t)$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$.*

DÉMONSTRATION. D'après [18], corollaire 2 p. 442, les quatre fonctions t, $Y_0(t)$, $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ sont algébriquement indépendantes; on suit maintenant une idée de [2].

Comme Ω est Fuchsien de première espèce, l'ensemble $\mathcal{E}$ des points limites est égal au bord de B (voir le théorème 14 p. 73 de [4]). En particulier, $\mathcal{E}$ contient au moins trois points et Ω est dense au sens de Zariski dans $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ (proposition 1 p. 47 de [12]). Ainsi, l'image de l'application

$$\begin{array}{ccccc} \sigma & : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \\ & & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \dfrac{c}{d} \end{array}$$

est de cardinalité infinie.

Posons $J = \mathbb{C}(t, Y_0, Y_1, Y_2)$, soit $\phi \in \Omega$; on a

$$J = \mathbb{C}(\phi(t), Y_0 \circ \phi, Y_1 \circ \phi, Y_2 \circ \phi), \tag{13}$$

où $Y_i \circ \phi = Y_i(\phi(t))$ $(i = 0, 1, 2)$, d'après l'égalité $\mathbb{C}(\phi(t)) = \mathbb{C}(t)$ et les relations (7).

Supposons par l'absurde que $e^t, t, Y_0(t), Y_1(t), Y_2(t)$ soient algébriquement dépendantes: e^t est alors algébrique sur J. Soit $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de Ω. D'après (13), pour tout i, $e^{\phi_i(t)}$ est aussi algébrique sur J, donc le corps

$$\mathbb{C}(e^{\phi_0(t)}, e^{\phi_1(t)}, \dots, t, Y_0(t), Y_1(t), Y_2(t))$$

a un degré de transcendance fini sur $\mathbb{C}$, ce qui implique en particulier que le corps $K := \mathbb{C}(e^{\phi_0(t)}, e^{\phi_1(t)}, \dots)$ a un degré de transcendance fini.

Or, d'après la propriété de la fonction σ citée plus haut, il existe une famille infinie $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω avec pôles dans $\mathbb{C}$ et avec la propriété que si $i \neq j$ alors le pôle p_i de ϕ_i n'est pas égal au pôle p_j de ϕ_j.

Donc pour tout i la fonction $e^{\phi_i(t)}$ a une singularité essentielle en p_i, et les fonctions $e^{\phi_j(t)}$ $(j = 0, 2, ..., i-1)$ sont regulières en p_i. De ce fait, pour tout i, la fonction $e^{\phi_i(t)}$ est transcendante sur le corps $\mathbb{C}(e^{\phi_0(t)}, e^{\phi_1(t)}, \dots, e^{\phi_{i-1}(t)})$ et le corps K a un degré de transcendance infini, d'où une contradiction.

Noter que pour démontrer ce lemme, on peut aussi appliquer les idées de [12]. $\square$

On en déduit l'indépendance algébrique sur $\mathbb{C}$ des fonctions τ, ϱ, y_0, y_1, y_2 (utiliser l'isomorphisme analytique ζ).

Le lemme suivant est essentiellement dû à Halphén et Jacobi: [5], [6].

LEMME 2. *Posons* $L = (1/4)(a(Y_0 - Y_1)^2 + b(Y_0 - Y_2)^2 + c(Y_1 - Y_2)^2)$ *et* $\delta = w(d/dt)$. *Les relations suivantes sont satisfaites:*

$$\delta Y_i = Y_i^2 - L, \qquad \text{pour } i = 0, 1, 2.$$

Ainsi l'anneau $\mathcal{A} = \mathbb{C}[t, e^t, Y_0, Y_1, Y_2]$, muni de la dérivation δ, est un anneau différentiel.

DÉMONSTRATION. Soit D la dérivation définie sur l'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\leq 0} \cup \mathbb{R}_{\geq 1})$ par

$$DX = u_0^2 \frac{dX}{dz}.$$

Comme

$$D\tau = u_0^2 \tau' = u_0^2 \left(\frac{u_1' u_0 - u_1 u_0'}{u_0^2} \right) = W(u_0, u_1) = w,$$

on a, pour toute fonction X suffisamment différentiable:

$$\delta(X(\zeta(t))) = (D(X(z)))|_{z=\zeta(t)}. \tag{14}$$

Calculons Dy_0, Dy_1, Dy_2. On a, en utilisant (3):

$$\begin{aligned} Dy_0 &= u_0^2 y_0' \\ &= u_0^2 (u_0 u_0')' \\ &= u_0^2 (u_0'^{\,2} + u_0 u_0'') \\ &= (u_0 u_0')^2 + u_0^3 u_0'' \\ &= y_0^2 - u_0^4 p(z). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} Dy_1 &= u_0^2 y_1' \\ &= u_0^2 (u_0 u_0' - u_0^2 z^{-1})' \\ &= u_0^2 (u_0'^{\,2} + u_0 u_0'' - 2u_0 u_0' z^{-1} + u_0^2 z^{-2}) \\ &= (u_0 u_0')^2 - 2u_0^3 u_0' z^{-1} + u_0^4 z^{-2} + u_0^3 u_0'' \\ &= (u_0 u_0' - u_0^2 z^{-1})^2 + u_0^3 u_0'' \\ &= y_1^2 - u_0^4 p(z), \end{aligned}$$

et pour terminer,

$$\begin{aligned} Dy_2 &= u_0^2 y_2' \\ &= u_0^2 (u_0 u_0' - u_0^2 (z-1)^{-1})' \\ &= u_0^2 (u_0'^2 + u_0 u_0'' - 2u_0 u_0' (z-1)^{-1} + u_0^2 (z-1)^{-2}) \\ &= (u_0 u_0')^2 - 2u_0^3 u_0' (z-1)^{-1} + u_0^4 (z-1)^{-2} + u_0^3 u_0'' \\ &= (u_0 u_0' - u_0^2 (z-1)^{-1})^2 + u_0^3 u_0'' \\ &= y_2^2 - u_0^4 p(z). \end{aligned}$$

D'autre part, on a les relations (6), et on vérifie que $u_0^4(\zeta(t))p(\zeta(t)) = L(t)$. En utilisant (14), on trouve les relations différentielles cherchées; on en déduit que $(\mathcal{A}, \delta)$ est un anneau différentiel. $\square$

Posons $\varrho = e^t$. On associe à Y_i le poids $p(Y_i) = 1$, $i = 0, 1, 2$ et à t, ϱ le poids 0. Un élément de $\mathcal{A}$ est dit *isobare de poids s* s'il est somme de monômes

$$rt^a \varrho^b Y_0^{t_0} Y_1^{t_1} Y_2^{t_2},$$

avec $t_0 + t_1 + t_2 = s$ et $r \in \mathbb{C}^\times$. Soit $X \in \mathcal{A}$ et notons $p(X)$ le plus grand poids d'un monôme de X. Posons aussi

$$\mathcal{R} = \mathbb{C}[Y_0, Y_1, Y_2], \quad \mathcal{L} = \mathbb{C}[t, \varrho].$$

On remarque que si $X \in \mathcal{R}$ est non constant et isobare de poids s, alors DX est non nul et isobare, et $p(DX) = p(X) + 1$. Si $X \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{R}$, on a seulement $p(DX) \leq p(X) + 1$ (car les éléments de poids 0 de $\mathcal{A}$ ne sont pas forçement tous annulés par δ).

