RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

F. GACHET

Structure fuchsienne pour des modules différentiels sur une polycouronne ultramétrique

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 102 (1999), p. 157-218

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1999__102__157_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 102 (1999)

Structure Fuchsienne pour des Modules Différentiels sur une Polycouronne Ultramétrique.

F. GACHET (*)

Introduction.

Ce travail répond à la question posée dans ([CMII], 6.2.16). Il s'agit de montrer, d'une part, que l'exposant obtenu par spécialisation dans chaque direction d'une polycouronne ultramétrique $\mathcal{C}$ d'un module différentiel $\mathcal{M}$ analytique sur $\mathcal{C}$ ayant la propriété de Robba est constant dans une direction donnée, et d'autre part, que $\mathcal{M}$ admet, sous la condition Non-Liouville ([CMII], 4.3) pour les différences des exposants ainsi définis, une structure fuchsienne.

Nous généralisons à la dimension supérieure la méthode de [Dw] pour construire un exposant $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ qui se spécialise en l'exposant de sa restriction dans chaque direction. Sous la condition (NL) pour les différences, nous montrons grâce à un analogue ultramétrique du théorème de Hartogs pour les fonctions séparément analytiques sur $\mathcal{C}$, que l'existence de la structure fuchsienne pour $\mathcal{M}$ se réduit essentiellement au cas d'une variable.

Détaillons quelques points de notre démarche. Nous consacrons le premier chapitre à la démonstration de quelques résultats généraux dont nous ferons usage dans les chapitres suivants. Au § 1.1, étant donnée une polycouronne $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\Omega(\boldsymbol{I})$ sur un corps p-adique algébriquement clos Ω (complet de caractéristique 0) et associée à un polysegment ouvert $\boldsymbol{I} \subset (\mathbb{R}_+^*)^s$ non-vide, nous montrons que les fonctions qui sont séparé-

(*) Indirizzo dell'A.: 15, rue Kilmaine; F-59300 Valenciennes.

ment analytiques dans chaque direction de $\mathcal{C}$, sont globalement analytiques sur $\mathcal{C}$. Cet énoncé constitue un analogue ultramétrique du théorème de Hartogs. Il généralise un théorème de Robba qui n'avait eu jusqu'à présent, à ma connaissance, aucune application. Au § 1.2, nous introduisons un module $\mathcal{M}$ libre de rang m à connexion intégrable (qu'on appellera aussi module différentiel par abus de langage) sur une polycouronne ouverte $\mathcal{C}$, ainsi que la propriété de Robba pour $\mathcal{M}$. Nous établissons quelques résultats sur les solutions locales de $\mathcal{M}$, dont un théorème de majoration explicite à plusieurs variables dont la démonstration nous a été suggérée par Baldassarri.

Dans le chapitre 2, nous construisons, notamment grâce au § 1.2, un invariant $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ d'un module différentiel $\mathcal{M}$ libre de rang m ayant la propriété de Robba sur une polycouronne fermée $\mathcal{C}_\Omega$ (de dimension s). $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$, appelé ensemble des exposants de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{C}$, est défini par voie purement ultramétrique sur le modèle de la dimension 1 ([CMII] et [Dw]). Il s'agit d'une classe d'équivalence dans $(\mathbb{Z}_p^m)^s$ pour la relation d'équivalence dite faible. On étudie quelques propriétés de $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ dans le cas général. On montre notamment que $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ est constant dans chaque direction, et on définit de façon cohérente $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ lorsque $\mathcal{C}_K$ est une polycouronne quelconque sur un corps p-adique quelconque. Dans le cas particulier où $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ a la propriété (DNL), l'ensemble $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ se décrit plus facilement. Plus précisément, au § 2.1, nous construisons, sur le modèle établi par Dwork en dimension 1, un s-uplet de matrices $m \times m$ diagonales $\boldsymbol{A} = (A_1, \ldots, A_m)$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$, et une suite (S_h) de matrices à coefficients fonctions analytiques, jouissant tous deux de propriétés remarquables vis-à-vis des solutions locales de $\mathcal{M}$ dans une base fixée. Au § 2.2, on montre que l'ensemble $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ des éléments $\boldsymbol{A}$ ayant les mêmes propriétés que ci-dessus, est inclus dans une classe d'équivalence notée $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ pour la relation d'équivalence faible. Cette relation d'équivalence lie deux éléments $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ si leurs réductions successives $\boldsymbol{A}^{(h)}$ et $\boldsymbol{B}^{(h)}$ modulo p^h sont liées d'une certaine façon. Pour le choix d'une coordonnée i, on établit ensuite que l'ensemble des exposants en la variable x_i $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}_i}(\mathcal{M}_{x_{\hat{i}}})$, associé à la spécialisation de $\mathcal{M}$ en $x_{\hat{i}} = (x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_s)$, ne dépend pas du choix de $x_{\hat{i}}$. Enfin, on montre que $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ se comporte bien par restriction à une sous-polycouronne et par extension du corps de base algébriquement clos. Nous définissons au § 2.3 la propriété Différences Non-Liouville pour $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ à partir de la propriété (DNL) en dimension 1 pour l'ensemble des exposants suivant chaque direction séparément. On montre que les modules différentiels ayant la propriété de Robba et admettant une structure de Frobenius ont un ensemble des exposants satisfaisant la propriété (DNL).

Dans le chapitre 3, nous établissons le fait que sous la condition (DNL) pour $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$, un module différentiel $\mathcal{M}$ ayant la propriété de Robba sur $\mathcal{C}$, admet une structure fuchsienne sur l'intérieur $\mathcal{C}^0$ de la polycouronne $\mathcal{C}$. Cela signifie notamment que dans une base bien choisie de $\mathcal{M}_{|\mathcal{C}^0}$, $\nabla(\partial_{x_i})$ est représenté (comme dans la théorie de Fuchs) par $B^{(i)}/x_i$ avec $B^{(i)}$ une matrice constante. Plus précisément, au § 3.1, nous construisons par passage à la limite une fonction $H(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})$ définie en tout point $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) \in \mathcal{C}^0_{\widetilde{\Omega}} \times \mathcal{C}^0_{\widetilde{\Omega}}$ pour toute extension de corps valué algébriquement clos $\widetilde{\Omega}$ de Ω. Par les propriétés de spécialisation suivant chaque direction i de l'ensemble $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$, on trouve sous la condition (DNL) pour $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ que H est une fonction séparément analytique. On conclut avec § 1.1 que H est alors une fonction analytique sur $\mathcal{C}^0_{\Omega} \times \mathcal{C}^0_{\Omega}$. Au § 3.2, nous donnons deux définitions équivalentes pour la notion de structure fuchsienne sur une polycouronne ouverte. Grâce à la deuxième définition (moins immédiate mais plus intrinsèque que la première définition), pour $\mathcal{M}$ comme ci-dessus, nous montrons comment ce résultat subsiste sans faire aucune hypothèse sur le corps de base p-adique. Ce résultat généralise à la dimension supérieure des théorèmes de Christol-Mebkhout ([CMII], Cor. 6.2.6) et Dwork ([Dw], Th. 7.1).

Remerciements. Je tiens à remercier mon directeur de thèse Gilles Christol pour m'avoir proposé ce sujet et pour ses encouragements, Zoghman Mebkhout pour m'avoir initié à la problématique du sujet et pour m'avoir soutenu dans la recherche d'une solution, ainsi que Bernard Dwork pour l'intérêt dont il a fait preuve à l'égard de mon travail et les remarques dont il m'a fait bénéficier.

