REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 110 (2003)

Prodotti di sottogruppi mutuamente permutabili.

ENRICO JABARA (*)

ABSTRACT - In this note we study groups $G = HK$ admitting a factorization by two mutually sn-permutable subgroups H and K. Some results of Beidleman-Galoppo-Heineken-Manfredino ([2]) are improved.

1. Introduzione.

Un sottogruppo H di un gruppo G è detto permutabile se per ogni sottogruppo X di G si ha $\langle H, X \rangle = HX = XH$.

Stonehewer ha provato che un prodotto $G = HK$ di due sottogruppi H e K nilpotenti e permutabili è risolubile con lunghezza derivata limitata in funzione delle classi di nilpotenza di H e K (Teorema E di [5]). Tale risultato è stato oggetto di numerose generalizzazioni; in particolare Lennox ha provato che se $G = HK$ è prodotto di due sottogruppi permutabili, allora G è risolubile se H è nilpotente e K è risolubile (Teorema A di [3]) oppure se H e K sono risolubili e $H \cap K$ è subnormale in H e in K (Teorema B di [3]). Per quest'ultimo risultato si può far vedere che è sufficiente supporre $H \cap K$ subnormale in H (o in K) ma non si può prescindere da qualche ipotesi su $H \cap K$. Infatti Stonehewer in [6] ha costruito un gruppo non risolubile G prodotto di due sottogruppi permutabili H e K entrambi metabeliani. Più recentemente in [2] è stato mostrato che molti dei risultati ottenuti per gruppi G che sono prodotto di due sottogruppi permutabili H e K si posono ottenere ricorrendo all'ipotesi più debole che H e K siano mutuamente sn-permutabili nel senso della seguente

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Informatica, Università di Venezia, Via Torino 126, 30175 Mestre, Venezia.

DEFINIZIONE 1. Una coppia H e K di sottogruppi di un gruppo G si dice mutuamente sn-permutabile se H permuta con ogni sottogruppo subnormale di K e K permuta con ogni sottogruppo subnormale di H.

Scopo di questa nota è migliorare alcuni risultati ottenuti in [2] dimostrando:

TEOREMA A. Sia $G = HK$ un gruppo prodotto di una coppia di sottogruppi mutuamente sn-permutabili H e K. Se H e K sono risolubili con lunghezza derivata rispettivamente d_H e d_K e se $H \cap K$ è subnormale in H con difetto n allora G è risolubile e la sua lunghezza derivata non supera $n \cdot (d_H + d_K) + d_K$.

Il limite per la lunghezza derivata di G determinato nel teorema precedente migliora in modo sostanziale quello ottenuto in [2].

TEOREMA B. Sia $G = HK$ un gruppo prodotto di una coppia di sottogruppi mutuamente sn-permutabili H e K. Se H è nilpotente di classe c_H e K è risolubile con lunghezza derivata d_K allora G è risolubile con lunghezza derivata al più $(d_K + 2) \cdot c_H$.

La tecnica usata per provare il Teorema B permette anche di ottenere il:

TEOREMA C. Sia $G = HK$ prodotto di una coppia di sottogruppi mutuamente sn-permutabili H e K. Allora G è iperabeliano se una delle seguenti condizioni è soddisfatta:

a) H e K sono ipercentrali;

b) H è ipercentrale e K è risolubile.

Rimane aperto il problema di decidere se G è iperabeliano quando H è ipercentrale e K è iperabeliano. In relazione al teorema C è interessante osservare che il prodotto di due gruppi normali ipercentrali è ipercentrale (per tale risultato, dovuto a P. Hall, si vedano le osservazioni dopo il lemma 2.2.19 di [4]).

2. Notazioni e risultati preliminari.

Se $G = HK$ è prodotto di due sottogruppi H e K allora G si dice fattorizzato tramite H e K. Per i gruppi fattorizzati si farà costante riferimento alla monografia [1] alla quale si rinvia per le definizioni ed i principali risultati. Nel seguto con $G = HK$ si denoterà un gruppo fattorizzato tramite due sottogruppi H e K e con $I = H \cap K$ la loro intersezione; si farà anche uso della

Definizione 2. Una coppia H e K di sottogruppi di un gruppo G si dice totalmente sn-permutabile se ogni sottogruppo subnormale di H permuta con ogni sottogruppo subnormale di K.