Nous pouvons commencer la démonstration du théorème 2; pour ce faire, il suffit de démontrer que tout idéal premier non nul et δ-stable de $\mathcal{A}$ contient l'un des éléments $e^t, Y_0 - Y_1, Y_0 - Y_2, Y_1 - Y_2$; nous devons procéder en plusieurs étapes. Commençons par étudier les idéaux principaux δ-stables.

2.1. – *Idéaux principaux stables.*

PROPOSITION 2. *Soit $\mathcal{I}$ un idéal premier principal non nul, δ-stable de $\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{I}$ est égal à l'un des idéaux principaux (ϱ), $(Y_0 - Y_1)$, $(Y_0 - Y_2)$, $(Y_1 - Y_2)$.*

Cette proposition est l'analogue du lemme 5.2 p. 161 de [11].

En utilisant les formules explicites du lemme 2, on voit que

$$\delta(Y_0 - Y_1) = (Y_0 - Y_1)(Y_0 + Y_1), \tag{15}$$

$$\delta(Y_0 - Y_2) = (Y_0 - Y_2)(Y_0 + Y_2), \tag{16}$$

$$\delta(Y_1 - Y_2) = (Y_1 - Y_2)(Y_1 + Y_2). \tag{17}$$

Comme d'autre part $\delta\varrho = w\varrho$, les idéaux principaux $(\varrho), (Y_0 - Y_1)$, $(Y_0 - Y_2), (Y_1 - Y_2)$ de $\mathcal{A}$, qui sont premiers, sont aussi δ-stables.

Soit $P \in \mathcal{A}$ un polynôme non nul et irréductible tel que

$$DP = FP \tag{18}$$

avec $F \in \mathcal{A}$. Nous devons démontrer que P est proportionnel à l'un des polynômes $\varrho, Y_0 - Y_1, Y_0 - Y_2, Y_1 - Y_2$, avec une constante de proportionnalité dans $\mathbb{C}^\times$.

Nous déterminons une expression plus précise de F. Comme $p(DP) = = p(F) + p(P)$, on a que $p(F) \leq 1$. Comme de plus $\deg_\varrho(DP) = \deg_\varrho(F) + + \deg_\varrho(P)$ et $\deg_t(DP) = \deg_t(F) + \deg_t(P)$, on a que $\deg_\varrho(F) = = \deg_t(F) = 0$ et donc

$$F = \lambda_0 Y_0 + \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3, \tag{19}$$

avec $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$. On a aussi $F \neq 0$ car P étant irréductible, il est non constant.

Notre premier objectif est de montrer que dans (19) on a $\lambda_i \in \mathbb{Q}$, $i = 0, \ldots, 3$. On utilise les formules suivantes:

$$a + b = (1 + \alpha - \beta)(1 + \beta - \alpha), \tag{20}$$

$$b + c = (1 - \alpha - \beta + \gamma)(1 + \alpha + \beta - \gamma), \tag{21}$$

$$a + c = \gamma(2 - \gamma), \tag{22}$$

qui se déduisent des écritures (4) de a, b, c en fonction de α, β, γ.

LEMME 3. *Sous l'hypothèse* (18), *on a* $\lambda_0 \in \mathbb{Q}$ *dans* (19).

DÉMONSTRATION. Ecrivons:

$$P = P_h + P_{h+1} + \cdots + P_k, \tag{23}$$

avec P_i isobare de poids i ($i = h, \ldots, k$) et P_h, P_k non nuls. En substituant (23) et (19) dans (18) et en comparant les termes isobares de poids $k + 1$, on voit que:

$$\frac{\partial P_k}{\partial Y_0}DY_0 + \frac{\partial P_k}{\partial Y_1}DY_1 + \frac{\partial P_k}{\partial Y_2}DY_2 = P_k \sum_{i=0}^{2} \lambda_i Y_i.$$

Soit δ' la dérivation de $\mathcal{A}$ définie par $\delta'(Y_i) = \delta(Y_i)$ pour $i = 0, 1, 2$ et $\delta' t = \delta' \varrho = 0$. On a démontré que:

$$\delta' P_k = P_k \sum_{i=0}^{2} \lambda_i Y_i. \tag{24}$$

L'anneau

$$\mathcal{L}[Y_0, Y_2] \cong \mathcal{A}/(Y_1 - Y_2)$$

est muni de la dérivation d définie par:

$$d(Y_0) = Y_0^2 - \tilde{L}, \quad d(Y_2) = Y_2^2 - \tilde{L}, \quad d(\varrho) = d(t) = 0, \tag{25}$$

où

$$\tilde{L} = \frac{1}{4}(a+b)(Y_0 - Y_2)^2 = \frac{1}{4}(1 + a - \beta)(1 + \beta - a)(Y_0 - Y_2)^2 \tag{26}$$

(la deuxième égalité est consequence de (20)).

D'après (17), l'idéal $(Y_1 - Y_2)$ de $\mathcal{A}$ est δ'-stable, donc si $\pi : \mathcal{A} \to$ $\to \mathcal{L}[Y_0, Y_2]$ est le morphisme induit par le passage au quotient, alors:

$$d \circ \pi = \pi \circ \delta'.$$

Ecrivons:

$$P_k = (Y_1 - Y_2)^l P'$$

avec $P' \in \mathcal{L}[Y_1, Y_2]$ et $Y_1 - Y_2$ ne divisant pas P'; on vérifie facilement, en utilisant (17), que

$$\delta' P' = \left(\sum_{i=0}^{2} \lambda_i Y_i - l(Y_1 + Y_2) \right) P' = \left(\sum_{i=0}^{2} \mu_i Y_i \right) P', \tag{27}$$

où $\mu_0 = \lambda_0, \mu_1 = \lambda_1 - l, \mu_2 = \lambda_2 - l$; nous devons encore démontrer que $\mu_0 \in \mathbb{Q}$. Posons $Q = \pi(P') \in \mathcal{L}[Y_0, Y_2]$; comme P' est isobare de poids $k - l$ non divisible par $Y_1 - Y_2$, Q est isobare non nul de poids $k - l$, et nous pouvons supposer sans perte de généralité qu'il n'appartient pas à $\mathcal{L}$; il satisfait:

$$dQ = (\mu_0 Y_0 + (\mu_1 + \mu_2) Y_2) Q. \tag{28}$$

Si $X \in \mathcal{L}[Y_0, Y_2]$ est isobare de poids x, notons $d_{Y_0}(X) = xX(dY_0) - Y_0(dX)$; l'application d_{Y_0} est une dérivation telle que $d_{Y_0}(Y_0) = 0$. On a:

$$\begin{aligned} d_{Y_0}(Q) &= \frac{\partial Q}{\partial Y_0} d_{Y_0}(Y_0) + \frac{\partial Q}{\partial Y_2} d_{Y_0}(Y_2) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial Y_2} d_{Y_0}(Y_2). \end{aligned}$$