1. Préliminaires.

Ce premier chapitre consiste à fixer les principales notations, et à démontrer quelques résultats généraux dont nous nous servirons aux chapitres suivants.

Au § 1.1, nous définissons la notion de polycouronne sur un corps p-adique (complet), et celle de fonction analytique sur une polycouronne. En vue du chapitre 3, nous caractérisons les fonctions analytiques sur une polycouronne ouverte à l'aide des fonctions qui sont analytiques dans chaque direction séparément lorsque $K = \Omega$ algébriquement clos. Sous certaines hypothèses, ce théorème est dû à Robba ([Rb], Chap. 7). Nous montrons comment affaiblir ces hypothèses, jusqu'à obtenir un analogue p-adique du théorème de Hartogs (voir par exemple [Hö], th. 2.2.8), afin d'entrer dans le cadre de nos applications.

Au § 1.2, nous définissons la notion de module $\mathcal{M}$ libre de rang fini à connexion intégrable analytique sur une polycouronne. L'objet de notre article sera de déterminer, sous certaines hypothèses, une forme normale pour $\mathcal{M}$. Nous introduisons pour cela la propriété de Robba pour $\mathcal{M}$, qui assure, par définition, l'existence d'une base de solutions locales pour $\mathcal{M}$ dans tout polydisque ordinaire de rayon maximal de la polycouronne. Cette propriété peut alors se vérifier sur tous les modules de dimension 1 obtenus par spécialisation suivant chaque direction. Nous établissons ensuite un théorème de majoration explicite sur les solutions locales de $\mathcal{M}$ qui nous permettra, au chapitre 2, de construire une suite d'approximations des solutions globales de $\mathcal{M}$ sur l'intérieur de la polycouronne.

1.1. *Fonction séparément analytique sur une polycouronne.*

Soit p un nombre premier ($p \geqslant 2$), et s un entier non nul fixés.

On note K un corps p-adique (on dira aussi valué), c'est-à-dire un corps de caractéristique 0, complet pour une valeur absolue ultramétrique prolongeant la valeur absolue p-adique normalisée sur $\mathbb{Q}$. Une extension K' de corps valué de K sera un corps complet pour une valeur absolue prolongeant la valeur absolue sur K (K' est alors nécessairement un corps p-adique).

La valeur absolue ultramétrique sur K induit une application $\boldsymbol{v}$ sur K^s à valeurs dans $(\mathbb{R}_+)^s$ définie par:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}| = (|x_i|)_{1 \leqslant i \leqslant s}$$

pour $\boldsymbol{x} := (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$.

DÉFINITIONS. *A un polysegment non-vide $\boldsymbol{I}$ de $(\mathbb{R}_+)^s$ avec $\boldsymbol{I} = \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} I_i$ pour $I_i = (r_i, R_i)$, on associe le sous-ensemble $\mathcal{C}_K(\boldsymbol{I}) := \boldsymbol{v}^{-1}(\boldsymbol{I})$ de K^s, encore noté $\mathcal{C}_K$ ou $\mathcal{C}(\boldsymbol{I})$. On appelle* polycouronne *de K^s un tel ensemble $\mathcal{C}_K(\boldsymbol{I})$ pour lequel $\boldsymbol{I}$ est dans $(\mathbb{R}_+^*)^s$ et d'intérieur non-vide (i.e. $\forall i, \quad 0 < r_i < R_i$).*

On dit que f est une fonction analytique *sur $\mathcal{C}_K(\boldsymbol{I})$ si f est une série de Laurent à coefficients dans K dont le domaine de convergence dans*

$(\mathbb{R}_+)^s$ *contient* $\boldsymbol{I}$, *i.e.*

$$f = \sum_{l \in Z^s} a_l \boldsymbol{T}^l \quad \textit{avec} \quad \forall \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{I}, \lim_{|l| \to +\infty} |a_l| \boldsymbol{r}^l = 0 ,$$

où $\boldsymbol{r}^l$ *désigne* $\prod_{i=1}^{s} r_i^{l_i}$, *et* $|\boldsymbol{l}|$ *désigne* $\sum_{i=1}^{s} |l_i|$.

On note $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$ *la* K-algèbre *des fonctions analytiques sur* $\mathcal{C}$.

On dira que $\mathcal{C}(\boldsymbol{I})$ est une polycouronne ouverte (resp. fermée) si $\boldsymbol{I}$ est un ouvert (resp. un fermé) de $(\mathbb{R}_+^*)^s$. On appelera $\mathcal{C}(\boldsymbol{I})$ une sous-polycouronne de $\mathcal{C}(\boldsymbol{J})$ si $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{J}^0$, où $\boldsymbol{J}^0$ désigne l'intérieur de $\boldsymbol{J}$. Plus généralement, on définit une polycouronne centrée en un point quelconque $\boldsymbol{t} \in K^s$, et notée $\mathcal{C}_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{I})$, à partir de l'application

$$\boldsymbol{v_t}(\boldsymbol{x}) = (|x_i - t_i|)_{1 \leq i \leq s}.$$

Soit $i \in \langle 1, s \rangle$.

On peut décomposer tout polysegment $\boldsymbol{I} = \prod_{1 \leq j \leq s} I_j$ suivant la i-ième direction sous la forme

$$\boldsymbol{I} = I_i \times \boldsymbol{I}_{\hat{\imath}} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{I}_{\hat{\imath}} := I_1 \times \ldots \times \hat{I}_i \times \ldots \times I_s.$$

On en déduit les décompositions suivantes

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\boldsymbol{I}) = \mathcal{C}_i \times \mathcal{C}_{\hat{\imath}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{C}_i := \mathcal{C}(I_i) \text{ et } \mathcal{C}_{\hat{\imath}} := \mathcal{C}(\boldsymbol{I}_{\hat{\imath}})$$

pour les polycouronnes de K^s, et

$$\boldsymbol{x} = (x_i, \boldsymbol{x}_{\hat{\imath}}) \quad \text{avec} \quad x_i \in \mathcal{C}_i \text{ et } \boldsymbol{x}_{\hat{\imath}} \in \mathcal{C}_{\hat{\imath}}$$

pour les éléments $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$.

Soit $f = \sum_{l \in Z^s} a_l \boldsymbol{T}^l$ une fonction analytique sur $\mathcal{C}_K$, et K' une extension de corps valué de K.

Si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_{K'}$, on définit $f(x)$ la spécialisation de f en $\boldsymbol{x}$ comme étant la limite dans K' complet de la série absolument convergente $\sum_{l \in Z^s} a_l \boldsymbol{x}^l$.

De même, pour $\boldsymbol{x}_{\hat{\imath}} \in (\mathcal{C}_{\hat{\imath}})_{K'}$, on définit $f_{x_{\hat{\imath}}}$ la spécialisation de f en $x_{\hat{\imath}}$ comme étant la fonction analytique sur $(\mathcal{C}_i)_{K'}$ donnée par

$$f_{x_{\hat{\imath}}}(T_i) := f(T_i, \boldsymbol{x}_{\hat{\imath}}) = \sum_{l_i \in Z} \left[\sum_{\boldsymbol{l}_{\hat{\imath}} \in Z^{s-1}} a_{(l_i, \boldsymbol{l}_{\hat{\imath}})} \boldsymbol{x}_{\hat{\imath}}^{\boldsymbol{l}_{\hat{\imath}}} \right] T_i^{l_i}.$$

Ainsi une fonction analytique sur $\mathcal{C}_K$ donne lieu suivant chaque direction i et pour chaque choix de $x_{\hat{\imath}} \in (\mathcal{C}_{\hat{\imath}})_{K'}$, à une fonction analytique sur $(\mathcal{C}_i)_{K'}$.

