RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MICHEL GROS

Caractères des groupes réductifs finis et $\mathcal{D}$-modules

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 106 (2001), p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_2001__106__1_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 106 (2001)

Caractères des Groupes Réductifs Finis et $\mathcal{D}$-Modules.

MICHEL GROS (*)

0. Introduction.

Soit G un groupe semi-simple défini sur la clôture algébrique d'un corps k de caractéristique p. Lusztig (cf. [24] pour une introduction (1)) a introduit une classe de faisceaux pervers sur G, les faisceaux caractères, dont l'étude est intimement (au moins pour $k = \mathbb{F}_q$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) liée à celle des représentations de $G(k)$.

Lorsque $k = \mathbb{C}$, via la correspondance de Riemann-Hilbert, on dispose d'une caractérisation microlocale (dans l'espace cotangent T^*G à G) purement géométrique ([31], thm. 4.2) des faisceaux caractères ainsi que de relations entre le «front d'onde» de leurs constituants simples et la correspondance de Springer. De plus, explicitant le système différentiel qu'est le $\mathcal{D}_G$-module cohérent correspondant à un certain faisceau caractère, on retrouve (cf. [16]) dans le cas des poids «réguliers», comme attendu, celui introduit par Harish-Chandra dans son étude des distributions invariantes sur (une forme réelle de) G (lesquelles sont solutions de ce système différentiel). Ces résultats ont des variantes (cf. par exemple [17]) concernant l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G plutôt que ce dernier.

(*) Indirizzo dell'A.: IRMAR, UMR CNRS 6625, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France. E-mail: gros@univ-rennes1.fr

Membre du programme TMR de la CEE, réseau *Arithmetic Algebraic Geometry*.

(1) À compléter par [26] pour le point de vue correspondant sur les algèbres de Lie.

Lorsque $k = \mathbb{F}_q$, Lusztig travaille avec des faisceaux l-adiques ($l \neq p$) et une grande partie de ce que l'on vient juste d'évoquer n'existe pas, au moins tel quel ([2]). La quête d'analogues p-adiques de tels objets semble donc avoir quelque intérêt y compris quand à la forme souhaitable des énoncés en théorie des $\mathcal{D}$-Modules arithmétiques ([8], [27]).

Dans ce travail, utilisant la cohomologie ridige et ces $\mathcal{D}$-Modules, nous commencons à discuter comment exhiber une partie de ce qui n'apparait pas dans le point de vue l-adique de Lusztig: explicitation de certains systèmes différentiels (qui généralisent au cas «non commutatif» ceux introduits par Dwork et réinterprétés dans [6] et [7], 5.) et aspect «microlocal».

L'exemple que nous avons choisi d'étudier est lié à la correspondance de Springer vue comme conséquence de la décomposition de faisceaux caractères sous l'action du groupe de Weyl. Si quelque chose d'analogue doit s'obtenir avec un $\mathcal{D}$-Module (équivalent d'un faisceau caractère), cela implique une décomposition de sa cohomologie de De Rham, ce qui conduit tout d'abord à réexaminer l'argument initial de Springer en substituant à la cohomologie l-adique ($l \neq p$) utilisée dans [32] la cohomologie rigide [4]. C'est l'objet de la première partie où l'on met en oeuvre plusieurs résultats récents. Du point de vue de la correspondance de Springer elle-même, nous n'obtenons rien de plus (hormis une présentation p-adique de la démonstration) que dans [32] mais ce point de vue peut être compté comme une des «évidences» pour les conjectures qui sont énoncées dans la seconde partie dans laquelle on discute aussi les propriétés de certains $\mathcal{D}$-modules et où l'on explicite pour SL_2 un analogue du système d'Harish-Chandra. Nous en profitons pour préciser, dans le cas complexe, comment sont reliés supports et fronts d'onde apparaissant dans [1] et [17] (ce point n'étant pas véritablement explicité dans loc. cit.) ([3]) d'une manière qui devrait s'appliquer à la situation p-adique.

Je remercie Bruno Chiarellotto, Bernard Le Stum et Christine Noot-Huyghe pour d'instructives discussions sur les $\mathcal{D}$-Modules et l'action de frobenius ainsi que Pascale Harinck, Thierry Levasseur et Ryoshi Hotta pour leurs réponses à mes questions ingénues sur le système d'Harish-Chandra.

([2]) Mais on a envie de récupérer de tels objets: cf. par exemple [25] et les travaux de Kawanaka cités à cet endroit.

([3]) Je tiens à remercier tout spécialement R. Hotta pour des échanges sur ces questions.

Plan

1. Réalisation p-adique de la correspondance de Springer
   1.1. La situation géométrique
   1.2. Réalisation p-adique de la représentation de Springer
   1.3. Réalisation p-adique de la correspondance de Springer
   1.4. Preuve de la correspondance de Springer
2. Réinterprétation à l'aide des $\mathcal{D}$-Modules arithmétiques
   2.1. Conjectures
   2.2. Evidences
   2.3. Le cas de SL_2

Références

Notations. Sauf mention explicite du contraire, les notations sont les suivantes: K: une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{V}$: l'anneau des entiers de K, $\mathfrak{I}$ l'idéal maximal de $\mathcal{V}$, k: le corps résiduel de K. Pour X un $\mathcal{V}$-schéma, on notera $\widehat{X}$ (resp. $X^\dagger$) le schéma formel (resp. faiblement formel) obtenu par complétion (resp. complétion faible, cf. [30]) le long de la fibre spéciale X_k de X et $\widehat{X}_K$ la fibre générique (qui est un espace analytique) de $\widehat{X}$. Pour X_K un K-schéma, on désignera par X_K^{an} l'espace analytique (sur K) associé. Si H est un groupe fini, $H^\wedge$ désignera le groupe des caractéres (complexes) irréductibles de H.

Afin de ne pas multiplier les rappels, nous renvoyons à la bibliographie pour la définition et les propriétés des objets rencontrés et les motivations.

1. Réalisation p-adique de la correspondance de Springer.

1.1. *La situation géométrique.*

Bien que cela n'apparaisse pour l'instant pas nécessaire partout, il est agréable [4] de démarrer avec des groupes réductifs (on renvoie à SGA 3 pour la théorie sur des bases générales) définis sur Spec$(\mathcal{V})$ (avec $\mathcal{V}$ comme ci-dessus) plutôt que sur Spec(k).

Soient G un $\mathcal{V}$-schéma en groupe réductif et X le $\mathcal{V}$-schéma projectif lisse de tous les sous-groupes de Borel de G, dont l'un noté B, fixé une

[4] Par exemple, dans la démonstration de la proposition 2.

fois pour toutes, nous servira à identifier X avec G/B. On fixera également T un tore maximal contenu dans B et nous noterons W le groupe de Weyl correspondant.

Les lettres $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$, ... désigneront respetivement les algèbres de Lie (c.a.d les espaces tangents en l'élément neutre) de $G, B, T, \ldots$ et $\mathcal{G}', \mathcal{B}', \mathcal{T}', \ldots$ les duaux $\mathcal{V}$-linéaires de $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$, ... On notera Ad la représentation adjointe de G sur $\mathcal{G}$, Ad$'$ sa contragrédiente et $\mathcal{T}'_0$ l'ouvert (supposé non vide) des éléments fortement réguliers (c.a.d. les $X' \in \mathcal{T}'$ dont le centralisateur $Z_G(X') := \{x \in G \mid \mathrm{Ad}'(x)X' = X'\}$ est un tore) dans $\mathcal{T}'$.