Ovviamente la totale sn-permutabilità è una proprietà assai più forte della mutua sn-permutabilità; le due nozioni però coincidono se $I = \{1\}$. Sussiste infatti il

Lemma 1. Sia $G = HK$ prodotto di due sottogruppi mutuamente sn-permutabili H e K. Valgono allora le seguenti proprietà:

a) Se R è un sottogruppo subnormale di H e S è un sottogruppo subnormale di K e se $I \leqslant R \cap S$ allora R e S sono una coppia di sottogruppi mutuamente sn-permutabili di G. In particolare $RS = SR$ è un sottogruppo di G.

b) Se N è un sottogruppo normale di G allora in $\overline{G} = G/N$ i sottogruppi $\overline{H}$ e $\overline{K}$ sono mutuamente sn-permutabili. Se poi $I \leqslant N$ allora $\overline{H}$ e $\overline{K}$ sono totalmente sn-permutabili.

Dim. a) discende dai lemmi 1 e 2 di [2].

Per quanto riguarda b) sia $\overline{R}$ un sottogruppo subnormale di $\overline{H}$; se R è l'antiimmagine di $\overline{R}$ in G si ha che R risulta un sottogruppo subnormale di H. Per le ipotesi fatte, $RK = KR$ e quindi $\overline{R}\,\overline{K} = \overline{K}\,\overline{R}$. In maniera analoga si dimostra che se $\overline{S}$ è un sottogruppo subnormale di $\overline{K}$ allora $\overline{H}\,\overline{S} = \overline{S}\,\overline{H}$. La seconda parte dell'asserto è una conseguenza del lemma 1 di [2]. ■

Il seguente risultato è una conseguenza della definizione di sottogruppo fattorizzato (si veda la definizione dopo il lemma 1.1.1 di [1]).

Lemma 2. Sia $G = HK$ prodotto di due sottogruppi mutuamente sn-permutabili H e K. Siano H_1, H_2 due sottogruppi subnormali di H contenenti I e K_1, K_2 due sottogruppi subnormali di K contenenti I. Allora $H_1K_1 \cap H_2K_2 = (H_1 \cap H_2)(K_1 \cap K_2)$.

Dim. I sottogruppi H_1, H_2, $H_1 \cap H_2$ sono subnormali in H e K_1, K_2, $K_1 \cap K_2$ sono subnormali in K e tutti contengono I; quindi, per il lemma 1.a), H_1K_1, H_2K_2 e $(H_1 \cap H_2)(K_1 \cap K_2)$ sono sottogruppi fattorizzati di G. L'asserto discende allora dal lemma 1.1.2.i di [1]. ■

LEMMA 3. Sia $G = HK$ prodotto di due sottogruppi mutuamente sn-permutabili H e K. Se H è abeliano, K è iperabeliano e $I \leqslant K_G$ allora si ha:

a) K/K_G è abeliano;

b) HK_G è normale in G;

c) $G'' \leqslant K_G$.

Dim. Per cominciare si supponga K risolubile.

Sia $\overline{G} = G/K_G$; per il lemma 1.b) i sottogruppi $\overline{H}$ e $\overline{K}$ costituiscono una coppia di sottogruppi totalamente sn-permutabili di $\overline{G}$. Si ha $\overline{K}_{\overline{G}} = \{1\}$ e quindi la proposizione 1 di [2] porge che $\overline{K}$ è abeliano e questo dimostra il punto a).

Per la dimostrazione di b) si procede come per la dimostrazione della proposizione 1 di [2] distinguendo tre casi che sono discussi rispettivamente nei lemmi 5, 6 e 7 di [2].

Il punto c) discende in maniera ovvia da a) e b).

Sia ora K iperabeliano e sia $\{1\} = \overline{K}_0 \leqslant \overline{K}_1 \leqslant \ldots \leqslant \overline{K}_\alpha \leqslant \ldots$ una serie normale a quozienti abeliani di $\overline{K}$ tale che $\overline{K} = \bigcup_\alpha \overline{K}_\alpha$. L'asserto è dimostrato se si prova che $\overline{K}$ è abeliano; per far questo basta far vedere che ogni $\overline{K}_\alpha$ è abeliano. Si procede per induzione transfinita su α e si dimostra che ogni $\overline{K}_\alpha$ risulta abeliano (la base dell'induzione è trivialmente verificata). Se α non è un ordinale limite allora per ipotesi $\overline{K}_{\alpha-1}$ è abeliano e quindi $\overline{K}_\alpha$ è risolubile e poiché $(\overline{K}_\alpha)_{\overline{G}} = \{1\}$, il punto a) precedentemente dimostrato porge la conclusione. Se α è un ordinale limite allora $\overline{K}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \overline{K}_\beta$; ma ogni $\overline{K}_\beta$ è abeliano e l'unione di una serie ascendente di gruppi abeliani è un gruppo abeliano. ■