Nous allons nous attacher dans ce paragraphe à montrer, sous certaines hypothèses, une réciproque de ce résultat.

DÉFINITION. *Soit* $\mathcal{C}(\boldsymbol{I})$ *une polycouronne non-vide sur K. On dit que f est une* fonction séparément analytique *sur* $\mathcal{C}_K$, *si f est une fonction sur* $\mathcal{C}_K$ *à valeurs dans K telle que pour tout indice* $i \in \langle 1, s \rangle$, *et pour tout choix de* $\boldsymbol{x}_{\hat{\imath}} \in (\mathcal{C}_{\hat{\imath}})_K$, *la fonction* $f_{\boldsymbol{x}_{\hat{\imath}}} : (\mathcal{C}_i)_K \to K$ *définie par*

$$\forall x_i \in (\mathcal{C}_i)_K, \qquad f_{x_{\hat{\imath}}}(x_i) := f(x_i, \boldsymbol{x}_{\hat{\imath}})$$

coïncide avec une fonction analytique sur $(\mathcal{C}_i)_K$.

Avec cette notation, une fonction analytique f sur $\mathcal{C}_K$ est donc une fonction séparément analytique sur $\mathcal{C}_{K'}$ pour toute extension de corps valué K' de K.

On rappelle qu'un corps *sphériquement* clos est un corps valué dans lequel toute suite décroissante de disques a une intersection non-vide. Par un théorème de Kaplansky, cette notion coïncide avec celle de corps *maximalement complet*, et tout corps p-adique (resp. p-adique et algébriquement clos) admet une extension de corps valué qui soit sphériquement clos (resp. sphériquement clos et algébriquement clos) (cf par ex. [VRo], chap. IV). Robba déduit de l'analogue ultramétrique de la formule intégrale de Cauchy (valable seulement sur un corps sphériquement clos) le résultat suivant.

PROPOSITION ([Rb], Chap. 7). *Supposons que K soit sphériquement clos.*

Soit $\mathcal{C}(\boldsymbol{I})$ *une polycouronne ouverte de* K^s. *Considérons f une fonction séparément analytique sur* $\mathcal{C}_K$ *telle que f soit bornée sur toute sous-polycouronne fermée* $\mathcal{C}'$ *de* $\mathcal{C}$.

Alors f est une fonction analytique sur $\mathcal{C}_K$. ■

Comme dans le théorème de Hartogs (voir par exemple ([Hö], th. 2.2.8)), on aimerait, en vue de nos applications, s'affranchir de l'hypothèse «bornée» dans la Proposition précédente, ainsi qu'affaiblir l'hypothèse «K sphériquement clos» jusqu'à contenir le cas «K algébriquement clos».

Remarquons que, si Ω est un corps p-adique algébriquement clos, alors toute polycouronne ouverte $\mathcal{C}_\Omega(\boldsymbol{I})$ est un ensemble non-vide (en effet l'ouvert $\boldsymbol{I}$ rencontre nécessairement $\boldsymbol{v}(\Omega^s)$ dense dans $(\mathbb{R}_+)^s$).

LEMME 1. *Soit* Ω *un corps p-adique algébriquement clos,* $\mathcal{C}_\Omega(\boldsymbol{I})$

une polycouronne ouverte, et $\widetilde{\Omega}$ une extension de corps valué de Ω qui soit sphériquement clos et algébriquement clos. Considérons f une fonction analytique sur $\mathcal{C}_{\widetilde{\Omega}}$ induisant sur $\mathcal{C}_{\Omega}(\boldsymbol{I})$ une fonction à valeurs dans Ω.

Alors f est une fonction analytique sur $\mathcal{C}_{\Omega}$.

PREUVE. Notons G le groupe des automorphismes continus de $\widetilde{\Omega}$ sur Ω. G agit sur les fonctions de $\mathcal{C}_{\widetilde{\Omega}}$ à valeurs dans $\widetilde{\Omega}$ de la manière suivante:

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_{\widetilde{\Omega}}, \qquad \forall \sigma \in G, \qquad g_\sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma(g(\sigma^{-1}(\boldsymbol{x}))).$$

G agit également sur les fonctions analytiques sur $\mathcal{C}_{\widetilde{\Omega}}$ par la formule

$$\forall \sigma \in G, \qquad \forall g(\boldsymbol{T}) = \sum_{\boldsymbol{l} \in \mathbf{Z}^s} g_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{l}} \qquad g^\sigma(\boldsymbol{T}) = \sum_{\boldsymbol{l} \in \mathbf{Z}^s} \sigma(g_{\boldsymbol{l}}) \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{l}}.$$

de telle sorte que par continuité de $\sigma \in G$, g^σ induit la fonction g_σ sur $\mathcal{C}_{\widetilde{\Omega}}$. Comme f induit sur $\mathcal{C}_{\Omega}$ une fonction à valeurs dans Ω, on en déduit plus particulièrement que, pour tout $\sigma \in G$, les séries de Laurent f et f^σ ont leurs fonctions associées qui coïncident sur $\mathcal{C}_{\Omega}$. Par unicité du développement en série de Laurent sur $\mathcal{C}_{\Omega}$ pour Ω algébriquement clos ([Rb], 2.13), on trouve que pour tout $\boldsymbol{l} \in \mathbb{Z}^s$, et $\sigma \in G$, $\sigma(f_{\boldsymbol{l}}) = f_{\boldsymbol{l}}$. Par une généralisation du théorème de Tate-Ax ([Ax]) due à Dwork-Robba ([DR1], th. 8.5), on sait que les éléments de $\widetilde{\Omega}$ laissés invariants par G correspondent exactement aux éléments de Ω. On en déduit donc que pour tout $\boldsymbol{l} \in \mathbb{Z}^s$, $f_{\boldsymbol{l}} \in \Omega$, si bien que f est une série de Laurent à coefficients dans Ω. ■

Nous sommes alors amenés à introduire un corps $\widehat{\Omega}$ au-dessus de $K = \widetilde{\Omega}$ ayant les propriétés suivantes.

DÉFINITIONS. *Pour $\boldsymbol{r} \in (\mathbb{R}_+^*)^s$, on dira que $\boldsymbol{t}_r = (t_1^{(r)}, \ldots, t_s^{(r)})$ est un* point générique sur K de rayon $\boldsymbol{r}$ *si $\boldsymbol{t}_r$ est un élément de $(K')^s$ pour K' une extension de corps valué de K, et s'il vérifie la propriété suivante:*

$$\forall i \in \langle 1, s \rangle, \qquad |t_i^{(r)}| = r_i \ \text{ et } \ \forall P = \sum_{\boldsymbol{l} \in \langle 0, d \rangle^s} a_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{l}} \in K[T_1, \ldots, T_s],$$

$$|P(\boldsymbol{t}_r)| = \max_{\boldsymbol{l} \in \langle 0, d \rangle^s} \{ |a_{\boldsymbol{l}}| \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{l}} \} =: |P|_{\boldsymbol{r}}.$$

On dit alors que $\widehat{K}$ est une extension s-générique *de K si $\widehat{K}$ est une* *extension de corps valué algébriquement clos de K telle que pour chaque* $\boldsymbol{r} \in (\mathbb{R}_+^*)^s$, $(\widehat{\Omega})^s$ *contient un point générique sur K de rayon* $\boldsymbol{r}$.