Nous considérerons dans la suite les morphismes suivants: $f: \mathbb{A}^1_{\mathcal{V}} \times \times G/T \times \mathcal{T}'_0 \to X \times \mathcal{T}'_0$ définie par $f(x, gT, A') := (gBg^{-1}, A')$ (cette flèche dépend du choix de B, lettre que nous ferons réapparaitre en indice de f lorsque cela sera nécessaire), $p := pr_2 : X \times \mathcal{T}'_0 \to \mathcal{T}'_0$, $\pi := p \circ f : \mathbb{A}^1_{\mathcal{V}} \times \times G/T \times \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}'_0$.

L'action du groupe de Weyl $W := \mathrm{N}_G(T)/\mathrm{C}_G(T)$ sur $\mathbb{A}^1_{\mathcal{V}} \times G/T \times \mathcal{T}'_0$ est définie par $w.(x, gT, A') := (x, g\tilde{w}^{-1}T, w.A')$ pour $w \in W$ représenté par $\tilde{w} \in \mathrm{N}_G(T) := \{x \in G \mid xTx^{-1} = T\}$ faisant ainsi de π un morphisme W-équivariant.

On notera, comme dans [17], $\tilde{\mathcal{G}} := \{(x, \mathcal{B}') \in \mathcal{G} \times X \mid x \in \mathcal{B}'\}$ la variété d'incidence (X étant maintenant vu comme classifiant toutes les sous-algèbres de Borel $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{G}$) et $\varrho : \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ la projection canonique qui est un morphisme propre. Les fibres de la réduction modulo $\mathfrak{J}$ de ϱ sont les variétés notées $\mathcal{B}^{\mathcal{G}}_A$ dans [32], 3.2. D'autre part, si $\mathcal{U}$ désigne le radical nilpotent de $\mathcal{B}$, on a un morphisme lisse $\theta : \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{T}$ par $\theta(x, g\mathcal{B}) := g^{-1}x$ mod $\mathcal{U}$ pour $g \in G$.

1.2. *Réalisation p-adique de la représentation de Springer.*

Ce qui suit est une variante du 3 et 4 de [32]. Fixons ψ un caractère additif non trivial de $k = \mathbb{F}_q$ et reprenons une situation relevée sur $\mathcal{V}$ (l'anneau des entiers d'une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel k) comme précédemment.

Afin de ne pas trop alourdir les notations, on soulignera les $\mathcal{V}$-schémas et les morphismes entre ceux-ci pour signifier qu'on les réduit modulo $\mathfrak{J}$ ou même parfois simplemement parce que l'on est dans une situation géométrique modulo $\mathfrak{J}$.

Fixons $A \in \mathcal{G}(\mathcal{V})$ nilpotent et soit $\mathcal{Y}_A$ le sous-schéma fermé des

$(x, gT, A') \in \mathbb{A}^1_{\mathcal{V}} \times G/T \times \mathcal{C}'_0$, stable par l'action de W, défini par l'équation

$$x^q - x = \langle A, \mathrm{Ad}'(g)\, A' \rangle \tag{1}$$

avec $\langle .,. \rangle$ l'accouplement canonique entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ et Ad$'$ la contragrédiente de la représentation adjointe Ad de G sur $\mathcal{G}$.

Notons encore π la restriction de π à $\mathcal{Y}_A$ (de même pour les autres morphismes qui apparaitront plus bas) et, pour A' un élément de $\mathcal{C}'_0(\mathcal{V})$, définissons le sous-schéma fermé $Y_{A,A'}$ de $\mathcal{Y}_A$ comme étant celui obtenu par changement de base via la section $\mathcal{V} \to \mathcal{C}'_0$ que définit A'. Tout ceci se résume dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
Y_{A,A'} & \longrightarrow & \mathcal{Y}_A & \hookrightarrow & \mathbb{A}^1_{\mathcal{V}} \times G/T \times \mathcal{C}'_0 \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow \\
X & \longrightarrow & X \times \mathcal{C}'_0 & \longrightarrow & X \times \mathcal{C}'_0 \\
{\scriptstyle g}\big\downarrow & & {\scriptstyle g}\big\downarrow & & {\scriptstyle g}\big\downarrow \\
\mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{C}'_0 & \longrightarrow & \mathcal{C}'_0
\end{array} \tag{2}$$

On s'intéresse dans la suite à la partie ψ-isotypique (k agit sur les schémas en question) de la cohomologie rigide (5) à support compact des fibres $\underline{Y}_{A,A'}$ de $\underline{\pi}$. On va voir que cette cohomologie ne dépend pas du choix de $\underline{A}'$ et que la valeur commune de ces groupes s'exprime plus simplement à l'aide de la cohomologie rigide de $\underline{X}^A$ avec X^A le $\mathcal{V}$-sous-schéma de X des sous-groupes de Borel dont l'algèbre de Lie contient A.

Si l'on essaye de transposer les arguments de [32] dans le cadre de la cohomologie rigide, on voit immédiatement que l'on ne dispose pas pour l'instant d'un analogue p-adique développé (on s'attend à ce que cet analogue soit la cohérence sur les anneaux d'opérateurs différentiels dont il sera question au 2) de la notion de constructibilité des faisceaux de cohomologie l-adique relative à support propre du morphisme f et du formalisme de suite spectrale de Leray [22]. Toutefois, la stratification «trivialisant» ceux-ci est ici explicite (ainsi que la trivialisation) et la situation géométrique au-dessus de celle-ci très favorable. On va utiliser ces

(5) Rappelons que des résultats récents de Berthelot-De Jong [9], [10] et de Mebkhout [29] permettent d'assurer la finitude sur K de ces groupes de cohomologie et de ceux qui interviendront dans la suite.

points et leurs corollaires pour adapter les dévissages de [32] au cadre p-adique.

Soient i l'immersion fermée canonique de $\underline{f}^{-1}(\underline{X}^A)$ (sur lequel k agit, permettant de considérer les parties ψ-isotypiques de la cohomologie dans le lemme ci-dessous) dans $\underline{Y}_{A,A'}$ et $\mathcal{U}$ l'ouvert complémentaire.

LEMME 1. Le morphisme canonique i^*

$$H_c^i(\underline{Y}_{A,A'}/K)_\psi \to H_c^i(\underline{f}^{-1}(\underline{X}^A)/K)_\psi \tag{3}$$

est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION Utilisant la suite exacte longue de cohomologie à support propre, on voit immédiatement qu'il suffit de vérifier que $H_c^i(\mathcal{U}/K)_\psi = 0$ pour tout i, soit encore, en réitérant l'utilisation de cette suite, qu'il suffit de vérifier cette assertion en remplaçant $\mathcal{U}$ par un ouvert assez petit d'une famille finie recouvrant ce dernier. Au-dessus de $\underline{X} - \underline{X}^A$, on obtient comme dans la démonstration de [32], 3.5 que le morphisme $\underline{f}$ est une fibration locale en espaces affines. On prend alors une trivialisation de ce fibré et l'on est ramené à prouver l'assertion avec $\mathcal{U}$ remplacé par un ouvert $\mathcal{U}'$ tel que $\underline{f}$ soit une fibration affine triviale au-dessus d'un ouvert $\mathcal{U}''$ de $\underline{X}$. Finalement, on a $\mathcal{U}' = \mathcal{U}'' \times \mathbb{A}^d$ avec comme action de k la translation sur une des coordonnées. On applique maintenant la formule de Künneth ([10], thm. 3.2) pour la cohomologie rigide à support propre de $\mathcal{U}'$. Celle-ci fait apparaitre la cohomologie à support compact de $\mathbb{A}^d$ qui est nulle en degré différent de $2d$ et égale à K en degré $2d$. Comme l'action (fonctorielle) de k sur ce dernier groupe est triviale et que ψ ne l'est pas, la partie ψ-isotypique de cette cohomologie est nulle. D'où le lemme.