OSSERVAZIONE. Il lemma 5 di [2] asserisce che se $G = UV$ è prodotto di una coppia di sottogruppi totalmente sn-permutabili U e V con U p-gruppo abeliano di esponente p^n e V risolubile con $V_G = 1$ allora U è normale in G e V è ciclico di ordine che divide $p^n - p^{n-1}$. L'ultima affermazione è inesatta come mostra l'esempio:

$$G = \langle x, a, b \mid x^8 = a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1,\ x^a = x^5,\ x^b = x^3 \rangle$$

con $U = \langle x \rangle$ ciclico di ordine 8 e $V = \langle a, b \rangle$ abeliano elementare di ordine 4. In realtà l'asserto vale se p è un numero primo dispari mentre va corretto dicendo che V è sottogruppo di un gruppo abeliano di tipo $(2, 2^{n-2})$ se

$p = 2$. In ogni caso U è normale in G e V risulta abeliano e sono queste le uniche proprietà utilizzate nella dimostrazione dei risultati esposti in questa nota.

Sia X un gruppo; si usano le seguenti convenzioni: se X è risolubile con d_X si denota la lunghezza derivata di X; se X è nilpotente con c_X si indica la classe di nilpotenza di X.

LEMMA 4. Sia $G = HK$ prodotto di due sottogruppi mutuamente *sn*-permutabili H e K. Se $I = \{1\}$ e H e K sono risolubili allora G è risolubile e $d_G \leqslant d_H + d_K$.

Dim. Per il lemma 1.b) H e K sono una coppia di sottogruppi totalamente *sn*-permutabili di G. Procedendo come nella dimostrazione del teorema 3 di [2] si ottiene che $\bigcap_{x \in H} (H'K)^x$ è un sottogruppo fattorizzato di G contenente G''. Inoltre $\bigcap_{x \in H} (H'K)^x = H'K_0$ con $K' \leqslant K_0$. Analogamente $\bigcap_{y \in K} (HK')^y = H_0 K' \geqslant G''$ e $H' \leqslant H_0$.

Per il lemma 2 si ha $H'K' = H'K_0 \cap H_0 K'$ e, per quanto detto sopra, tale sottogruppo è normale in G con $G/H'K'$ metabeliano. Se si suppone (come è lecito, in quanto i ruoli di H e K sono intercambiabili) $d_H \leqslant d_K$ allora, iterando il procedimento sopra esposto si ottiene $G^{(2d_H)} \leqslant K^{(d_H)}$ e siccome $K^{(d_H)}$ ha lunghezza derivata $d_K - d_H$, l'asserto è dimostrato. ■

3. Dimostrazione dei teoremi.

Dimostrazione del teorema A. Siccome I è subnormale con difetto n in H esiste una serie $I = H_n \lhd H_{n-1} \lhd \ldots H_1 \lhd H_0 = H$ da I a H; si procede per induzione su n.

Se $n = 1$ allora I è normale in H e si ha $I^G = I^{HK} = I^K$; siccome I^G è normale in G si ha $I \leqslant I^G \leqslant K_G$. Posto $\overline{G} = G/K_G$ dal lemma 1.b) discende che $\overline{H}$ e $\overline{K}$ è una coppia di di sottogruppi totalamente *sn*-permutabili di $\overline{G}$. Il lemma 4 porge $d_{\overline{G}} \leqslant d_{\overline{H}} + d_{\overline{K}}$ e dunque $d_G \leqslant (d_H + d_K) + d_K$.

Se $n > 1$ allora per il lemma 1.a) il gruppo $T = H_1 K$ è prodotto della coppia di sottogruppi mutuamente *sn*-permutabili H_1 e K. Per l'ipotesi induttiva $d_T \leqslant (n-1)\cdot(d_{H_1} + d_K) + d_K$. Siccome H_1 è normale in H si ha $H_1^G = H_1^K \leqslant T$; risulta $I \leqslant H_1^G$ e quindi, posto $\overline{G} = G/H_1^G$ e applicando i lemmi 1.b) e 4, si ottiene $d_{\overline{G}} \leqslant d_{\overline{H}} + d_{\overline{K}}$. Da questo discende immediatamente che $d_G \leqslant n\cdot(d_H + d_K) + d_K$. ■

Si osservi che la limitazione precedente alla lunghezza derivata di G è sempre migliore di quella $d_G \leqslant 2nd_H d_K + d_K$ fornita dal teorema 1 di [2].

Dimostrazione del teorema B. Si procede per induzione su c_H, la classe di nilpotenza di H.