Montrons tout d'abord qu'un tel corps existe toujours.

LEMME 2. *Pour tout corps p-adique K et tout entier s non-nul, il existe une extension s-générique de K.*

PREUVE. Soit A la K-algèbre intègre des polynômes à coefficients dans K en le système d'indéterminées $(T_1^{(r)}, \ldots, T_s^{(r)})$ indéxées par $\boldsymbol{r}$ dans l'ensemble $(\mathbb{R}_+^*)^s$.

Un élément P de A est donné comme élément de $K[\boldsymbol{T}^{(r)}]_{\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}_P} = K[T_1^{(r)}, \ldots, T_s^{(r)}]_{\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}_P}$ pour $\boldsymbol{R}_P \subset (\mathbb{R}_+^*)^s$ fini. On définit alors $|P|$ à partir de l'unique valeur absolue monomiale sur $K[\boldsymbol{T}^{(r)}]_{\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}_P}$ prolongeant la valeur absolue sur$K$ ([BGR], 1.5.3). Pour P et Q dans A, on a $|PQ| = |P| \cdot |Q|$ car $|\cdot|$ est une valeur absolue sur $K[\boldsymbol{T}^{(r)}]_{\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}_P \cup \boldsymbol{R}_Q}$, et les autres axiomes de la valeur absolue sont vérifiés sur A. Cette nouvelle valeur absolue se prolonge au corps K' des fractions de A. On note alors K'' le complété de K' pour cette valeur absolue, puis K''' une clôture algébrique de K'' munie d'une valeur absolue prolongeant la précédente, et enfin $\widehat{K}$ le complété de K''' pour cette dernière valeur absolue.

Par le lemme de Krasner ([BGR], 3.4.2), $\widehat{K}$ est algébriquement clos, et par définition de la valeur absolue sur A, $(T_1^{(r)}, \ldots, T_s^{(r)})$ est un point de $(\widehat{K})^s$ générique sur K de rayon $\boldsymbol{r}$. $\widehat{K}$ est donc bien une extension s-générique de K. ∎

Nous sommes alors en mesure de montrer le résultat suivant dont les hypothèses seront réalisées au chapitre 3.

THÉORÈME. *Soit* Ω *un corps p-adique algébriquement clos,* $\widetilde{\Omega}$ *une extension de corps valué de* Ω *qui soit sphériquement close et algébriquement close,* $\widehat{\Omega}$ *une extension s-générique de* $\widetilde{\Omega}$, *et* $\mathcal{C}_\Omega(\boldsymbol{I})$ *une polycouronne ouverte sur* Ω. *Considérons f une fonction séparément analytique sur* $\mathcal{C}_{\widehat{\Omega}}$, *induisant des fonctions séparément analytiques sur* $\mathcal{C}_{\widetilde{\Omega}}$ *et sur* $\mathcal{C}_\Omega$.

Alors f est une fonction analytique sur $\mathcal{C}_\Omega$.

PREUVE. Procédons par récurrence sur la dimension s.

Pour $s = 1$, le Théorème découle du fait que les fonctions séparément analytiques sont les fonctions analytiques.

Supposons donc le résultat acquis pour la dimension $s-1$, et considérons $\mathcal{C}_{\widetilde{\Omega}}\{\boldsymbol{I}')$ une sous-polycouronne fermée de $\mathcal{C}_{\widetilde{\Omega}}$.

Par hypothèse de récurrence, f est telle que:

(1) pour tout $x_1 \in (\mathcal{C}_{\widetilde{\Omega}})_1$, $\boldsymbol{x}_{\hat{1}} \mapsto f(x_1, \boldsymbol{x}_{\hat{1}})$ est une fonction analytique sur $\mathcal{C}_{\hat{1}}$,

(2) pour tout $\boldsymbol{x}_{\hat{1}} \in (\mathcal{C}_{\widetilde{\Omega}})_{\hat{1}}$, $x_1 \mapsto f(x_1, \boldsymbol{x}_{\hat{1}})$ est une fonction analytique sur $\mathcal{C}_1$.

Montrons que f est bornée sur la polycouronne $\mathcal{C}_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{I}')$. Pour $\boldsymbol{I}' = \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} [r_i', R_i']$, on note $\delta\boldsymbol{I}' = \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} \{r_i', R_i'\}$ l'ensemble fini (de cardinal 2^s) des points extrémaux de $\boldsymbol{I}'$. Pour chacun des $\boldsymbol{u} \in \delta\boldsymbol{I}'$, on choisit $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{u}} \in \widehat{\Omega}$ un point générique sur $\widetilde{\Omega}$ de rayon $\boldsymbol{u}$.

Donnons-nous $\boldsymbol{x} = (x_1, \boldsymbol{x}_{\hat{1}}) \in \mathcal{C}_{\widetilde{\Omega}}(I_1' \times \boldsymbol{I}_{\hat{1}}')$ et posons $\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{x}|$. On a sans aucune hypothèse

$$|f(x_1, \boldsymbol{x}_{\hat{1}})| \leqslant \sup_{\boldsymbol{x}_{\hat{1}}' \in \mathcal{C}_{\widetilde{\Omega}}(\{\boldsymbol{I}_{\hat{1}}'\})} |f(x_1, \boldsymbol{x}_{\hat{1}}')| .$$

x_1 étant fixé par la propriété (1) et ([Rb], 2.12), on a

$$\sup_{\boldsymbol{x}_{\hat{1}}' \in (\mathcal{C}_{\boldsymbol{r}_{\hat{1}}})_{\widetilde{\Omega}}} |f(x_1, \boldsymbol{x}_{\hat{1}}')| = |f_{x_1}|_{\boldsymbol{r}_{\hat{1}}}.$$

De plus, la fonction $\boldsymbol{r}_{\hat{1}} \mapsto |f_{x_1}|_{\boldsymbol{r}_{\hat{1}}}$ atteint son maximum pour $\boldsymbol{r}_{\hat{1}} \in \delta\boldsymbol{I}_{\hat{1}}'$ par log-convexité ([Rb], 2.7), si bien que

$$|f(x_1, \boldsymbol{x}_{\hat{1}})| \leqslant \max_{\boldsymbol{u}_{\hat{1}} \in \delta\boldsymbol{I}_{\hat{1}}} \{ |f_{x_1}|_{\boldsymbol{u}_{\hat{1}}} \} .$$

Or, par construction de $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{u}}$, l'élément $(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{u}})_{\hat{1}} = (t_2^{(\boldsymbol{u})}, \dots, t_s^{(\boldsymbol{u})})$ est un point générique sur $\widetilde{\Omega}$ de rayon $\boldsymbol{u}_{\hat{1}}$. Par ([Rb], 2.11 et 2.12), on en déduit que

$$|f(x_1, (\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{u}})_{\hat{1}})| = |f_{x_1}|_{\boldsymbol{u}_{\hat{1}}},$$

si bien que

$$(3) \qquad |f(x_1, \boldsymbol{x}_{\hat{1}})| \leqslant \max_{\boldsymbol{u}_{\hat{1}} \in \delta\boldsymbol{I}_{\hat{1}}'} \left\{ |f(x_1, (\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{u}})_{\hat{1}})| \right\} = \max_{\boldsymbol{u}_{\hat{1}} \in \delta\boldsymbol{I}_{\hat{1}}'} \{ |f_{(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{u}})_{\hat{1}}}(x_1)| \} .$$