L'étude de $H_c^i(\underline{Y}_{A'}^A/K)_\psi$ se ramène donc à celle de $H_c^i(\underline{f}^{-1}(\underline{X}^A)/K)_\psi$.

PROPOSITION 2. Il existe un isomorphisme canonique

$$H_c^i(\underline{f}^{-1}(\underline{X}^A)/K)_\psi \to H_{rig}^{i-2d}(\underline{X}^A/K) \tag{4}$$

et, par suite, un isomorphisme canonique (un fois fixé [6] B qui intervient

[6] Un examen de la démonstration révélera que B n'intervient en fait que via sa réduction $\underline{B}$, ce que nous faisons apparaitre dans la notation qui va suivre.

via f_B) pour tout i

$$\alpha^i_{\underline{B}}: H^i_c(\underline{Y}_{A,A'}/K)_\psi \xrightarrow{\sim} H^{i-2d}_{rig}(\underline{X}^A/K). \tag{5}$$

Démonstration. Introduisons l'ensemble des couples de Killing de G, que l'on identifie à G/T, puis l'application $\varrho : G/T \to X$ définie par $\varrho(gT) = gBg^{-1}$ et notons Y le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^1_{\mathfrak{V}}$ d'équation $x^q - x = 0$. Comme il est expliqué dans [32], démonstration de 4.1, le fait que $\mathrm{Ad}\,(g)^{-1}A$ soit nilpotent implique que l'on a un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(X^A) & \longrightarrow & G/T \times Y, \\ {\scriptstyle g}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varrho\circ pr_1} \\ X^A & \longrightarrow & X \end{array} \tag{6}$$

et, dans celui-ci réduit modulo $\mathfrak{I}$, l'action de k sur $\underline{G/T} \times \underline{Y}$ est simplement donnée par l'action canonique par translation sur x sur le second facteur.

Utilisant cette remarque et la formule de Künneth pour la cohomologie à support propre, on voit que la proposition revient à démontrer que l'on a pour tout i un isomorphisme canonique

$$H^i_c(\underline{\varrho}^{-1}(\underline{X}^A)/K) \xrightarrow{\sim} H^{i-2d}_{rig}(\underline{X}^A/K). \tag{7}$$

Soit $\mathcal{U}$ l'ouvert auxiliaire (ce n'est pas le même que dans la démonstration précédente) complémentaire de $\varrho^{-1}(X^A)$ dans G/T. Pour prouver la proposition, grâce à la suite exacte longue pour la cohomologie à support propre, on voit qu'il suffit de prouver que l'on a des isomorphismes canoniques pour tout i

$$H^i_c((\underline{G/T})/K) \simeq H^{i-2d}(\underline{X}/K); \quad H^i_c(\underline{\mathcal{U}}/K) \simeq H^{i-2d}((\underline{X} - \underline{X}^A)/K) \tag{8}$$

De plus, chacun des schémas étant lisse, il suffit de vérifier (par dualité de Poincaré), les assertions pour les duaux K-linéaires, c'est à dire de prouver que les morphismes images inverses de fonctorialité $\varrho^*: H^i(\underline{X}/K) \to H^i_c((\underline{G/T})/K)$ et $\varrho^*: H^i((\underline{X} - \underline{X}^A)/K \to H^i_c(\underline{\mathcal{U}}/K)$ sont des isomorphismes. Si l'on considère le recouvrement ouvert de $\underline{X}$ par les grosses cellules, sa restriction à $\underline{X} - \underline{X}^A$ et les images inverses par ϱ de ceux-ci, on a des suites spectrales de Cech compatibles à la flèche ϱ^* et aboutissant aux groupes ci-dessus si bien qu'il suffit de vérifier l'assertion d'isomorphisme au-dessus d'une grosse cellule ou de l'intersection d'un nombre fini d'entres elles (la cohomologie rigide de celles-ci et des images inverses par ϱ constituant les termes E_1 de ces suites spectrales). Comme au dessus d'une telle intersection, la fibration ϱ est une fibration triviale en espace affine $\mathbb{A}^d$, l'assertion résulte de la formule de Künneth et de la cohomologie de $\mathbb{A}^d$ (=0 sauf en degré 0 où elle vaut K).

Pour construire la représentation de Springer, on remarque maintenant que $w \in \underline{W}$ envoie $\underline{Y}_{A,A'}$ dans $\underline{Y}_{A,w.A'}$ et induit donc une application $\varrho^{i-2d}(w): H_c^i(\underline{Y}_{A'}^A/K)_\psi \to H_c^i(\underline{Y}_{w.A'}^A/K)_\psi$. Cette application est donc celle qui vérifie $\alpha_{w.\underline{B}}^i = \alpha_{\underline{B}}^i \circ \varrho^i(w)^{-1}$. Soit F le morphisme de frobenius $x \to x^q$ sur $\underline{X}$ et $w \in \underline{W}$ tel que $F\underline{B} = w.\underline{B}$.

LEMME 3. On a $q^d F^\star \alpha_{\underline{B}}^i = \alpha_{\underline{B}}^i F^\star \varrho^i(w)$.

DÉMONSTRATION. Elle est laissée au lecteur (il faut suivre pas à pas les flèches à travers les isomorphismes utilisés).

Dans la suite ce sont les représentations $r_{\underline{B}}^i$ de $\underline{W}$ dans les $H_{rig}^i(\underline{X}^A/K)$ définies par $r_{\underline{B}}^i(w) := \alpha_{\underline{B}}^i \circ \varrho^i(w) \circ \alpha_{\underline{B}}^{i-1}$ qui vont intervenir.

1.3. *Réalisation p-adique de la correspondance de Springer,*

Soient toujours $\underline{A} \in \mathcal{G}(k)$ nilpotent comme ci-dessus, $Z := Z_{\underline{G}}(\underline{A})$ son centralisateur, Z^0 la composante connexe de celui-ci et $C(\underline{A}) := Z/Z^0$ le quotient. On peut faire agir Z sur $\underline{\mathcal{Y}}^A$ par $z.(x, g\underline{T}, \underline{A}') := (x, zg\underline{T}, \underline{A}')$ pour $z \in Z$, action qui induit donc une action sur les fibres de π et finalement sur $H^{2e(\underline{A})}(\underline{X}^A/K)$.

LEMME 4. La restriction à Z^0 de cette action de Z sur $H^{2e(\underline{A})}(\underline{X}^A/K)$ est triviale.

DÉMONSTRATION. On remarque tout d'abord que $\mathcal{Y}^A$ est un sous-schéma fermé du k-schéma lisse $\mathbb{A}_k^1 \times \underline{G/T} \times \underline{\mathcal{C}}_0'$ sur lequel l'action de Z se prolonge. Il suffit donc de prouver que cette action est triviale sur le dual K-linéaire $H_{\underline{\mathcal{Y}}^A}^\star((\mathbb{A}_k^1 \times \underline{G/T} \times \underline{\mathcal{C}}_0')/K)$ de $H_c^\star(\underline{\mathcal{Y}}^A/K)$. On peut alors conclure par le même argument que dans [14], 6.4: on substitue $\mathbb{A}_k^1 \times \underline{G/T} \times \underline{\mathcal{C}}_0'$ et Z^0 au Y et au H de loc. cit. et, au lieu de la cohomologie relative à support compact de π, on considère ici la cohomologie rigide relative à support dans $Z^0 \times \mathcal{Y}^A$ qui est un cristal constant (module à connexion triviale) de valeur $H_{\underline{\mathcal{Y}}^A}^\star((\mathbb{A}_k^i \times \underline{G/T} \times \underline{\mathcal{C}}_0')/K)$. Comme par ailleurs on sait que la cohomologie rigide d'un schéma connexe est de dimension 1 en degré 0, on conclut comme dans [14].