Observons aussi que:

$$\begin{aligned} d_{Y_0}(Y_2) &= Y_2(Y_0^2 - \tilde{L}) - Y_0(Y_2^2 - \tilde{L}) \\ &= \frac{1}{4}(Y_0 - Y_2)((1 - \alpha + \beta)Y_0 + (1 + \alpha - \beta)Y_2) \times \\ &\quad \times ((1 + \alpha - \beta)Y_0 + (1 - \alpha + \beta)Y_2) \end{aligned} \tag{29}$$

(utiliser (26) pour factoriser $d_{Y_0}(Y_2)$). Ainsi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial Y_2} Q^{-1} &= \frac{d_{Y_0}(Q)}{d_{Y_0}(Y_2)} \\ &= \frac{(k - l)dY_0 - Y_0(\mu_0 Y_0 + (\mu_1 + \mu_2)Y_2)}{d_{Y_0}(Y_2)}, \end{aligned}$$

d'après (28).

Posons $Y = Y_2$, $R = Q(1, Y)$, $R_Y = dR/dY = (\partial Q/\partial Y_2)|_{Y_0=1, Y_2=Y}$ et $W = d_{Y_0}(Y_2)|_{Y_0=1, Y_2=Y}$, qui n'est pas nul. Nous avons:

$$\frac{R_Y}{R} = \frac{\mu_0 + (\mu_1 + \mu_2)Y + (N - 1)(k - l)}{W}.$$

Comme W se factorise sur $\mathbb{Q}$ (car $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, cf. (29)), les racines de l'équation $R = 0$ sont des nombres rationnels, et $R_Y/R \in \mathbb{Q}(Y)$; en particulier $\lambda_0 \in \mathbb{Q}$. □

LEMME 4. *Sous l'hypothèse* (18), *on a* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ *dans* (19).

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION. On utilise cette fois les relations (15), (16) et on se sert des égalités (21) et (22). Nous laissons les détails au lecteur, car la preuve est très similaire à celle du lemme 3. □

LEMME 5. *Sous l'hypothèse* (18), *on a* $\lambda_3 \in \mathbb{Z}$ *dans* (19).

Démonstration. En substituant (23) et (19) dans (18) et en comparant les termes isobares de poids h, on voit que

$$HP_h = \lambda_3 P_h,$$

où H est la dérivation de $\mathcal{A}$ définie par:

$$HX = w\left(\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial \varrho}\,\varrho\right).$$

Ecrivons $P_h = \varrho^l V$ avec $l \in \mathbb{N}$, $V = V_0 + V_1\varrho + \cdots + V_s\varrho^s$, $V_i \in \mathcal{R}[t]$ et $V_0 \neq 0$. On vérifie que $HV = (\lambda_3 - l)V$. Comme

$$HV = w\frac{\partial V_0}{\partial t} + \varrho W = (\lambda_3 - l)(V_0 + \varrho W')$$

pour quelques $W, W' \in \mathcal{A}$, on a que

$$w\frac{\partial V_0}{\partial t} = (\lambda_3 - l)V_0$$

ce qui implique $V_0 \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ et $\lambda_3 = l \in \mathbb{Z}$. □

Fin de la démonstration de la proposition 2. Soit P un polynôme irréductible de $\mathcal{A}$ satisfaisant à (18), avec F comme dans (19), c'est-à-dire, tel que $\delta P = (\lambda_0 Y_0 + \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3)P$. A présent, nous avons démontré que $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ pour $i = 0, \ldots, 3$. Donc

$$\frac{\delta P}{P}, \frac{\delta(Y_0 - Y_1)}{(Y_0 - Y_1)}, \frac{\delta(Y_0 - Y_2)}{(Y_0 - Y_2)}, \frac{\delta(Y_1 - Y_2)}{(Y_1 - Y_2)}, \frac{\delta\varrho}{\varrho}$$

sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants, et il existe des entiers rationnels non tous nuls $a_1, \ldots, a_5$ tels que:

$$a_1\frac{\delta P}{P} + a_2\frac{\delta(Y_0 - Y_1)}{(Y_0 - Y_1)} + a_3\frac{\delta(Y_0 - Y_2)}{(Y_0 - Y_2)} + a_4\frac{\delta(Y_1 - Y_2)}{(Y_1 - Y_2)} + a_5\frac{\delta\varrho}{\varrho} = 0.$$

Ainsi $\delta(P^{a_1}(Y_0 - Y_1)^{a_2}(Y_0 - Y_2)^{a_3}(Y_1 - Y_2)^{a_4}\varrho^{a_5}) = 0$, d'où

$$P^{a_1}(Y_0 - Y_1)^{a_2}(Y_0 - Y_2)^{a_3}(Y_1 - Y_2)^{a_4}\varrho^{a_5} \in \mathbb{C}^{\times}.$$

Comme P est irréductible, ceci implique que P est proportionnel à l'un des polynômes $Y_0 - Y_1, Y_0 - Y_2, Y_1 - Y_2, \varrho$. □

2.2. – *Idéaux non principaux stables.*

Sous les conditions (1) nous démontrons la proposition suivante.

Proposition 3. *Tout idéal premier non nul et isobare de $\mathcal{R}$, δ-stable, contient au moins l'un des éléments $Y_0 - Y_1, Y_0 - Y_2, Y_1 - Y_2$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{I}$ un idéal comme dans les hypothèses du lemme. Si $\mathcal{I}$ est principal alors $\mathcal{I}\mathcal{A}$ est premier, principal, non divisible par ϱ et δ-stable, et au moins l'un des polynômes $Y_0 - Y_1, Y_0 - Y_2, Y_1 - Y_2$ appartient à $\mathcal{I}$, d'après la proposition 2. Supposons donc que $\mathcal{I}$ ne soit pas principal: nous avons deux cas.

(1). Supposons que $\mathcal{I} \cap (\mathbb{C}[Y_0] \cup \mathbb{C}[Y_1] \cup \mathbb{C}[Y_2]) \neq \{0\}$. Supposons par exemple que $\mathcal{I} \cap \mathbb{C}[Y_0] \neq (0)$. Comme $\mathcal{I}$ est premier, il existe $v \in \mathbb{C}$ tel que $Y_0 - v \in \mathcal{I}$: comme $\mathcal{I}$ est isobare, on a $v = 0$.