Si on applique (2) et ([Rb], 2.12) à chacune des fonctions (qui sont en nombre fini) $f_{(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{u}})_{\hat{1}}}$ pour $\boldsymbol{u} \in \delta\boldsymbol{I}'$, on trouve

$$|f_{(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{u}})_{\hat{1}}}(x_1)| \leqslant \sup_{x_1' \in \mathcal{C}_{\widetilde{\Omega}(I_1)}} |f_{(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{u}})_{\hat{1}}}(x_1')| = |f_{(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{u}})_{\hat{1}}}|_{r_1}.$$

De plus, par (1), chaque fonction $r_1 \mapsto |f_{(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{u}})_{\hat{1}}}|_{r_1}$ atteint son maximum pour

$r_1 \in \delta I_{\hat{1}}'$ et

$$(4) \qquad |f_{(t_u)_{\hat{1}}}(x_1)| \leqslant \max_{u_1 \in \delta I_{\hat{1}}'} \{ |f_{(t_u)_{\hat{1}}}|_{u_1} \} .$$

En regroupant (3) et (4), on trouve finalement que $|f(x_1, \boldsymbol{x}_{\hat{1}})|$ est majoré par une constante finie $M = \max_{\boldsymbol{u} \in \delta \boldsymbol{I}} \{ |f_{(t_u)_{\hat{1}}}|_{u_1} \}$.

Les hypothèses de la proposition précédente sont donc remplies, et f est une fonction analytique sur $\mathcal{C}_{\hat{\Omega}}$. Comme f induit une fonction de $\mathcal{C}_\Omega$ à valeurs dans Ω, le Lemme 1 s'applique et f est une fonction analytique sur $\mathcal{C}_\Omega$. Ceci termine la démonstration. ■

1.2. *Propriété de Robba et majoration explicite.*

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\boldsymbol{I})$ une polycouronne sur un corps p-adique algébriquement clos fixé Ω.

Pour $\boldsymbol{t} \in \mathcal{C}$ et $\boldsymbol{r} \in (\mathbb{R}_+^*)^s$, notons $\mathcal{A}_{\boldsymbol{t},\boldsymbol{r}}$ la Ω-algèbre des fonctions analytiques sur le polydisque ouvert $D(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{r}^-) := \mathcal{C}_{\boldsymbol{t}}([0, \boldsymbol{r}[)$ centré en $\boldsymbol{t}$ de rayon $\boldsymbol{r}$. Tant que $\boldsymbol{r} \leqslant |\boldsymbol{t}|$, ce polydisque reste toujours contenu dans $\mathcal{C}$, si bien que $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}_{\boldsymbol{t},\boldsymbol{r}}$.

Le module des Ω-dérivations Der $(\mathcal{A}_\mathcal{C}/\Omega)$ sur $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ est engendré par les dérivations suivant chaque variable x_i, notées ∂_{x_i}, $(1 \leqslant i \leqslant s)$.

DÉFINITIONS. *Pour $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_\mathcal{C}$-module libre de rang fini, on appelle* connexion *sur $\mathcal{M}$ une application Ω-linéaire ∇ de* Der $(\mathcal{A}_\mathcal{C}/\Omega)$ dans End $_\Omega(\mathcal{M})$ telle que

$$\forall \partial \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}_\mathcal{C}/\Omega),\ \forall f \in \mathcal{A}_\mathcal{C},\ \forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{M}, \qquad \nabla(\partial)(f\boldsymbol{a}) = f\nabla(\partial)(\boldsymbol{a}) + \partial(f)\,\boldsymbol{a}$$

Une connexion sur $\mathcal{M}$ est dite intégrable *si de plus*

$$\forall \partial, \partial' \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}_\mathcal{C}/\Omega), \qquad \nabla([\partial, \partial']) = [\nabla(\partial), \nabla(\partial')]$$

où $[\cdot, \cdot]$ désigne le crochet de Lie.

Un module libre de rang fini à connexion intégrable *sur $\mathcal{C}$ (appelé encore, par abus de langage,* module différentiel *sur $\mathcal{C}$) est la donnée d'un $\mathcal{A}_\mathcal{C}$-module $\mathcal{M}$ libre de rang $m \geqslant 1$ muni d'une* connexion intégrable ∇.

Pour $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modules différentiels libres de rang fini sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ avec $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, on note $\mathrm{Hom}_\mathfrak{D}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ *l'espace des morphismes horizontaux de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$. On appelle alors espace des* solutions locales de $\mathcal{M}$ en $\boldsymbol{t}$ de rayon $\boldsymbol{r}$, *le Ω-espace vectoriel de dimension inférieure à m,* $\mathrm{Hom}_\mathfrak{D}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{\boldsymbol{t},\boldsymbol{r}})$.

On dit que $\mathcal{M}$ a la propriété de Robba *sur $\mathcal{C}$ si pour tout $\boldsymbol{t} \in \mathcal{C}$, l'espa-*

ce des solutions locales de $\mathcal{M}$ en $\boldsymbol{t}$ de rayon $|\boldsymbol{t}|$ est de dimension maximale égale à m.

Sauf mention contraire, tous les modules différentiels considérés dans cet article seront des modules libres de rang fini à connexion intégrable.

La propriété de Robba est invariante par restriction à toute sous-polycouronne de $\mathcal{C}$, et par extension de corps valué algébriquement clos Ω' de Ω. Ceci permet de définir plus généralement la propriété de Robba sur $\mathcal{C}_K$, K désignant un corps p-adique quelconque, en plongeant K dans Ω algébriquement clos. Rappelons quelques notations et résultats préliminaires sur les solutions locales de $\mathcal{M}$.

Etant donné $(\boldsymbol{e})$ une base de $\mathcal{M}$, on note $G_{\delta_i} \in M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}})$ la matrice représentant $\nabla(\partial_{x_i})$ dans la base $(\boldsymbol{e})$. On notera $\boldsymbol{G} = (G_{\delta_1}, \ldots, G_{\delta_s})$, et on dira que $\boldsymbol{G}$ représente $\mathcal{M}$ dans la base $(\boldsymbol{e})$. On vérifie qu'une base fondamentale de l'espace des solutions locales de $\mathcal{M}$ en $\boldsymbol{t}$ est donnée par les m colonnes de la matrice à coefficients fonctions analytiques au voisinage de $\boldsymbol{t}$

$$Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^s} \frac{G_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{\alpha}!} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t})^{\boldsymbol{\alpha}},$$

avec les notations suivantes. On pose $G_{(0, \ldots, 0)} = I_m$, et $G_{\boldsymbol{\alpha}}$ se calcule par récurrence à partir des G_{δ_i} à l'aide de la formule

$$G_{\boldsymbol{\alpha} + \delta_i} = \partial_{x_i} G_{\boldsymbol{\alpha}} + G_{\boldsymbol{\alpha}} G_{\delta_i},$$

dans laquelle le symbole δ_i correspond à l'élément $(0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)$ de $\mathbb{N}^s$, et par la notation multi-indicielle, $\boldsymbol{\alpha}!$ désigne $\prod_{i=1}^{s} \alpha_i!$.

Les *conditions d'intégrabilité* pour la connexion imposent

$$\forall i, j, \qquad [\partial_{x_i} - G_{\delta_i}, \partial_{x_j} - G_{\delta_j}] = 0,$$

c'est-à-dire encore que

$$\forall i, j, \qquad \partial_{x_i} G_{\delta_j} + G_{\delta_j} G_{\delta_i} = \partial_{x_j} G_{\delta_i} + G_{\delta_i} G_{\delta_j}.$$

Ceci permet d'affirmer que $G_{\boldsymbol{\alpha}}$ est indépendant du choix de la décomposition de $\boldsymbol{\alpha}$ suivant les δ_i dans la formule de récurrence.