Si l'on prolonge l'action de $C(\underline{A})$ sur $\underline{\mathcal{C}}_0' \times \underline{X}$ en décidant qu'elle est triviale sur $\underline{X}$, cette action commute à $f_{\underline{B}}$, si bien qu'utilisant l'isomorphisme

$\alpha^\star_{\underline{B}}$, on obtient une représentation $s_{\underline{B}}$ de $C(\underline{A})$ sur $H^{2e(\underline{A})}(\underline{X}^A/K)$ qui commute avec $r_{\underline{B}}$.

Pour $\phi \in C(\underline{A})^\frown$, on notera $V(\underline{A}, \phi)$ la composante ϕ-isotypique de $H^{2e(\underline{A})}(\underline{X}^A/K)$, et, pour les $\phi \in C(\underline{A})^\frown$ tels que $V(\underline{A}, \phi) \neq 0$, soit $\chi_{\underline{A},\phi}$ le caractère de $\underline{W}$ tel que $\phi \otimes \chi_{\underline{A},\phi}$ soit le caractère de la représentation de $C(\underline{A}) \times \underline{W}$ sur $V(\underline{A}, \phi)$.

Soit Σ l'ensemble des paires $(\underline{A}, \phi)$ avec $\underline{A} \in \mathcal{G}(k)$ nilpotent et $\phi \in C(A)^\frown$ tels que $V(A, \phi) \neq 0$ et $2e(\underline{A}) = \dim Z_{\underline{G}}(\underline{A}) - \mathrm{rg}(\underline{G})$.

Le groupe $\underline{G}$ agit sur Σ à gauche et $(\underline{A}, \phi) \to \chi_{\underline{A},\phi}$ définit une application $\xi : \underline{G}\backslash\Sigma \to \underline{W}^\frown$.

A partir de maintenant, nous faisons les mêmes hypothèses que dans [32], 6.9 (ie. le nombre p est fini, etc,...: cela fournit nombre d'exemples pour lesquels les questions du 2 se posent dans toute leur généralité).

PROPOSITION 5 («Correspondance de Springer»). Sous ces hypothèses, la flèche $\xi : \underline{G}\backslash\Sigma \to \underline{W}^\frown$ est une bijection.

1.4. *Preuve de la correspondance de Springer.*

C'est le même principe d'estimations de sommes trigonométriques que dans [32] que nous allons utiliser. La somme trigonométrique qui intervient est la suivante:

$$S(\underline{A}, \underline{A}') := \sum_{X' \in \underline{O}(\underline{A}')(k)} \psi(\langle A, X'\rangle) \tag{9}$$

pour $\underline{A} \in \mathcal{G}(k)$, $\underline{A}' \in \mathcal{G}'(k)$, $\underline{O}(\underline{A})$ l'orbite de $\underline{A}$ pour l'action adjointe Ad de $\underline{G}$ dans $\mathcal{G}$ et intervient dans les fonctions de Green $\underline{A} \to Q_{\underline{T},\underline{G}}(\underline{A})$ définies comme dans [32], 5.1.

Pour appliquer la méthode suivie par Springer, il suffit de remarquer d'une part que l'analogue de [32], 1.3 est vrai pour la cohomologie rigide, d'après [6], prop. 1.5 et d'autre part que la formule des traces [15] pour le schéma $\underline{Y}_{A,A'}$ dit que l'on a une égalité

$$S(\underline{A}, \underline{A}') = \sum_{i \geq 0} \mathrm{Tr}(F^\star\colon H^i_c(\underline{Y}_{A,A'}/K)). \tag{10}$$

On sait également que sur $H^{2e(\underline{A})}_c(\underline{Y}_{A,A'}/K))$, $F^\star$ agit par multiplication par $q^{2e(\underline{A})}$.

Utilisant maintenant que la fonction $Q_{\underline{T},\underline{G}}(\underline{A}_1)$ de [32], lemme 6.6, vue comme fonction de q est, modulo les puissances de q supérieures ou égales à $e(\underline{A})$ un $O(q^{e(\underline{A})-1/2})$, on en déduit l'analogue du lemme 6.6 avec, à la place de la cohomologie l-adique, la cohomologie rigide, ie. $Q_{\underline{T},\underline{G}}(\underline{A}_1) = = (-1)^{r(\underline{G})-r(\underline{T})} q^{e(\underline{A})} \mathrm{Tr}(s_{\underline{A}}(c)\, r_{\underline{A}}(w)^{-1}: H^{2e(\underline{A})}(\underline{X}^A/K) + O(q^{e(\underline{A})-1/2})$.

Cette estimation suffit (compte tenu des propriétés des fonctions de Green établies dans [32]) pour terminer la preuve de la bijectivité de ξ comme dans loc. cit..

2. Réinterprétation à l'aide des $\mathcal{D}$-Modules arithmétiques.

2.1. *Conjectures.*

Dans la suite, pour tout $\mathcal{V}$-schéma lisse U, nous utiliserons l'anneau des opérateurs différentiels $\mathcal{D}^{\dagger}_{U^{\dagger}\mathbb{Q}} := \mathcal{D}^{\dagger}_{U^{\dagger}/\mathcal{V}} \otimes \mathbb{Q}$ sur $U^{\dagger}$ introduit dans [27], § 4. Lorsque U est le complémentaire d'un diviseur ample (7) Z d'un $\mathcal{V}$-schéma propre et lisse X, on sait dès à présent, comme explicité dans [20], thm. 4.5.2, relier cette théorie à celle de l'anneau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}\widehat{Z})$ introduit dans [8]. Des propriétés importantes (théoriquement équivalentes via [20]) de ces «deux» théories (ie. de ces deux approches) sont annoncées de part et d'autre ([11], [28]): on utilisera donc pour l'instant le conditionnel dans l'énoncé des déductions au 2.2.

On va également être amené à considérer divers schémas, schémas formels, schémas faiblement formels au-dessus de $\mathcal{V}$ qui sera soit $\mathbb{Z}_p$ soit le même $\mathcal{V}$ que dans [7], 5.2 muni de son relèvement de frobenius standard ([6], 1.). Je supposerais, à chaque fois que cela est sous-entendu par une notation (par exemple dans les conjectures ci-dessous), qu'ils sont munis d'un relèvement de frobenius compatible à celui fixé sur $\mathcal{V}$ qui sera noté uniformément F (8).

Fixons $A' \in \mathcal{T}'_0$ et notons $\mu_{A'}: \mathcal{T} \times \mathcal{T}' \to \mathbb{A}^1_{\mathcal{V}}$ la flèche ainsi définie (avec μ l'accouplement naturel). Cette flèche s'insère dans le diagramme

$$\mathbb{A}^1_{\mathcal{V}} \xleftarrow{\mu_{A'}} \mathcal{T} \xleftarrow{\theta} \widetilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{\varrho} \mathcal{G}. \tag{11}$$

Pour ψ un caractère additif non trivial de k fixé (comme ci-dessus), rappelons que l'on dispose sur $\widehat{\mathbb{P}}'_{\mathcal{V}}$ d'un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{\mathbb{P}}'_{\mathcal{V}}\mathbb{Q}}({}^{\dagger}\infty)$-module noté $\mathcal{L}_{\psi}$ (cf. aussi [6], 1.), que l'on peut voir (d'après [20], thm. 4.5.2) comme un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbb{A}^{1\dagger}_{\mathcal{V}}}$-

(7) Cette propriété d'amplitude est conjecturalement inutile.