Donc $Y_0 \in \mathcal{I}$ et $DY_0 \in \mathcal{I}$. Ainsi le polynôme H obtenu en substituant Y_0 par 0 dans le polynôme DY_0 appartient aussi à $\mathcal{I}$. Explicitement:

$$H = -\frac{1}{4}(aY_1^2 + bY_2^2 + c(Y_1 - Y_2)^2) \in \mathcal{I}.$$

Aussi le polynôme DH appartient à $\mathcal{I}$, et le polynôme K obtenu en substituant Y_0 par 0 dans DH appartient à $\mathcal{I}$. On a:

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{8}(a^2Y_1^3 + b(b-4)Y_2^3 - c(Y_1 - Y_2)^2(4Y_1 + Y_2(4-b)) + \\ + aY_1((c-4)Y_1^2 + (b-2c)Y_1Y_2 + (b+c)Y_2^2)) \\ \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Les résultants $R_1 =\mathrm{Rés}_{Y_1}(H,K)$ et $R_2 =\mathrm{Rés}_{Y_2}(H,K)$ appartiennent à $\mathcal{I}$. Explicitement, on trouve $R_1 = -\dfrac{1}{256}\eta Y_2^6$ et $R_2 = -\dfrac{1}{256}\eta Y_1^6$, avec

$$\eta = (a+b)(a+c)(b+c)(ab+bc+ac). \tag{30}$$

On vérifie, sous les hypothèses (1), que $\eta \neq 0$ (voir le lemme 8 en appendice), donc si $Y_0 \in \mathcal{I}$, alors aussi $Y_1, Y_2 \in \mathcal{I}$. On parvient au même résultat si l'on suppose que $Y_1 \in \mathcal{I}$ ou $Y_2 \in \mathcal{I}$. Ainsi, on a que si $\mathcal{I} \cap (\mathbb{C}[Y_0] \cup \cup \mathbb{C}[Y_1] \cup \mathbb{C}[Y_2]) \neq \{0\}$, alors $Y_0, Y_1, Y_2 \in \mathcal{I}$, et dans ce cas on obtient la conclusion du lemme, car on trouve même plus, à savoir que $\mathcal{I} \supset \supset (Y_0 - Y_1, Y_0 - Y_2, Y_1 - Y_2) = (Y_0 - Y_1, Y_0 - Y_2)$.

(2). Supposons que l'idéal $\mathcal{I}$, non principal, soit tel que $\mathcal{I} \cap \cap (\mathbb{C}[Y_0] \cup \mathbb{C}[Y_1] \cup \mathbb{C}[Y_2]) = \{0\}$. Alors $\mathcal{I}$ contient un polynôme isobare P tel que $\dfrac{\partial P}{\partial Y_1} \neq 0$ et $\dfrac{\partial P}{\partial Y_2} = 0$. En d'autres termes, $\mathcal{I} \cap \mathbb{C}[Y_0, Y_1] \neq (0)$. Nous pouvons aussi supposer que P ait un degré minimal en Y_1: donc $\dfrac{\partial P}{\partial Y_1} \notin \mathcal{I}$.

Si U, V sont deux polynômes isobares de $\mathcal{R}$, nous notons

$$\delta_V(U) = p(U)U\delta(V) - p(V)V\delta(U)$$

(crochet de Rankin).

Nous calculons $\delta_{Y_0}(P)$, qui est un polynôme non nul appartenant à $\mathcal{I}$ (car P n'est pas une puissance de Y_0). Comme $\delta_{Y_0}(\,\cdot\,)$ est une dérivation, on obtient:

$$\begin{aligned}\delta_{Y_0}(P) &= \frac{\partial P}{\partial Y_0}\delta_{Y_0}(Y_0) + \frac{\partial P}{\partial Y_1}\delta_{Y_0}(Y_1) + \frac{\partial P}{\partial Y_2}\delta_{Y_0}(Y_2) \\ &= \frac{\partial P}{\partial Y_1}\delta_{Y_0}(Y_1) \in \mathcal{I},\end{aligned}$$

car $\delta_{Y_0}(Y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial P}{\partial Y_2} = 0$. Comme $\dfrac{\partial P}{\partial Y_1} \notin \mathcal{I}$, on a $\delta_{Y_0}(Y_1) \in \mathcal{I}$.

De même, $\mathcal{I} \cap \mathbb{C}[Y_0, Y_2] \neq (0)$. Soit Q un polynôme isobare de $\mathcal{I}$ tel que $\dfrac{\partial Q}{\partial Y_2} \neq 0$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial Y_1} = 0$. Nous pouvons aussi supposer que Q soit tel que $\dfrac{\partial Q}{\partial Y_2} \notin \mathcal{I}$. En suivant les mêmes arguments que ci-dessus, on trouve que $\delta_{Y_0}(Y_2) \in \mathcal{I}$. Donc $\delta_{Y_0}(Y_1), \delta_{Y_0}(Y_2) \in \mathcal{I}$. D'après les relations du lemme 2, on a:

$$\begin{aligned}\delta_{Y_0}(Y_1) = &-\frac{1}{4}(Y_1 - Y_0)((a+b)Y_0^2 + (a+c)Y_1^2 + (b+c)Y_2^2 - \\ &- 2(a-2)Y_1Y_0 - 2bY_2Y_0 - 2cY_1Y_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{Y_0}(Y_2) = &\frac{1}{4}(Y_0 - Y_2)((a+b)Y_0^2 + (a+c)Y_1^2 + (b+c)Y_2^2 - \\ &- 2aY_1Y_0 - 2(b-2)Y_2Y_0 - 2cY_1Y_2).\end{aligned}$$

Si au moins l'un des deux éléments $Y_1 - Y_0, Y_2 - Y_0$ appartient à $\mathcal{I}$, nous avons terminé. Sinon, puisque $\mathcal{I}$ est premier, l'élément:

$$\frac{\delta_{Y_0}(Y_1)}{Y_1 - Y_0} - \frac{\delta_{Y_0}(Y_2)}{Y_2 - Y_0} = -Y_0(Y_1 - Y_2)$$

appartient à $\mathcal{I}$. Comme $Y_0 \notin \mathcal{I}$, on obtient $Y_1 - Y_2 \in \mathcal{I}$. □

Afin de démontrer le théorème 2, nous devons encore établir un lemme élémentaire. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{R}$; on note $\tilde{\mathcal{I}}$ l'idéal engendré par les polynômes isobares de $\mathcal{I}$.

LEMME 6. *Nous avons les propriétés suivantes.*

1) *Si $\mathcal{I}$ est premier, alors $\tilde{\mathcal{I}}$ est premier.*
2) *Si $\mathcal{I}$ est δ-stable, alors $\tilde{\mathcal{I}}$ est δ-stable.*
3) *Si $\mathcal{I}$ n'est pas principal, alors $\tilde{\mathcal{I}} \neq (0)$.*

DÉMONSTRATION. Ceci est le lemme 5.2 de [15], dont nous reproduisons la preuve.