Montrons quelques propriétés plus précises sur la solution matricielle Y_G dans le cas où $\mathcal{M}$ a la propriété de Robba.

PROPOSITION 1. *Supposons que $\mathcal{M}$ a la propriété de Robba sur $\mathcal{C}$, et soit $(\boldsymbol{e})$ une base de $\mathcal{M}$ représentée par $\boldsymbol{G}$.*

Alors pour tout $\geqslant \in \mathcal{C}$, la matrice $Y_G(\boldsymbol{t}, .)$ est à coefficients fonctions analytiques sur le polydisque ouvert $D(\boldsymbol{t}, |\boldsymbol{t}|^-)$, et vérifie:

1) *pour tout $\boldsymbol{t} \in \mathcal{C}$ avec $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ dans $D(\boldsymbol{t}, |\boldsymbol{t}|^-)$, on a*

$$Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}) = Y_G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x});$$

2) *pour tout $\boldsymbol{t} \in \mathcal{C}$, la matrice $Y_G(\boldsymbol{t}, .)$ est analytiquement inversible sur $D(\boldsymbol{t}, |\boldsymbol{t}|^-)$. De plus, pour $\boldsymbol{x} \in D(\boldsymbol{t}, |\boldsymbol{t}|^-)$, on a*

$$Y_G^{-1}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) = Y_G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t});$$

3) *pour tout $\boldsymbol{t} \in \mathcal{C}$ avec $\boldsymbol{x}$ dans $D(\boldsymbol{t}, |\boldsymbol{t}|^-)$, on a*

$$|\det Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})| = 1 .$$

PREUVE. Par la propriété de Robba, $Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^s} (G_\alpha(\boldsymbol{t})/\alpha!)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t})^\alpha$ est une série matricielle uniformément convergente sur tout sous-polydisque fermé $D(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\mu}^+)$ de $D(\boldsymbol{t}, |\boldsymbol{t}|^-)$. Par ([Rb], 2.15), les coefficients de $Y_G(\boldsymbol{t}, .)$ sont alors des fonctions analytiques sur $D(\boldsymbol{t}, |\boldsymbol{t}|^-)$.

D'autre part, pour $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$ fixé, on montre de même que les coefficients de $Y_G(\cdot, \boldsymbol{x})$ sont des fonctions analytiques dans $D(\boldsymbol{t}, |\boldsymbol{t}|^-)$, et que pour tout $i \in \langle 1, s\rangle$, si $\geqslant \in \mathcal{C}$,

$$\partial_{t_i} Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) = -Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})\, G_{\delta_i}(\boldsymbol{t}).$$

Si $\boldsymbol{t} \in \mathcal{C}$ et $\boldsymbol{x} \in D(\boldsymbol{t}, |\boldsymbol{t}|^-)$, nécessairement $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{t}|$, si bien que $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$. Pour $\boldsymbol{y} \in D(\boldsymbol{t}, |\boldsymbol{t}|^-)$, on a alors $\boldsymbol{y} \in D(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{x}|^-)$, et $Y_G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ est définie.

Pour $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{t}$ fixés comme ci-dessus, et pour tout $i \in \langle 1, s\rangle$, on a

$$\partial_{x_i} Y_G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) =$$

$$= -Y_G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, G_{\delta_i}(\boldsymbol{x})\, Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) + Y_G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, G_{\delta_i}(\boldsymbol{x})\, Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) = 0 ,$$

si bien que $Y_G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$ est une matrice indépendante de $\boldsymbol{x}$. L'assertion 1) est une conséquence de ce fait pour $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}$.

L'assertion 2) se déduit de 1) en prenant $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{t}$.

Pour 3), on remarque que det $Y_G(\boldsymbol{t}, .)$ est une fonction analytique inversible sur $D(\boldsymbol{t}, |\boldsymbol{t}|^-)$ par 2). La fonction det $Y_G(\boldsymbol{t}, .)$ est donc sans zéros dans $D(\boldsymbol{t}, |\boldsymbol{t}|^-)$, et s'exprime sous la forme

$$\det Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^s} a_\alpha(\boldsymbol{t})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t})^\alpha.$$

On a, par conséquent, pour $\boldsymbol{x}$ tel que $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}| = \boldsymbol{r} < |\boldsymbol{t}|$,

$$|\det Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})| = |\det Y_G(\boldsymbol{t}, .)|_{|x-t|=r} := \max_{\alpha \in \mathbf{N}^s}\{|a_\alpha(\boldsymbol{t})|\boldsymbol{r}^\alpha\}.$$

D'autre part, la Proposition 2.20 et le Corollaire 2.13 de [Rb] imposent que dans l'expression $\max_{\alpha \in \mathbf{N}^s}\{|a_\alpha(\boldsymbol{t})|\boldsymbol{r}^\alpha\}$, le maximum est atteint en un unique indice indépendant de $\boldsymbol{r} < |\boldsymbol{t}|$.

En particulier, pour $\boldsymbol{r} = (0, \ldots, 0)$, on trouve

$$|\det Y_G(\boldsymbol{t}, .)|_{|x-t|=r} = |\det Y_G(\boldsymbol{t}, .)|_{|x-t|=0} := |a_0(\boldsymbol{t})| =$$

$$= |\det Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t})| = 1. \quad \blacksquare$$

Pour $i \in \langle 1, s\rangle$ et $\boldsymbol{x}_{\hat{\imath}} \in \mathcal{C}_{\hat{\imath}}$, on note $\mathcal{M}_{\boldsymbol{x}_{\hat{\imath}}}$ la *spécialisation de* $\mathcal{M}$ *en* $x_{\hat{\imath}}$ comme étant le $\mathcal{A}_{\mathcal{C}_i}$-module libre de rang fini $\mathcal{M}$ muni de la nouvelle connexion $\nabla_{x_{\hat{\imath}}}$ pour laquelle $\nabla_{x_{\hat{\imath}}}(\partial_{x_i})(\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{G}_{\delta_i})_{x_{\hat{\imath}}}(\boldsymbol{e})$ où $(\boldsymbol{G}_{\delta_i})_{x_{\hat{\imath}}}$ est obtenu par spécialisation en $x_{\hat{\imath}}$ de $\boldsymbol{G}_{\delta_i}$.

Nous allons montrer que la propriété de Robba peut se vérifier sur les modules obtenus par spécialisation.