(8) On ne suppose évidemment pas que les flèches entre deux tels schémas sont compatibles à de tels relèvements: cette condition devrait d'ailleurs être inutile, comme annoncé dans la remarque faite juste après (2.4.6.4) de [11].

module (on pourrait aussi construire directement $\mathcal{L}_\psi$ comme tel module).

On s'intéresse dans la suite à [9]

$$\mathcal{F}_{\psi,A'} := \widehat{\varrho}_+ \widehat{\theta}^! \widehat{\mu_{A'}}^! \mathcal{L}_\psi \tag{12}$$

que l'on verra comme un objet dans la catégorie dérivée des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{G}^\dagger \mathbb{Q}}$-Modules.

Soit F un relèvement de frobenius sur $\mathcal{G}^\dagger$. La notion de $F - \mathcal{D}_{\widehat{\mathcal{G}}\mathbb{Q}}$-Module (ie. l'existence d'un isomorphisme $F^! \mathcal{M} \simeq \mathcal{M}$) holonome, au sens de [11], 5.3.5 se transpose telle quelle au cadre des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{G}^\dagger \mathbb{Q}}$-modules.

Conjecture 6. (i) $\mathcal{F}_{\psi,A'}$ (vu comme complexe) est concentré en degré 0, à support contenu dans $\underline{\mathcal{G}_0}$ et peut être canoniquement muni d'une structure de $F - \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{G}^\dagger \mathbb{Q}}$-Module holonome.

(ii) Enoncé analogue à (i) pour $\widehat{\varrho}_+ O_{\widehat{\varrho}^{-1}(\mathcal{N}^\dagger)}$.

(iii) Soit $\mathcal{N}$ le cône nilpotent de $\mathcal{G}$, la restriction $\mathcal{F}_{\psi,A'} \,|\mathcal{N}$ de $\mathcal{F}_{\psi,A'}$ à $\mathcal{N}$ est canoniquement isomorphe à $\widehat{\varrho}_+ O_{\widehat{\varrho}^{-1}(\mathcal{N}^\dagger)}$ (rappelons ici que $\varrho^{-1}(\mathcal{N})$ s'identifie au fibré cotangent $T^\star X$ de X).

(iv) $\widehat{\varrho}_+ O_{\widehat{\varrho}^{-1}(\mathcal{N}^\dagger)}$ peut canoniquement être muni d'une action de $\underline{W}$ telle que l'on ait une décomposition

$$\widehat{\varrho}_+ O_{\widehat{\varrho}^{-1}(\mathcal{N}^\dagger)} = \oplus_{\chi \in \underline{W}^\frown} V_\chi \otimes N(\chi)$$

avec $N(\chi)$ un $F - \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{G}^\dagger \mathbb{Q}}$-Module holonome simple.

(v) le support de $N(\chi)$ s'identifie à l'adhérence $O(\chi)$ de l'orbite nilpotente $O(\chi)$ associée à χ par la correspondance de Springer.

Indiquons également quelques aspects de la situation correspondante pour les groupes. Soient donc G un groupe algébrique défini [10] sur $\mathcal{V} = \mathbb{Z}_p$ d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et T un tore maximal de G d'algèbre de Lie $\mathcal{T}$. On dispose aussi comme ci-dessus d'un diagramme (θ et ϱ sont analogues à ceux-ci dessus et nous conservons donc cette notation)

$$T \xleftarrow{\theta} \widetilde{G} \xrightarrow{\varrho} G \tag{13}$$

[9] Les images directes et inverses au sens des $\mathcal{D}^\dagger$-Modules de [27] sont définis par des formules proches de celles du cas complexe, cf. loc. cit. 4.3: ce que nous notons ici $\widehat{\varrho}_+$, $\widehat{\theta}^!$ correspond respectivement aux $\widehat{\varrho}^c_\star$, $\widehat{\theta}^\star$ de loc. cit.

[10] On peut étendre les scalaires si besoin est.

La donnée d'un caractère multiplicatif μ de $k^\times$ définit (on peut procéder via le même chemin que pour ψ ci-dessus en utilisant [7], prop. 5.1.2 (ii), réinterprété dans [11] fin de 5.3.6, puis [20] ou refaire une construction) un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathbb{G}_m{}^\dagger\mathbb{Q}}$-Module cohérent $\mathcal{K}_\mu$, si bien que pour tout caractère $\lambda \in$ $\in \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$, on dispose d'un $\mathcal{D}^\dagger_{T^\dagger\mathbb{Q}}$-Module $\mathcal{L}_\mu := \lambda^! \mathcal{K}_\mu$. On définit alors

$$K_T^{\mathcal{L}_\mu} := \widehat{\varrho}_+ \widehat{\theta}^! \mathcal{L}_\mu. \tag{14}$$

C'est l'analogue $\mathcal{D}^\dagger$-Module d'un faisceau caractère et l'on peut conjecturer l'analogue de (iii) et (iv) ci-dessus, c'est à dire:

CONJECTURE 7. $K_T^{\mathcal{L}_\mu}$ est concentré en degré 0 et peut être canoniquement muni d'une structure de $F-\mathcal{D}^\dagger_{G^\dagger\mathbb{Q}}$-Module holonome ainsi que d'une action de $\underline{W}$ telles que l'on ait une décomposition

$$K_T^{\mathcal{L}_\mu} = \oplus_{\chi \in \underline{W}^\wedge} V_\chi \otimes M(\chi, \underline{\mu})$$

avec $M(\chi, \underline{\mu})$ un $F-\mathcal{D}^\dagger_{G^\dagger\mathbb{Q}}$-Module holonome simple.

Le même procédé (cf. [11], 5.2) que celui qui permet de définir la variété caractéristique d'un $F-\mathcal{D}^\dagger_{\widehat{G}\mathbb{Q}}$-Module devrait permettre de définir ([28]) la variété caractéristique (¹¹) $Car(\mathcal{M})$ $(\subset T^\star \underline{G})$ d'un $F-\mathcal{D}^\dagger_{G^\dagger\mathbb{Q}}$-Module $\mathcal{M}$.

CONJECTURE 8. Le front d'onde $FO(M(\chi, \underline{\mu})) := Car(M(\chi, \underline{\mu})) \cap$ $\cap\, T_e^\star \underline{G} \subset T_e^\star \underline{G} \simeq \mathcal{G}^\star \simeq \mathcal{G}$ de $M(\chi, \underline{\mu})$ s'identifie à l'adhérence de l'orbite nilpotente associée à χ par la correspondance de Springer (¹²).

2.2. *Evidences.*

On peut tout d'abord mentionner la théorie correspondante sur $\mathbb{C}$ ([16], [17],...) et les résultats de Lusztig utilisant le formalisme l-adique ($l \neq p$). Voyons donc ce que l'on peut «potentiellement» (des références complètes faisant pour l'instant défaut) dire dès à présent dans le cadre p- adique.

On remarque que l'on peut démontrer (par le même argument que dans [19]) que bien que $\mu_{A'}$ ne soit pas lisse, $\widehat{\mu_{A'}}^! \mathcal{L}_\psi$ est bien un $F-$

(¹¹) Pour l'intérêt qu'aurait son étude dans le cadre présent, on renvoie à la situation sur $\mathbb{C}$: [31], thm. 4.2.

(¹²) Cf. [17] pour une description de l'analogue de $Car(M(\chi, \underline{\mu}))$ sur $\mathbb{C}$.

– $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{G}^{\dagger}\mathbb{Q}}$-Module cohérent. La préservation de la cohérence et la compatibilité à F par image inverse lisse et par image directe propre qui devrait (communication personnelle) figurer dans [28] (l'annonce du résultat qui devrait lui correspondre, via [20], figure également, sous une forme affaiblie, dans [11], 5.1.2) impliquerait donc que $\mathcal{F}_{\psi, A'}$ est un $F-\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{G}^{\dagger}\mathbb{Q}}$-complexe à cohomologie cohérente.