Se $c_H = 1$ allora H è abeliano, $I^G = I^{HK} = I^K \leqslant K_G$ e dal lemma 3.c) discende che $G'' \leqslant K_G$ da cui $d_G \leqslant d_K + 2$.

Se $c_H > 1$ sia $Z = Z(H)$, allora per ipotesi $T = ZK$ è un sottogruppo di G e si ha $Z^G = Z^{HK} = Z^K \leqslant T$. In $\overline{G} = G/Z^G$ per il lemma 1.b) i sottogruppi $\overline{H}$ e $\overline{K}$ sono mutuamente sn-permutabili e si ha $c_{\overline{H}} < c_H$. L'ipotesi induttiva porge quindi $d_{\overline{G}} \leqslant (d_{\overline{K}} + 2)\cdot(c_H - 1)$.

Infine $I^T = I^{ZK} = I^K \leqslant K_T$ e utilizzando il lemma 3.c) si ottiene $T'' \leqslant$ $\leqslant K_T$ e $d_T \leqslant d_K + 2$.

Quindi $d_G \leqslant d_{\overline{G}} + d_T \leqslant (d_K + 2)\cdot c_H$. ■

Si osservi che la limitazione fornita dal teorema B non dipende dal difetto di subnormalità di I in H.

Dimostrazione del teorema C. Sia $G = HK$ con H e K mutamente sn-permutabili con H ipercentrale e K ipercentrale oppure risolubile; per dimostrare che G è iperabeliano basta esibire un sottogruppo normale abeliano di G in quanto, per il lemma 1.b) le ipotesi vengono ereditate dai quozienti di G.

Sia $Z = Z(H)$, allora per ipotesi $T = ZK$ è un sottogruppo di G e si ha $Z^G = Z^{HK} = Z^K \leqslant T$; inoltre $I^T = I^{ZK} = I^K \leqslant K_T$. Se $H_0 = T \cap H$, posto $\overline{T} = T/K_T$, il lemma 3.b) porge che $\overline{H_0}$ e $\overline{K}$ è una coppia di sottogruppi totalmente sn-permutabili di $\overline{T}$. Il sottogruppo $\overline{H_0} = ZK_T/K_T$ risulta abeliano, quindi il lemma 3.a) porge che $\overline{K}$ deve essere abeliano e dal lemma 3.c) discende $T'' \leqslant K_T$. Se K è ipercentrale si consideri il sottogruppo $W = Z^G = Z^{HK} = Z^K \leqslant T$. Se W è abeliano o metabeliano allora W o W' è un sottogruppo abeliano normale in G; altrimenti $W'' \leqslant T'' \leqslant K$ è un sottogruppo normale di G contenuto in K e $Z(W'')$ è un sottogruppo normale abeliano non banale di G. Se invece K è risolubile allora $T = ZK$ risulta risolubile (con lunghezza derivata al più $d_K + 2$: si veda il lemma 3); quindi $Z^G \leqslant T$ è un sottogruppo non triviale di G normale e risoluble e se $\delta = d_{Z^G}$ allora $(Z^G)^{(\delta - 1)} \neq \{1\}$ è abeliano e normale in G. ■

Rileggendo la dimostrazione precedente si può vedere che (mantenendo le altre ipotesi del teorema C) se H è ipercentrale e K è iperabeliano allora G deve essere subsolubile (cioé ammette una serie ascendente di sottogruppi subnormali a quozienti abeliani; tali gruppi sono detti anche SJ^*-gruppi).

Se H e K sono entrambi iperabeliani si può provare che G deve essere un SN^*-gruppo (cioé un gruppo che ammette una serie ascendente di sottogruppi a quozienti abeliani). Esistono però gruppi finitamente generati non iperabeliani che sono il prodotto di due sottogruppi normali, iperabeliani e localmente risolubili (si veda il teorema 8.19.1 di [4]).

BIBLIOGRAFIA

[1] B. Amberg - S. Franciosi - F. de Giovanni, *Products of groups*, Clarendon Press, Oxford (1992).

[2] J. C. Beidleman - A. Galoppo - H. Heineken - M. Manfredino, *On certain products of soluble groups*, Forum Math., **13** (2001), pp. 569-580.

[3] J. C. Lennox, *On the solubility of a product of permutable subgroups*, J. Austral. Math. Soc., **22** (1976), pp. 252-255.

[4] D. J. S. Robinson, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1972).

[5] S. E. Stonehewer, *Permutable subgroups of infinite groups*, Math. Z., **125** (1972), pp. 1-16.

[6] S. E. Stonehewer, *Permutable subgroups of some finite p-groups*, J. Austral. Math. Soc., **16** (1973), pp. 90-97.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 febbraio 2003.