PROPOSITION 2. *$\mathcal{M}$ a la propriété de Robba sur $\mathcal{C}$ si et seulement si, pour tout $i \in \langle 1, s\rangle$ et pour tout $\boldsymbol{x}_{\hat{\imath}} \in \mathcal{C}_{\hat{\imath}}$, $\mathcal{M}_{\boldsymbol{x}_{\hat{\imath}}}$ a la propriété de Robba sur $\mathcal{C}_i$.*

PREUVE. Fixons une base $(\boldsymbol{e})$ de $\mathcal{M}$ représentée par $\boldsymbol{G}$. La matrice des solutions locales de $\mathcal{M}$ en $\boldsymbol{t} \in \mathcal{C}$ est alors donnée par $Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$, alors que la matrice des solutions locales de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{x}_{\hat{\imath}}}$ en $t_i \in \mathcal{C}_i$ est donnée par

$$Y_{(G_{\delta_i})_{x_{\hat{\imath}}}}(t_i, x_i) = \sum_{\alpha_i \in \mathbf{N}} \frac{(G_{\delta_i})_{\alpha_i}(\boldsymbol{x}_{\hat{\imath}}, t_i)}{\alpha_i!}(x_i - t_i)^{\alpha_i}.$$

Or

$$Y_G((\boldsymbol{x}_{\hat{\imath}}, t_i), (\boldsymbol{x}_{\hat{\imath}}, x_i)) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^s} \frac{G_\alpha(x_{\hat{\imath}}, t_i)}{\alpha!} 0^{\alpha_1} \ldots (x_i - t_i)^{\alpha_i} \ldots 0^{\alpha_s}$$

$$= \sum_{\alpha_i \in \mathbf{N}} \frac{G_{(0, \ldots, \alpha_i, \ldots, 0)}(\boldsymbol{x}_{\hat{\imath}}, t_i)}{\alpha_i!}(x_i - t_i)^{\alpha_i}$$

coïncide avec $Y_{(G_{\delta_i})_{x_i}}(t_i, x_i)$ car $(G_{\delta_i})_{\alpha_i} = G_{(0, \ldots, \alpha_i, \ldots, 0)}$. Par conséquent, si $\mathcal{M}$ a la propriété de Robba, $\mathcal{M}_{x_i}$ l'a également. Réciproquement, la formule du 1) de la Proposition 1 précédente va nous permettre d'écrire la matrice des solutions locales de $\mathcal{M}$ en $\boldsymbol{t}$ sous forme convergente

$$Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) = Y_G(\boldsymbol{u}^{(s-1)}, \boldsymbol{u}^{(s)}) \ldots Y_G(\boldsymbol{u}^{(0)}, \boldsymbol{u}^{(1)})$$

avec $\boldsymbol{u}^{(0)} = \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{u}^{(s)} = \boldsymbol{x}$, et pour $i \in \langle 1, s \rangle$, $\boldsymbol{u}^{(i-1)} = (\boldsymbol{v}^{(i-1)}, t_i)$ diffère de $\boldsymbol{u}^{(i)} = (\boldsymbol{v}^{(i-1)}, x_i)$ par la seule i-ième composante. En effet, il suffit de voir que chaque terme de ce produit est une matrice à coefficients fonctions analytiques sur $D(\boldsymbol{t}, |\boldsymbol{t}|^-)$. Or,

$$Y_G(\boldsymbol{u}^{(i-1)}, \boldsymbol{u}^{(i)}) = Y_{G_{\delta_i}, \boldsymbol{v}^{(i-1)}}(t_i, x_i) = \sum_{\alpha_i \in \mathbb{N}} \frac{G_{\alpha_i \delta_i}(\boldsymbol{v}^{(i-1)}, t_i)}{\alpha_i!}(x_i - t_i)^{\alpha_i}$$

converge uniformément pour $(\boldsymbol{v}^{(i-1)}, x_i) \in \mathcal{C}_i' \times D(t_i, \mu_i^+)$ avec $\mathcal{C}_i'$ une polycouronne fermée dans $\mathcal{C}_i$ et $\mu_i < r_i$. En particulier, $Y_G(\boldsymbol{u}^{(i-1)}, \boldsymbol{u}^{(i)})$ est une fonction analytique sur tout sous-polydisque fermé $D(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\mu}^+)$ de $D(\boldsymbol{t}, |\boldsymbol{t}|^-)$. Par recollement ([Rb], 2.15), les coefficients de la matrice $Y_G(\boldsymbol{t}, .)$ donnée par le produit ci-dessus, sont alors des fonctions analytiques sur $D(\boldsymbol{t}, |\boldsymbol{t}|^-)$, et la matrice $Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$ coïncide bien avec la solution matricielle formelle. ■

Nous utiliserons d'autre part une version à plusieurs variables d'un théorème de majoration explicite (généralisation de [DR2]), dont la démonstration, comme nous l'a fait remarquer Baldassarri, se ramène à la dimension 1 par un argument de ligne générique adapté au cas d'une polycouronne.

THÉORÈME. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$-module libre de rang m à connexion intégrable ayant la propriété de Robba sur une polycouronne fermée $\mathcal{C}(\boldsymbol{I})$. Soit $(\boldsymbol{e})$ une base de $\mathcal{M}$ et $\boldsymbol{G}$ sa représentation.*

Alors, pour tout $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{I}$, il existe une constante $K_{\boldsymbol{r}} = \max_{|\boldsymbol{\alpha}| \in \langle 0, m-1 \rangle} \{\|G_{\boldsymbol{\alpha}}\|_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{\alpha}}\} \in \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^s, \qquad \left\| \frac{G_{\boldsymbol{\alpha}}}{\boldsymbol{\alpha}!} \right\|_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{\alpha}} \leqslant K_{\boldsymbol{r}} \, |\boldsymbol{\alpha}|^{m-1}.$$

PREUVE. Pour $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{I}$ fixé, considérons $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{r}} \in (\widehat{\Omega})^s$ un point générique sur Ω de rayon $\boldsymbol{r}$. On définit $\mathcal{M}_{\boldsymbol{r}}$ le $\mathcal{A}_{(\mathcal{C}_{\boldsymbol{r}})_{\widehat{\Omega}}}$-module libre de rang fini $\mathcal{M}$ muni de la nouvelle connexion pour laquelle

$$\nabla\left(\frac{d}{dz}\right)(\boldsymbol{e}) = G^{(r)}(z)(\boldsymbol{e})$$

où

$$G^{(r)}(z) = \sum_{i=1}^{s} t_i^{(r)} G_{\delta_i}(t_r z),$$

et correspondant sur les solutions locales au changement de variables $t_i^{(r)} z = x_i$ pour une nouvelle variable $z \in (\mathcal{C}_r)_{\widehat{\Omega}}$ ([BC], 5.4).

Dans une base $(\boldsymbol{e})$ de $\mathcal{M}$ et de $\mathcal{M}_r$ correspondante, les représentations $\boldsymbol{G}$ et $G^{(r)}$ sont liées par la relation ([BC], 5.4)

$$G^{(r)}(z) := \sum_{i=1}^{s} t_i^{(r)} G_{\delta_i}(\boldsymbol{t}_r z).$$

On montre alors ([BC], 5.4.3), par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que

$$\frac{G_n^{(r)}(z)}{n!} = \sum_{|\alpha| = n} \boldsymbol{t}_r^{\alpha} \frac{G_{\alpha}(\boldsymbol{t}_r z)}{\alpha!}. \tag{1}$$

On évalue alors pour tout $\boldsymbol{\mu} = u_{\mu} \boldsymbol{r}$ avec $u_{\mu} \in \mathbb{R}_+$ tel que $u_{\mu} \leqslant 1$ et en utilisant le fait que $\boldsymbol{t}_r$ est un point générique sur Ω de rayon $\boldsymbol{r}$ ([BC], 5.4.8),

$$\left\| \frac{G_n^{(r)}}{n!} \right\|_1 u_{\mu}^n = \max_{|\alpha| = n} \left\{ \left\| \frac{G_{\alpha}}{\alpha!} \right\|_r u_{\mu}^n \boldsymbol{r}^{\alpha} \right\} = \max_{|\alpha| = n} \left\{ \left\| \frac{G_{\alpha}}{\alpha!} \right\|_r \boldsymbol{\mu}^{\alpha} \right\}. \tag{2}$$

Par conséquent, on a avec la Proposition 1,

$$\forall u_{\mu} < 1, \qquad \lim_{n \to +\infty} \left\| \frac{G_n^{(r)}}{n!} \right\|_1 u_{\mu}^n = 0,$$

et les solutions locales de $\mathcal{M}_r$ en 0 convergent dans $D(0, 1^-)$. On peut alors appliquer le théorème de majoration effective de [DR2] en dimension 1.