Le même type d'arguments permettrait d'en déduire le résultat analogue pour $K_T^{\mathcal{L}_\mu}$ (et par suite de construire des fonctions centrales sur $G(k)$ analogues à celles étudiées par Luszitg).

Pour l'action de $\underline{W}$ requise dans (iv), rappelons que sur la restriction de $\widehat{\varrho}_+ O_{\widehat{\varrho}^{-1}(\mathcal{N}^{\dagger})}$ à l'ouvert de Zariski $\mathcal{G}_{rs}$ des éléments réguliers semi-simples de $\mathcal{G}$, elle peut être construite par fonctorialité (c'est l'extension à $\mathcal{G}$ tout entier qui pose problème) avec le point de vue développé dans [27] (ce qui n'est pas établi avec le point de vue développé dans [11]).

Les variétés rencontrées dans la première partie sont singulières, c'est donc le dual (ie. la cohomologie, à support dans ces dernières, de variétés de propres et lisses les contenant) de leur cohomologie rigide qui doit apparaitre comme cohomologie de De Rham de $\mathcal{D}^{\dagger}$-Modules. Soient donc $\mathcal{Z}$ le revêtement d'Artin-Schreier de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{Y}$ le schéma au-dessus de $\widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{T}'$ obtenu par le changement de base $\mu \circ (\theta \times Id)$. Si maintenant l'on fixe $A \in \mathcal{G}(\mathcal{V})$ (de réduction modulo $\mathfrak{I}$ nilpotente définissant un sous-schéma fermé de $\underline{\mathcal{G}}$ noté $\underline{A}$ si l'on veut être en accord avec ce qui précède), on obtient par changement de base un schéma au-dessus de $\mathcal{T}'$ qui, au-dessus de $\mathcal{T}'_0$ n'est autre que le schéma $\mathcal{Y}_A$ précédent. Utilisant ceci, on peut aisément se convaincre que le lien avec la première partie devrait être le suivant. Considérons $DR(\mathcal{F}_{\psi, A'})$ le complexe de De Rham du $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{G}^{\dagger}\mathbb{Q}}$-Module $\mathcal{F}_{\psi, A'}$, alors on a un isomorphisme entre groupes de cohomologie à support

$$H^{\star}_{\underline{A}}(\underline{\mathcal{G}}, DR(\mathcal{F}_{\psi, A'})) \simeq H^{\star}_{\underline{Y}_{A,A'}}(\underline{\mathcal{Y}}_A/K)_{\psi}. \tag{15}$$

Compte tenu de l'accouplement parfait de dualité entre $H^{\star}_{\underline{Y}_{A,A'}}(\underline{\mathcal{Y}}_A/K)$ et $H^{\star}_c(Y\mathcal{U}_{A,A'}/K)$, les propriétés de cette cohomologie à support compact vues dans la première partie devraient être conséquences (par passage à la cohomologie de De Rham) des assertions contenues dans la conjecture 6 ci-dessus.

Comme il a été dit plus haut, l'une des motivations pour nous de l'introduction des $F-\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbb{Q}}$-Modules dans ces questions est de récupérer des objets microlocaux tels un «front d'onde» (en caractéristique $p>0$). Nous allons, dans le cas complexe et dans un cas particulier significatif, donner une démonstration de la façon de déduire la conjecture 8 à partir de (iv) de la conjecture 6 en des termes géométriques qui devraient s'appliquer à la situation p-adique (pour ce dont on a besoin, modulo quelques hypothèses supplémentaires, la situation en caractéristique $p > 0$ est essentiellement aussi bonne que sur $\mathbb{C}$: cf. par exemple [2], § 9). Dans cette fin de section, je reprendrais par commodité essentiellement les notations de [17] et identifierais une algèbre de Lie à son dual comme dans loc. cit.

Soient donc G un groupe semi-simple connexe complexe et T un tore maximal (contenu dans un sous-groupe de Borel B), $\mathcal{G}$ et $\mathcal{T}$ les algèbres de Lie correspondantes, W le groupe de Weyl.

PROPOSITION 8. Pour $G/\mathbb{C}$ comme ci-dessus, la conjecture(13) 8 est conséquence de la conjecture 6 (v).

DÉMONSTRATION. On pose $\tilde{G} := \{(x, gB) \in G \times G/B;\ x \in gBg^{-1}\}$; $\tilde{\mathcal{G}} := \{(x, gB) \in \mathcal{G} \times G/B;\ x \in \mathrm{Lie}(gBg^{-1})\}$ muni de leurs projections évidentes $p : \tilde{G} \to G$ et $\varrho : \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$. Le corollaire 1.3.2 de [16] fournit, via la correspondance de Riemann-Hilbert, une décomposition (le premier isomorphisme entre le complexe $p_+ O_{\tilde{G}}$ et son faisceau de cohomologie de degré 0 $\underline{H}^0(p_+ O_{\tilde{G}})$ vient de ce qu'il est concentré en degré 0)

$$p_+ O_{\tilde{G}} \simeq \underline{H}^0(p_+ O_{\tilde{G}}) = \oplus_{\chi \in W^\frown} V_\chi \otimes N(\chi).$$

Le même type de considération (cf. [17]) donne aussi une décomposition

$$\varrho_+ O_{\tilde{\mathcal{G}}} \simeq \underline{H}^0(\varrho_+ O_{\tilde{\mathcal{G}}}) = \oplus_{\chi \in W^\frown} \mathcal{V}_\chi \otimes \mathcal{N}(\chi).$$

Pour la topologie complexe usuelle, on peut maintenant choisir un voisinage U de 0 dans $\mathcal{G}$ tel qu'il existe exp: $U \xrightarrow{\sim} \exp U$ avec $\exp U$ voisinage de 1 dans G et $\varrho^{-1} U \xrightarrow{\sim} \exp^{-1} U$. Pour la restriction de l'analytification des $\mathcal{D}$-Modules ci-dessus, on a donc un isomorphisme

$$(\underline{H}^0(\varrho_+ O_{\tilde{\mathcal{G}}})\,|_U)_{\mathrm{an}} \simeq \exp^\star(\underline{H}^0(p_+ O_{\tilde{G}})\,|_{\exp U})_{\mathrm{an}},$$

d'où par suite

$$(N(\chi)\,|_U)_{\mathrm{an}} \simeq \exp^\star(\mathcal{N}(\chi)\,|_{\exp U})_{\mathrm{an}}.$$

(13) Il s'agit bien évidemment des énoncés analogues pour $G/\mathbb{C}$ et qui sont en fait dans ce cas des théorèmes.

Ce qui ramène la question à calculer $Car_0(\mathcal{N}(\chi)) := Car(\mathcal{N}(\chi)) \cap \cap T_0 \mathcal{G}$ (les variétés caractéristiques étant invariantes par le foncteur d'analytification).

Indépendamment, le théorème 5.3 de [17] est celui qui fournit la correspondance de Springer: on a, comme ci-dessus une décomposition (avec $q : T^\star X \to \mathcal{G}$ l'application canonique intervenant dans la résolution de Springer)

$$q_+ O_{T^\star X} \simeq \underline{H}^0(q_+ O_{T^\star X}) = \oplus_{\chi \in W^\wedge} \mathcal{W}_\chi \otimes \mathcal{M}(\chi)$$

avec $\mathcal{M}(\chi)$ un $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$-Module simple dont le support est l'adhérence de l'orbite nilpotente associée à $\chi \in W^\wedge$ par la correspondance de Springer.