1. C'est bien connu.

2. Soit $U \in \tilde{\mathcal{I}}$; alors $U = U_0 + \cdots + U_k$ pour certains polynômes isobares $U_0, \ldots, U_k \in \mathcal{I}$. Pour tout j on a $DU_j \in \mathcal{I}$ car $\mathcal{I}$ est δ-stable. De plus DU_j est isobare, donc $DU = DU_0 + \cdots + DU_k \in \tilde{\mathcal{I}}$.

3. Introduisons une inconnue Y_3 de poids 1, et notons, pour tout polynôme non nul $F \in \mathcal{R}$:

$$ {}^hF = Y_3^p F\left(\frac{Y_0}{Y_3}, \frac{Y_1}{Y_3}, \frac{Y_2}{Y_3}\right), $$

où p est le plus grand poids d'un monôme non nul de F.

Il faut montrer que $\mathcal{I}$ contient un polynôme isobare non nul. Par hypothèse il existe $U, V \in \mathcal{I}$ premiers entre eux; donc ${}^hU$ et ${}^hV$ sont premiers entre eux.

Le résultant $R = \mathrm{Res}_{Y_3}({}^hU, {}^hV) \in \mathcal{R}$ est non nul et on vérifie qu'il est isobare. De plus $R \in \mathcal{I}$, car il existe $A, B \in \mathcal{R}[Y_3]$ tels que $R = A({}^hU) + B({}^hV)$ d'où, en substituant $Y_3 = 1$, $R = \tilde{A}U + \tilde{B}V$ pour $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{R}$: donc $R \in \mathcal{I}$. □

2.3. – *Fin de la démonstration du théorème* 2.

Supposons par l'absurde qu'il existe un idéal premier $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$ non nul, δ-stable, ne contenant aucun des éléments $\varrho, Y_0 - Y_1, Y_0 - Y_2, Y_1 - Y_2$.

D'après la proposition 2, $\mathcal{J}$ ne peut pas être principal, donc $\mathcal{G} := \mathcal{J} \cap \mathcal{R}[\varrho] \neq (0)$.

L'idéal $\mathcal{G}$ est un idéal premier non nul et δ-stable de $\mathcal{R}[\varrho]$; il ne peut pas être principal (au cas contraire, $\mathcal{G}\mathcal{A} \subset \mathcal{J}$ serait principal et δ-stable, et d'après la proposition 2 il contiendrait l'un des éléments $\varrho, Y_0 - Y_1, Y_0 - Y_2, Y_1 - Y_2$).

Ainsi l'idéal $\mathcal{I} := \mathcal{G} \cap \mathcal{R}$ est premier, non nul, et δ-stable. Toujours en appliquant la proposition 2 (à l'idéal $\mathcal{I}\mathcal{A} \subset \mathcal{J}$) on voit que $\mathcal{I}$ n'est pas principal.

Mais comme $\mathcal{I}$ n'est pas principal, le lemme 6 peut être appliqué et implique que $\tilde{\mathcal{I}}$ est un idéal premier non nul isobare et δ-stable de $\mathcal{R}$. On obtient alors une contradiction avec la proposition 3. $\square$

3. Déduction du théorème 3.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, soient $F_1(t), \ldots, F_m(t)$ des fonctions algébriquement indépendantes sur $K = \mathbb{C}(t)$, admettant en tout point $\xi \in \mathcal{O}$ un développement en série de Laurent:

$$F_i(t) = \sum_{k=s}^{\infty} v_{i,k}(t-\xi)^k, \tag{31}$$

avec $s \in \mathbb{Z}$.

Soit P_0 un polynôme de $\mathbb{C}[t]$ non nul, et supposons que l'anneau $\mathcal{A} = \mathbb{C}[F_1, \ldots, F_m]$ soit stable pour la dérivation $\delta = P_0(t)\dfrac{d}{dt}$. Il existe alors des polynômes $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_m]$ tels que:

$$\delta F_i = P_i(F_1, \ldots, F_m).$$

Soit d le plus grand degré total des P_i. Soit X_0 une nouvelle inconnue, notons $\mathcal{B} = K[X_0, \ldots, X_m]$, posons:

$$B_i(X_0, \ldots, X_m) = X_0^d P_i\left(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_m}{X_0}\right) \in \mathcal{B}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

et $B_0 = X_0^d P_0(t) \in K[X_0]$. Définissons l'opérateur de dérivation homogène:

$$\mathcal{D} = B_0 \frac{\partial}{\partial t} + X_0 \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial}{\partial X_i}.$$

On a donc, pour tout $Q \in \mathcal{B}$,

$$(\mathcal{D}Q)(1, F_1, \ldots, F_m) = \delta(Q(1, F_1, \ldots, F_m)).$$

De plus, si $Q \in \mathcal{B}$ est un élément homogène, alors $\mathcal{D}Q$ est aussi homogène. Nous appelons l'anneau différentiel $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ l'*anneau différentiel homogène associé à* $(\mathcal{A}, \delta)$.

Fixons un élément $\xi \in \mathcal{O}$ et soit $\mathcal{K}$ le complété d'une clôture algébrique du complété de K à la place déterminée par ξ, soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier homogène de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{V} = Z(\mathfrak{P})$ la sous-variété de $\mathbb{P}_m(\mathcal{K})$ des zéros de $\mathfrak{P}$. Notons $|\cdot|$ la valeur absolue de $\mathcal{K}$: si $F \in \mathcal{K}$, alors:

$$|F| = \exp\{-\mathrm{ord}_\xi(F)\}. \tag{32}$$

Nous posons

$$\overline{\varpi} = (1 : F_1 : \cdots : F_m) \in \mathbb{P}_m(\mathcal{K}).$$

Notons

$$\mathrm{Dist}(\overline{\varpi}, \mathcal{V}) = \mathrm{Dist}_{(1,\ldots,1)}(\overline{\varpi}, \mathcal{V})$$

la *distance de* $\overline{\varpi}$ *à* $\mathcal{V}$ de Philippon (voir p. 88 de [13]), associée à la valeur absolue de $\mathcal{K}$. Cette distance s'étend par multiplicativité aux cycles algébriques équidimensionnels de $\mathbb{P}_m(K)$; elle dépend de ξ, et on utilise la notation $\mathrm{Dist}_\xi(\overline{\varpi}, \mathcal{V})$ lorsque la dépendance en ξ doit être mise en relief.