Le théorème 5.2 de [17] implique quand à lui que $\mathcal{M}(\chi)$ s'identifie à la transformée de Fourier $\mathcal{N}(\chi)^F$ de $\mathcal{N}(\chi)$.

Comme $\mathcal{N}(\chi)$ et sa transformée de Fourier $\mathcal{N}(\chi)^F$ sont des $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$-Modules homogènes, ils ont même variété caractéristique (cf. [17], thm. 3.2: $Car(\mathcal{N}(\chi)) = Car(\mathcal{N}(\chi)^F)$ et l'on a clairement dans cette identification $Car_0(\mathcal{N}(\chi)) = Supp(\mathcal{N}(\chi)^F)$. D'où:

$$Car_0(\mathcal{N}(\chi)) = Supp(\mathcal{N}(\chi)^F) = Supp(\mathcal{N}(\chi)) = \overline{O(\chi)}.$$

Remarque. Le lien entre les (i) et (ii) de la conjecture 6 se fait, dans la situation complexe correspondante, via la transformation de Fourier comme il est sous-jacent dans la démonstration précédente. Il devrait en être de même sur $\mathbb{F}_q$ en réinterprétant tout d'abord géométriquement (ie. comme dans [19]) la transformation de Fourier p-adique «naïve» avec le formalisme de [27], [28].

2.3. *Le cas de SL_2.*

Supposons acquis (comme conséquence de ce qui est annoncé) que le 0-ième faisceau de cohomologie $\underline{H}^0(K_T^{\mathcal{L}_\mu})$ du complexe $K_T^{\mathcal{L}_\mu}$ soit un $F - \mathcal{D}^\dagger_{G^\dagger \mathbb{Q}}$-Module cohérent, la question se pose alors d'en écrire une présentation explicite (dans le but d'étudier les exposants par exemple, etc...). Cette question devrait se ramener (par descente ([14]) par frobenius à l'échelon 0) à l'explicitation du $\mathcal{D}^{(0)\dagger}_{G^\dagger \mathbb{Q}}$-Module $K_T^{\mathcal{L}_\mu (0)}$ (cf. [20], 2.5 pour une description de $\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger}$ comme limite inductive suivant m de $\mathcal{D}^{(m)\dagger}_{U^\dagger}$) construit

([14]) Ce type de technique est explicité partiellement dans un autre cadre dans [11].

de façon analogue à $K_T^{\mathcal{L}_\mu}$ mais en partant du $\mathcal{D}^{(0)\dagger}_{\mathbb{A}^{1\dagger}_{\mathbb{V}}\mathbb{Q}}$-Module $\mathcal{L}_\mu^{(0)}$ sous-jacent à $\mathcal{L}_\mu$ (cette dernière question ayant d'ailleurs un sens indépendamment). C'est la question suggérée par le lien qui existe (cf. [16]), sur $\mathbb{C}$, entre les faisceaux caractères vus comme $\mathcal{D}$-Modules et le système d'Harish-Chandra.

Les difficultés pour expliciter $\mathcal{E}^{(0)} := \underline{H}^0(K_T^{\mathcal{L}_\mu(0)})$ rejoignent d'autres questions (existence d'analogues p-adiques des travaux de Beilinson-Bernstein-Brylinski-Kashiwara) examinées partiellement dans [21]. On s'intéresse au cas $G = SL_2(\mathbb{Z}_p)$, $p > 2$ (avec disons T le tore des matrices diagonales) et l'on suppose que l'on va «induire» le caractère trivial (ie. $\mu = 1$, $\lambda = 1$), ie. $\mathcal{L}_\mu = O_{T\dagger\mathbb{Q}}$ muni de l'action canonique de $\mathcal{D}^\dagger_{T\dagger\mathbb{Q}}$.

PROPOSITION 9. On a un isomorphisme de $\mathcal{D}^{(0)\dagger}_{G\dagger\mathbb{Q}}$-Modules

$$\mathcal{E}^{(0)} \simeq \mathcal{D}\,\mathcal{D}^{(0)\dagger}_{G\dagger\mathbb{Q}} / \sum_{z\in Z} \mathcal{D}^{(0)\dagger}_{G\dagger\mathbb{Q}}(L_z) + \sum_{A\in\mathcal{G}} \mathcal{D}^{(0)\dagger}_{G\dagger\mathbb{Q}}(L_A + R_A) \tag{16}$$

avec L_A (resp. R_A) les opérateurs différentiels invariants (à gauche) (resp. à droite) associés à $A \in \mathcal{U}$.

La démonstration, qui est une variante p-adique de celle de [18], cor. 1, sera donnée ultérieurement. A la place du résultat-clef de Beilinson-Bernstein utilisée dans loc. cit. (p. 187), on utilise le résultat suivant.

PROPOSITION 10. (i) Soient $\mathcal{U}$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G et Z son centre. Posons $Z_+ := Z \cap \mathcal{U}.\mathcal{G}$. On a un isomorphisme canonique $L : \mathcal{U}/Z_+ \to H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{D}^{(0)})$ avec $\mathcal{D}^{(0)}$ comme dans [21].

(ii) $H^i(\widehat{\mathbb{P}^1}, \mathcal{D}^{(0)}) = 0$ pour $i > 0$.

DÉMONSTRATION. Le (ii) se déduit immédiatement de [21]. Pour (i), on peut reprendre, dans notre situation particulière, la démonstration du résultat complexe correspondant telle qu'elle est exposée dans ([3], 3) par exemple. La définition du $L : \mathcal{U} \to H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{D}^{(0)})$ induisant l'isomorphisme ci-dessus est, comme indiqué dans loc. cit., algèbrique et valide sur $\mathbb{Z}_p$. D'autre part, il est clair que chacun des objets est sans p-torsion, il suffit donc de prouver l'assertion après tensorisation par $\mathbb{Q}_p$. La description du cône nilpotent $\mathcal{N}$ (matrices de trace et de déterminant nul) de loc. cit. est ici explicite: on a $\mathcal{N} \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p[x, y, z]/(x^2 + yz))$ (ce qui correspond bien à demander que la trace du carré d'une matrice de trace nulle soit nulle: les résultats de Kostant de loc. cit. sont ici clairs). Le centre $Z \otimes \mathbb{Q}_p$ est engendré par l'élément de Casimir et la vérification du

C de loc. cit. peut se faire par un calcul explicite immédiat. Quand aux arguments du D de loc. cit., ils reposent sur le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt qui est valide dans notre situation (et même d'ailleurs déjà sur $\mathbb{Z}_p$ ([12], § 2, 7, thm. 1)).

La proposition 9 devrait aussi permettre de calculer la variété caractéristique comme dans le cas complexe.

Si l'on «induit» (au sens ci-dessus), à partir du tore T un caractère χ ($\chi^2 \neq 1$) écrit comme puissance i-ème du caractère de Teichmüller (cf. [6], 2.1), on s'attend à ce que l'analogue du $\mathcal{E}^{(0)}$ ci-dessus s'identifie au $\mathcal{D}^{(0)\dagger}_{G^\dagger\mathbb{Q}}$-Module

$$\mathcal{E}^{(0)}_\chi \simeq \mathcal{D}^{(0)\dagger}_{G^\dagger\mathbb{Q}} / \sum_{z \in Z} \mathcal{D}^{(0)\dagger}_{G^\dagger\mathbb{Q}}(L_z - (i/p-1)^2) + \sum_{A \in \mathcal{G}} \mathcal{D}^{(0)\dagger}_{G^\dagger\mathbb{Q}}(L_A + R_A)\,;$$

la quantité $(i/p-1)^2$ jouant le rôle du caractère infinitésimal ([15]) de la théorie complexe. Quoi qu'il en soit, comme dans le cas complexe, on peut introduire a priori ces modules et prendre le second membre comme définition de $\mathcal{E}^{(0)}_\chi$.