Posons

$$\|\overline{\varpi}\| = \max\{1, |F_1|, \ldots, |F_m|\},$$

et pour un polynôme homogène $U \in K[X_0, X_1, \ldots, X_m]$,

$$U = \sum_{\underline{\lambda}} c_{\underline{\lambda}} \underline{X}^{\underline{\lambda}}, \tag{33}$$

posons aussi:

$$|U| = \max_{\underline{\lambda}}\{|c_{\underline{\lambda}}|\}.$$

On peut calculer facilement la distance de $\overline{\varpi}$ à $\mathcal{V}$ si $\mathcal{V}$ est une hypersurface. Soit U comme dans (33), homogène, avec $c_{\underline{\lambda}} \in \mathbb{C}[t]$, et supposons que $\mathcal{V} = \mathcal{Z}(U)$. Les formules p. 64 de [7] impliquent:

$$\log \mathrm{Dist}(\overline{\varpi}, \mathcal{V}) = \log |U(\overline{\varpi})| - \log |U| - \deg_{\underline{X}}(U) \log \|\overline{\varpi}\|. \tag{34}$$

En d'autres termes,

$$\log \mathrm{Dist}(\overline{\varpi}, \mathcal{V}) = -\,\mathrm{ord}_\xi(U(\overline{\varpi})) + \min_{\underline{\lambda}}\{\mathrm{ord}_\xi(c_{\underline{\lambda}})\} + \\ + \deg(U) \min_{i=1,\ldots,m}\{0, \mathrm{ord}_\xi(F_i)\}.$$

On rappelle également que l'image de l'application $\mathrm{Dist}(\overline{\varpi}, \cdot)$ est contenue dans l'intervalle $[0,1]$ ([14], proposition 4.1 p. 119).

De plus, comme $F_1, \ldots, F_m$ satisfont à (31) dans $\mathcal{O}$, on a que pour tout cycle algébrique équidimensionnel non nul $\mathcal{Z}$ de $\mathbb{P}_m(K)$ (différent de $\mathbb{P}_m(K)$), le nombre

$$-\log \mathrm{Dist}(\overline{\varpi}, \mathcal{Z})$$

est un élément de $\mathbb{N}$; ceci se voit directement dans (34) si $\mathcal{Z} = Z(Q)$ avec $Q \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$. Par convention, nous posons $-\log \mathrm{Dist}_\xi(\overline{\varpi}, Z(0)) := +\infty$ pour tout $\xi \in \mathcal{O}$.

Par convention, le cycle nul 0 est de dimension -1, et $-\log \mathrm{Dist}(\overline{\varpi}, 0) = 0$ pour tout ξ.

On note $h : K^\times \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la *hauteur logarithmique de Weil*, que l'on étend de la manière usuelle à $\mathbb{P}_s(K)$, puis aux sous-variétés et aux cycles de $\mathbb{P}_s(K)$ via les formes de Chow (cf. paragraphe 3 de [13]). On note $\deg(\mathcal{Z})$ le *degré* d'un cycle défini sur K (paragraphe 2 de loc. cit.).

Nous devons introduire une autre propriété d'anneaux différentiels, que nous appelons «propriété D».

DÉFINITION. On dit que l'anneau différentiel $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfait à la *propriété D en ξ d'exposant $\leq \rho(\xi)$*, si pour tout idéal premier homogène $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{B}$ contenant un idéal premier non nul $\mathcal{D}$-stable, on a:

$$-\log \mathrm{Dist}(\overline{\varpi}, Z(\mathfrak{P})) \leq \rho(\xi) \deg(\mathfrak{P}).$$

S'il existe une constante $\rho \geq 0$ telle que pour tout $\xi \in \mathcal{O}$ l'anneau $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfasse à la propriété D en ξ d'exposant $\leq \rho$, alors nous dirons que $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfait à la *propriété D uniforme sur $\mathcal{O}$ d'exposant $\leq \rho$*.

3.1. – *Nilradical différentiel et propriété D.*

LEMME 7. *Supposons que le nilradical différentiel de l'anneau différentiel $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ contienne un polynôme homogène non nul l. Alors il satisfait à la propriété D en tout point $\xi \in \mathcal{O}$. Si:*

$$\rho := \sup_{\xi \in \mathcal{O}} \{-\log \mathrm{Dist}_\xi(\overline{\varpi}, Z(l))\} \in \mathbb{N},$$

alors $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfait à la propriété D uniforme sur $\mathcal{O}$ (d'exposant $\leq \rho$).

DÉMONSTRATION. C'est l'analogue du lemme 3.4 p. 155 de [11]. Fixons $\xi \in \mathcal{O}$, posons:

$$\rho(\xi) = -\log \mathrm{Dist}_\xi(\overline{\varpi}, Z(l)).$$

Sous les hypothèses du lemme, $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfait à la propriété D d'exposant $\leq \rho(\xi)$: voici la preuve.

Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier homogène non nul de $\mathcal{B}$, supposons que:

$$-\log \mathrm{Dist}(\overline{\varpi}, Z(\mathfrak{P})) > \rho(\xi) \deg(\mathfrak{P}).$$

Soit p un élément homogène non nul de $\mathfrak{P}$. L'inegalité suivante se démontre en suivant les arguments du paragraphe 5 de [13], ou en combinant les propositions 3.24 et 3.25 de [3]:

$$-\log \mathrm{Dist}(\overline{\omega}, Z(p)) \geq -\frac{1}{\deg(\mathfrak{P})} \log \mathrm{Dist}(\overline{\omega}, Z(\mathfrak{P})). \tag{35}$$

L'inégalité (35) implique que $-\log \mathrm{Dist}(\overline{\omega}, Z(p)) > \rho(\xi)$, donc $p \neq l$. Ainsi $l \notin \mathfrak{P}$, et $\mathfrak{P}$ ne contient pas d'idéal premier non nul $\mathcal{D}$-stable.

Faisons varier $\xi \in \mathcal{O}$. Si le supremum ρ est fini, il est clair que $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfait à la propriété D uniforme d'exposant $\leq \rho$. □

Nous démontrons maintenant:

PROPOSITION 4. *Si $\mathcal{A} = \mathbb{C}[t, e^t, Y_0, Y_1, Y_2]$ est muni de la dérivation δ, alors le nilradical différentiel de l'anneau différentiel homogène associé $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ contient un polynôme homogène non nul, et satisfait à la propriété D uniforme.*

DÉMONSTRATION. Nous avons $\mathcal{B} = K[X_0, X_1, \ldots, X_4]$, $K = \mathbb{C}(t)$ et

$$\mathcal{D} = wX_0^2 \frac{\partial}{\partial t} + wX_0^2 X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + X_0 \sum_{i=2}^{4} (X_i^2 - U) \frac{\partial}{\partial X_i},$$

avec

$$U = \frac{1}{4}(a(X_2 - X_3)^2 + b(X_2 - X_4)^2 + c(X_3 - X_4)^2).$$

Posons:

$$\mathcal{A}^\sharp = K[e^t, Y_0, Y_1, Y_2], \quad \overline{\omega} = (1 : e^t : Y_0 : Y_1 : Y_2) \in \mathbb{P}_4(\mathcal{K}).$$

on a un morphisme $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}^\sharp$ qui associe à tout polynôme homogène $P \in \mathcal{B}$ l'élément $\psi(P) = P(\overline{\omega}) \in \mathcal{A}^\sharp$. Clairement:

$$\psi(\mathcal{D}P) = \delta(\psi(P)),$$

pour tout polynôme homogène $P \in \mathcal{B}$, d'après le lemme 2.

Démontrons que si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier homogène non nul de $\mathcal{B}$ qui est $\mathcal{D}$-stable, alors $l \in \mathfrak{P}$ avec:

$$l = X_0 X_1 (X_3 - X_2)(X_4 - X_2)(X_4 - X_3).$$

Notons $\mathcal{P}^\sharp$ l'idéal de $\mathcal{A}^\sharp$ engendré par les éléments de $\psi(\mathfrak{P})$; c'est un idéal premier δ-stable non nul. L'idéal $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\sharp \cap \mathcal{A}$ de $\mathcal{A}$ est un idéal premier non nul δ-stable de $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{P} = \mathcal{A}$, alors $X_0 \in \mathfrak{P}$ et $l \in \mathfrak{P}$. Si $\mathcal{P} \neq \mathcal{A}$, au moins l'un des éléments $\varrho, Y_2 - Y_0, Y_1 - Y_0, Y_2 - Y_1$ appartient à $\mathcal{P}$, d'après le théorème 2. On en déduit qu'au moins l'un des polynômes homogènes X_1, $X_3 - X_2$, $X_4 - X_2$, $X_4 - X_3$ appartient à $\mathfrak{P}$; finalement, $l \in \mathfrak{P}$. Donc l'anneau différentiel $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfait à la propriété D d'après le lemme 7.

Le lemme 2 implique:

$$\begin{aligned}\delta\kappa &= \delta(\varrho(Y_0 - Y_1)(Y_0 - Y_2)(Y_1 - Y_2)) \\ &= (w + 2(Y_0 + Y_1 + Y_2))\kappa.\end{aligned}$$

De plus, la fonction $\kappa = l(\overline{\omega})$ ne s'annule pas dans B^*, car (κ) est un idéal principal δ-stable de $(\mathcal{A}, \delta)$, et Y_0, Y_1, Y_2 sont holomorphes sur B^*.

Le nombre ρ du lemme 7 est bien défini (le calcul du supremum se réduit à un calcul de maximum), et d'après ce même lemme, $(\mathcal{A}, \delta)$ satisfait à la propriété D uniforme (d'exposant ≤ 1). □

3.2. – *Une estimation de multiplicité provenant de la propriété D.*

Proposition 5. *Supposons que l'anneau $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfasse à la propriété D d'exposant $\leq \rho(\xi)$ en ξ. Il existe une constante $c_3 > 0$, dépendant uniquement de $\rho(\xi)$, avec la propriété suivante. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[Z, X_1, \ldots, X_m]$ et posons:*

$$N_0 = \max\{1, \deg_Z P\}, \quad N_1 = \max\{1, \deg_{X_1,\ldots,X_m} P\}.$$

Alors la fonction $F(z) = P(z, F_1(z) \ldots, F_m(z))$ satisfait

$$ord_{\,\xi} F(z) \leq c_3 N_0 N_1^m.$$

Le théorème 3 est une conséquence de la proposition 5, grâce à la proposition 4.

La proposition 5 est corollaire du résultat encore plus général suivant (cf. théorème 2.2 p. 154 de [11]).

Proposition 6. *Supposons que l'anneau différentiel $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfasse à la propriété D en ξ d'exposant $\leq \rho(\xi)$. Alors il existe une constante $c_4 > 0$, ne dépendant que de $\rho(\xi)$, telle que pour tout cycle algébrique équidimensionnel $\mathcal{Z} \subset \mathbb{P}_m(\mathcal{K})$ de dimension $g < m$, l'inégalité suivante soit satisfaite:*

$$\log \mathrm{Dist}\,(\overline{\omega}, \mathcal{Z}) \geq -c_4(\max\{1, \mathrm{h}(\mathcal{Z})\} \deg(\mathcal{Z})^{(g+1)/(m-g)} + \deg(\mathcal{Z})^{m/(m-g)}). \tag{36}$$

Voici comment la proposition 6 implique la proposition 5.

Soit $P \in \mathbb{C}[Z, X_1, \ldots, X_m]$: alors $P \in K[X_1, \ldots, X_m]$. Soit $U \in \mathcal{B}$ l'homogéneisé de P et posons $\mathcal{Z} = Z(U) \subset \mathbb{P}_m(K)$; nous pouvons supposer que $\deg_{\underline{X}}(P) \neq 0$. On a:

$$h(\mathcal{Z}) \leq N_0, \quad \deg(\mathcal{Z}) \leq N_1, \quad g = m - 1.$$

La proposition 6 implique:

$$\begin{aligned} -\log \mathrm{Dist}(\overline{\varpi}, \mathcal{Z}) &\leq c_5(N_0 N_1^m + N_1^m) \\ &\leq 2c_5 N_0 N_1^m. \end{aligned} \tag{37}$$

Comme $\log |U| \geq -\deg_Z(U)$, on a:

$$\begin{aligned} &\mathrm{ord}_\xi(U(\overline{\varpi})) + \log |U| + \deg_{\underline{X}}(U) \log \|\overline{\varpi}\| \geq \\ &\geq \ \mathrm{ord}_\xi(U(\overline{\varpi})) - N_0. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (34) et en combinant cette dernière estimation avec l'inégalité (37), on trouve:

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_\xi(F) &= \mathrm{ord}_\xi(U(\overline{\varpi})) \\ &\leq 2c_5 N_0 N_1^m + N_0 \\ &\leq c_6 N_0 N_1^m. \end{aligned}$$

□

4. Appendice: non nullité de η.

Lemme 8. *Sous les conditions* (1), *le nombre η défini par* (30) *est non nul.*

Démonstration. Analysons les facteurs définissant le produit η. D'après la formule (20), $a + b$ est nul si et seulement si $\alpha = \beta - 1$ ou $\alpha = \beta + 1$, mais ceci est clairement impossible car $1 > \beta > \alpha > 0$.

D'après la formule (22), $a + c$ est clairement non nul, car $0 < \gamma < 1$. D'après la formule (21) $b + c$ est nul si et seulement si $\gamma = -1 + \alpha + \beta$ ou $\gamma = 1 + \alpha + \beta$. Si $\gamma = 1 + \alpha + \beta$, alors $\gamma > 1$, et cette eventualité est exclue. Si $\gamma = \alpha + \beta - 1$, alors $\gamma - \alpha - \beta = -1$, mais $\gamma - \alpha - \beta > 0$ par hypothèse. Donc le produit $(a + b)(a + c)(b + c)$ est non nul.