Indiquons brièvement comment, avec ce point de vue des $\mathcal{D}^{(0)\dagger}_{G^\dagger\mathbb{Q}}$-Modules, se récupère les valeurs sur $T(\mathbb{F}_p)$ du caractère de la représentation induite de χ. On considère pour cela l'opérateur différentiel $L_z - (i/p-1)^2$ apparaissant ci-dessus. Pour une fonction sur l'ouvert des éléments réguliers sur le tore, il est immédiat de vérifier qu'il agit ([16]) comme $[(td/dt)^2 - (i/p-1)^2]$. Une base de solutions ([17]) «formelles» de celui-ci est donnée par $(t^{i/p-1}, t^{-1/p-1})$ et la structure de frobenius (disons ici au sens de Dwork) est donnée ([18]) sur cette base, par la multiplication par (t^i, t^{-i}), si bien que la trace de cette action est bien $t^i + t^{-i}$, ce qui correspond effectivement à ce à quoi on s'attend.

([15]) Plus précisément de la valeur de celui-ci en l'élément de Casimir.

([16]) Dans la théorie complexe, on parle de «composante radiale» de $L_z - (i/p-1)^2$ le long de T qui ici serait (cf. par exemple [33], 6.3, thm. 15) $(t-t^{-1})[(td/dt)^2(t-t^{-1}) \quad - \quad (i/p-1)^2] = (t-t^{-1})[(td(dt)^2-(i/p-1)^2](t-t^{-1})$. La multiplication par $(t-t^{-1})$ ramène l'étude de cet opérateur à celui que l'on considère.

([17]) Du point de vue de ces solutions (plutôt que du complexe de De Rham), les caractères devraient aussi être liés au frobenius.

([18]) De manière plus intrinsèque, on peut aussi écrire $[(td/dt)^2 - (i/p-1)^2] = (td/dt - (i/p-1))(td/dt + (i/p-1))$, plus la décomposition, canonique, en somme directe de $\mathcal{D}$-Modules qui en découle et utiliser le frobenius de [6], [7] sur chacun des facteurs.

REFERENCES

[1] D. Barbasch - D. Vogan, *Unipotent representations of complex semi-simple groups*, Ann. of Math., **121** (1985), pp. 41-110.

[2] P. Bardsley - R. W. Richardson, *Etale slices for algebraic transformation groups in characteristic p*, Proc. London Math. Soc., **51** (1985), pp. 295-317.

[3] Y. Benoist, *$\mathcal{D}$-Module sur la variété des drapeaux*, Images directes et constructibilité, Travaux en cours 46, Hermann (1993), pp. 99-116.

[4] P. Berthelot, *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p, dans «Introduction aux cohomologies p-adiques*, Bull. Soc. Math. Fr., Mémoire n. 23 (1986).

[5] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre (Première Partie)*, Prépublication IRMAR 96-03 (1996).

[6] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et théorie de Dwork: le cas des sommes exponentielles*, Astérisque 119-120 (1984), pp. 17-49.

[7] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}^{\dagger}$-Modules*, Lecture Notes in Maths., **1454** (1990), pp. 80-124.

[8] P. Berthelot, *$\mathcal{D}$-Modules arithmétiques I, Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. Scient. Ec. Norm Sup, 4ième série, t. 29 (1996), pp. 185-272.

[9] P. Berthelot, *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide (avec un appendice par Aise Johan de Jong)*, Inv. Math., **128** (1997), pp. 329-377.

[10] P. Berthelot, *Dualité de Poincaré et formule de Künneth en cohomologie rigide*, CRASP t. 325, série I (1997), pp. 493-498.

[11] P. Berthelot, *Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-Modules*, Prépublication IRMR 99-38, Juillet 1999.

[12] N. Bourbaki, *Groupes et algébres de Lie*, Chap. I.

[13] J.-L. Brylinski, *Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformation de Fourier et sommes trigonométriques*, Astérisque 140-141 (1986), pp. 3-134.

[14] P. Deligne - G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Maths., **103** (1976), pp. 103-161.

[15] J.-Y. Etesse - B. Le Stum, *Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents, I, Interprétation cohomologique*, Math. Annalen, **296** (1993), pp. 557-576.

[16] R. Hotta, *Holonomic $\mathcal{D}$-Modules in representation theory*, Proc. of Symp. in Pure Maths., vol. **47**, part I (1987), pp. 87-102.

[17] R. Hotta - M. Kashiwara, *The invariant holonomic system on a semi-simple algebra*, Inv. Math, **75** (1984), pp. 327-358.

[18] R. Hotta, *Quotients of the Harish-Chandra system by primitive ideals*, Progress in Maths, vol. **60**, Birkhaüser (1985), pp. 185-205.

[19] C. Huyghe, *Transformation de Fourier des $\mathcal{D}^{\dagger}_{X,\mathbb{Q}}(\infty)$-Modules*, CRASP, t. 321, série I, p. 759-762 (1995) (détails donnés dans «Thèse de Doctorat de l'Université de Rennes I (8 Juin 95)»).

[20] C. HUYGHE, *Un théorème de comparaison entre les faisceaux d'opérateurs différentiels de Berthelot et de Mebkhout-Narvaez-Macarro*, Prépublication IRMAR 99-69, décembre 1999, a paraitre dans J. of Algebraic Geometry.

[21] C. HUYGHE, *$\mathcal{D}^{\dagger}$-affinité de l'espace projetif*, Compositio Math., **108** (1997), pp. 277-318.

[22] N. KATZ, *Nilpotent connection and the monodromy theorem: application of a result of Turritin*, Pub. Math. IHES 39 (1970), pp. 175-232.

[23] M. KASHIWARA, *$\mathcal{D}$-Modules and representation theory of Lie groups*, Ann. Inst. Fourier, **43** (1994), pp. 1597-1618.

[24] G. LUSZTIG, *Introduction to character sheaves*, Proceedings of Symposia in Pure mathematics, **47** (1987), pp. 165-179.

[25] G. LUSZTIG, *A unipotent support for irreducible representations*, Adv. in Math., **94** (1992), pp. 139-179.

[26] G. LUSZTIG, *Fourier transforms on a semisimple Lie algebra over F_q*, Algebraic groups Utrecht 1986, Lecture Notes in Math. 1271, Springer (1987), pp. 177-188.

[27] Z. MEBKHOUT - L. NARVAEZ-MACARRO, *Sur les coefficients de De Rham-Grothendieck des variétés algébriques*, Lecture Notes in Maths, **1454** (1990), pp. 267-308.

[28] Z. MEBKHOUT - L. NARVAEZ-MACARRO, *Sur les coefficients de De Rham-Grothendieck des variétés algébriques II*, en préparation.

[29] Z. MEBKHOUT - L. NARVAEZ-MACARRO, *Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière*, Amer. Journ. Math., **119** (1997), pp. 1027-1081.

[30] D. MEREDITH, *Weak formal schemes*, Nagoya Math. J., **45** (1971), pp. 1-38.

[31] I. MIRKOVIC - K. VILONEN, *Characteristic varieties of character sheaves*, Inv. Math., **93** (1988), pp. 405-418.

[32] T. SPRINGER, *Trigonometric sums, Green Functions of finite groups and representations of Weyl group*, Inv. Math., **36** (1976), pp. 173-207.

[33] V. S. VARADARAJAN, *An introduction to harmonic analysis on semisimple Lie groups*, Cambridge Stud. in Adv. Math., 16, Cambridge Univ. Press (1989).

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 aprile 2000.