Plus difficile est de démontrer qu'aussi le quatrième facteur est non nul:

$$ab + ac + bc = 2(\gamma^2(-1 + \alpha + \beta - 2\alpha\beta) + \\ + \gamma(1 + \alpha + \beta)(1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta) - 2(\alpha\beta)^2).$$

Nous en profitons pour esquisser la démonstration d'une propriété plus forte. Nous vérifions que la fonction

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = ab + ac + bc$$

satisfait

$$0 \leq f(\alpha, \beta, \gamma) \leq \frac{3}{4}$$

si $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq 1$; de plus, ces bornes sont atteintes seulement si au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée:

(38) $$\alpha = 0, \quad \alpha = \beta, \quad \beta = \gamma, \quad \gamma = 1.$$

En particulier, $f(\alpha, \beta, \gamma)$ est positive non nulle si α, β, γ sont soumis aux contraintes $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$, ce qui implique le lemme.

On calcule les points singuliers réels («points critiques») de la surface algébrique S définie par $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ ([6]). Ce sont les points qui annulent toutes les dérivées partielles de f d'ordre 1, et ils sont donnés par les conditions simultanées:

$$(2\alpha - \gamma)(2\beta^2 + \gamma - 2\beta\gamma) = 0$$

$$(2\beta - \gamma)(2\alpha^2 + \gamma - 2\alpha\gamma) = 0$$

$$(1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta)(1 + \alpha + \beta - 2\gamma) = 0.$$

Voici le resultat du calcul (nous n'en donnons pas les détails ici); nous avons 9 points critiques:

$$\gamma_0 = (1/2, 1/2, 1)$$

$$\gamma_1 = (-1, 0, 0)$$

$$\gamma_2 = (0, 1, 2)$$

$$\gamma_3 = (1, 0, 0)$$

([6]) C'est une surface elliptique. P. Corvaja a demontré qu'elle admet au moins un point d'ordre infini, ce qui implique que les points rationnels de cette surface sont denses.

$$
\begin{aligned}
\gamma_4 &= (2,1,2)\\
\gamma_5 &= (0,-1,0)\\
\gamma_6 &= (1,0,2)\\
\gamma_7 &= (0,1,0)\\
\gamma_8 &= (1,2,2).
\end{aligned}
$$

On fait une étude locale des points critiques. La matrice hessienne de f en γ_0 est:

$$
\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},
$$

de valeurs propres négatives $-2, -2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}$, d'où l'on déduit que $f(\gamma_0) = 3/4$ est un maximum rélatif pour f. On vérifie (en calculant les matrices hessiennes), qu'aucun autre point critique n'est extremal (i. e. minimum ou maximum relatif).

On vérifie directement qu'aucun point critique ne se trouve dans le tetrahèdre réel Θ ouvert défini par les inégalités $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$, et qu'aucun point critique autre que γ_0 ne se trouve dans le tetrahèdre réel $\overline{\Theta}$ fermé défini par $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq 1$; Le point γ_0 se trouve, quant'à lui, sur le bord topologique de ce tetrahèdre.

On déduit de cette étude que si $m \in \overline{\Theta}$ est un minimum absolu (resp. maximum absolu) de f sur $\overline{\Theta}$, alors m se trouve sur le bord de Θ. L'étude continue de la même façon en considérant les restrictions de f aux faces de $\overline{\Theta}$, puis aux arêtes. □

Rémerciements. L'auteur voudrait remercier l'Arbitre pour avoir suggéré la démonstration du lemme 3 reportée ici, qui remplace une démonstration précédente plus compliquée.

REFERENCES

[1] D. BERTRAND, *Theta functions and transcendence.* Ramanujan J., **1**, No. 4 (1997), pp. 339–350.

[2] D. BERTRAND - W. ZUDILIN, *Derivatives of Siegel modular forms and exponential functions.* Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat., **65**, No. 4 (2001), pp. 21–34.

[3] V. BOSSER, *Indépendance algébrique de valeurs de séries d'Eisenstein*, A paraître dans Séminaires et Congrés, SMF (2005).

[4] L. R. FORD, *Automorphic functions.* New York, McGraw-Hill. (1929).
[5] G. HALPHÉN, *Sur un système d'équation différentielles.* C. R. XCII (1881), pp. 1101–1103.
[6] C. G. J. JACOBI, *Über die Differentialgleichung, welcher die Reihen* $1 \pm 2q + 2q^4 2q^9 + etc.$, $2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + etc.$ J. Reine Angew. Math., **36** (1948), pp. 97–112.
[7] C. JADOT, *Critères pour l'indépendance linéaire et algébrique.* Thèse de doctorat de l'Université de Paris VI (1996).
[8] S. LANG, *Introduction to modular forms,* (Avec deux appendices, par D. B. Zagier et par W. Feit). Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (1976), p. 222.
[9] YU. V. NESTERENKO, *Modular functions and transcendence questions.* Sb. Math., **187**, No. 9 (1996), pp. 1319–1348.
[10] YU. V. NESTERENKO, *Algebraic independence for values of Ramanujan functions.* Dans *Introduction to algebraic independence theory.* Yu. V. Nesterenko et P. Philippon éditeurs, chapitre 3, pp. 27–43, Lecture Notes in Mathematics 1752, Springer (2001).
[11] YU. V. NESTERENKO, *Multiplicity estimates for solutions of algebraic differential equations.* Dans *Introduction to algebraic independence theory.* Yu. V. Nesterenko et P. Philippon éditeurs, chapitre 10, pp. 149–165, Lecture Notes in Mathematics 1752, Springer (2001).
[12] K. NISHIOKA, *A conjecture of Mahler on automorphic functions.* Arch. Math., **53**, No. 1 (1989), pp. 46–51.
[13] P. PHILIPPON, *Diophantine geometry.* Dans *Introduction to algebraic independence theory.* Yu. V. Nesterenko et P. Philippon éditeurs, chapitre 6, pp. 83–93, Lecture Notes in Mathematics 1752, Springer (2001).
[14] G. RÉMOND, *Géométrie diophantienne multiprojective.* Dans *Introduction to algebraic independence theory.* Yu. V. Nesterenko et P. Philippon éditeurs, chapitre 7, pp. 95–117, Lecture Notes in Mathematics 1752, Springer (2001).
[15] F. PELLARIN, *La structure différentielle de l'anneau des formes quasi-modulaires pour* $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$. Soumis au Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux https://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00005554/en.
[16] M. YOSHIDA, *Fuchsian Differential Equations*. Aspects of Mathematics, vol. E11.
[17] M. YOSHIDA, *Hypergeometric functions, my Love*. Aspects of Mathematics, (1997).
[18] W. ZUDILIN, *The hypergeometric equation and Ramanujan functions.* Ramanujan Journal, Vol. **7**, No. 4 (2003), pp. 435–447.
[19] AA. B. SHIDLOVSKIJ, *Transcendental numbers.* De Gruyter Studies in Mathematics, **12** (1989).
[20] H. UMEMURA - H. WATANABE, *Solutions of the second and fourth Painlevé equations. I.* Nagoya Math. J. **148** (1997), pp. 151–198.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 febbraio 2005 e in versione definitiva il 6 settembre 2005.