On trouve

$$\left\| \frac{G_n^{(r)}}{n!} \right\|_1 \leqslant K_r \, |\boldsymbol{\alpha}|^{m-1},$$

où $K_r = \max_{k \in \langle 0, m-1 \rangle} \|G_k^{(r)}\|_1 = \max_{|\alpha| \in \langle 0, m-1 \rangle} \{\|G_{\alpha}\|_r \boldsymbol{r}^{\alpha}\}$ par (2).

En reprenant l'identité (2) pour $u_\mu = 1$, on trouve

$$\left\| \frac{G_\alpha}{\alpha!} \right\|_r r^\alpha \leq \max_{|\alpha'| = |\alpha|} \left\{ \left\| \frac{G_{\alpha'}}{\alpha'!} \right\|_r r^{\alpha'} \right\} = \left\| \frac{G^{(r)}_{|\alpha|}}{|\alpha|!} \right\|_1 u^{|\alpha|} \leq K_r |\alpha|^{m-1}. \qquad \blacksquare$$

2. Exposants d'un module différentiel de Robba.

Ce chapitre est consacré à la définition et à l'étude d'un certain invariant $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ d'un module différentiel $\mathcal{M}$ ayant la propriété de Robba sur une polycouronne $\mathcal{C}_\Omega$. La construction de ces invariants se fait naturellement lorsque Ω est algébriquement clos, et lorsque $\mathcal{C}_\Omega$ est une polycouronne fermée. Toutefois, à l'aide des propriétés de $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$, on se ramène en toute généralité au cas précédent pour définir $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ sur une polycouronne $\mathcal{C}_K$ et un corps de base K quelconques.

Au § 2.1, nous suivons le même cheminement de démonstration que Dwork pour la dimension 1, afin de montrer l'existence d'un élément A de $(\mathbb{Z}_p^m)^s$, appelé exposant à plusieurs variables, et d'une suite de matrices (S_h) analytiques sur $\mathcal{C}$ vérifiant avec A certaines propriétés d'approximation des solutions globales de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{C}$. Dans notre cas, la définition de Dwork s'avérera plus maniable à plusieurs variables que la définition initiale donnée par Christol et Mebkhout. On relève d'autre part que la définition de Dwork permet de traiter le cas d'un corps p-adique algébriquement clos quelconque, ce qui sera fondamental lorsqu'on voudra appliquer l'analogue ultramétrique du théorème de Hartogs au chapitre 3.

Au § 2.2, nous définissons l'ensemble $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ des éléments A vérifiant les propriéts du § 2.1. Nous montrons, grâce à deux lemmes élémentaires sur des fonctions convexes de plusieurs variables réelles généralisant ([Dw], Chap. 1), que $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ est un invariant de $\mathcal{M}$ qui est inclus dans une certaine classe d'équivalence faible notée $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$. Les matrices approximantes S_h ne correspondent à des matrices de changement de base que pour h suffisamment grand (et non pour tout h comme dans [CMII]). Cette propriété asymptotique nous suffit alors pour en déduire qu'un élément $A \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ se spécialise en un l'élément constant $A_i \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}_i}(\mathcal{M}_{x_i})$ pour tout choix de $x_i \in \mathcal{C}_i$. On en déduit la notion d'exposants suivant la i-ième direction.

Au § 2.3, nous définissons la condition *D*ifférences *N*on-*L*iouville sur $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ en imposant la condition (*DNL*) dans chaque direction i. Nous remarquons que cette condition (*DNL*) est automatiquement vérifiée par les modules différentiels ayant la propriété de Robba et ayant une structure de Frobenius.

2.1. *Existence d'un exposant*

On fixe dans tout le chapitre 2, Ω un corps p-adique algébriquement clos. Notons $\mathcal{O}_m^s$ l'ensemble des s-uplets de matrices $m \times m$ diagonales à éléments dans $\mathbb{Z}_p$, et pour $h \in \mathbb{N}$, Γ_h^s le sous-ensemble de Ω^s constitué des s-uplets d'éléments de Γ_h, groupe multiplicatif cyclique des racines p^h-ièmes de l'unité.

Pour $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$, $\boldsymbol{\zeta} \in \Gamma_h^s$, et $\boldsymbol{A} \in \mathcal{O}_m^s$, on emploiera les conventions suivantes:

$$\boldsymbol{\zeta x} = (\zeta_1 x_1, \ldots, \zeta_s x_s),$$

$$\boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{A}} = \zeta_1^{A_1} \ldots \zeta_s^{A_s},$$

$$\text{avec } \zeta_i^{A_i} = \begin{pmatrix} \zeta_i^{A_{i1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta_i^{A_{im}} \end{pmatrix}.$$

Notre point de départ est une généralisation à plusieurs variables d'un résultat de Dwork ([Dw], cor. 3.2) qui nous a évité d'aborder le problème ouvert de la définition et de l'existence d'une structure de Frobenius faible, au sens de Christol-Dwork ([CD], th. 5.4), à plusieurs variables.

THÉORÈME. *Soit $\mathcal{M}$ un module libre de rang m à connexion intégrable ayant la propriété de Robba sur une polycouronne fermée $\mathcal{C}(\boldsymbol{I})$. Soit $\boldsymbol{G}$ représentant $\mathcal{M}$ dans une base $(\boldsymbol{e})$.*

Alors, il existe un élément $\boldsymbol{A} = (A_1, \ldots, A_s)$ de $\mathcal{O}_m^s$ pour lequel on peut trouver une suite $(S_h)_{h \in \mathbb{N}}$ avec $S_h \in M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}})$ vérifiant les conditions:

1) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$, $\forall \boldsymbol{\zeta} \in \Gamma_h^s$,

$$\boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{A}} S_h(\boldsymbol{x}) = S_h(\boldsymbol{\zeta x})\, Y_G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\zeta x})$$

2) *il existe une constante réelle K indépendante de h telle*

que pour tout h dans $\mathbb{N}$,

$$\log \|S_h\|_{\mathcal{C}} \leqslant Kh$$

3) $\forall h \in \mathbb{N}$, $\forall \varrho \in \boldsymbol{I}^0$, $|\det S_h|_\varrho \geqslant 1$.

La démonstration du Théorème va suivre le même enchaînement d'idées que celle de [Dw] et va requérir notre attention dans toute la partie 2.1.

Ainsi, nous allons construire explicitement une suite (S_h) vérifiant les conditions 1), 2), et 3) du Théorème grâce à un analogue p-adique à plusieurs variables de la transformée de Fourier.

Etant donné $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$, $\boldsymbol{\zeta} \in \Gamma_h^s$, et $\boldsymbol{B} \in \mathcal{O}_m^s$, on considère la matrice à coefficients séries formelles

$$R_{h,\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{p^{sh}} \sum_{\boldsymbol{\zeta} \in \Gamma_h^s} \boldsymbol{\zeta}^{-\boldsymbol{B}} Y_G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\zeta x}).$$

On remarque en premier lieu que $R_{h,\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}) = R_{h,\boldsymbol{B}^{(h)}}(\boldsymbol{x})$, où $\boldsymbol{B}^{(h)}$ est la réduction de $\boldsymbol{B}$ modulo p^h sur toutes ses composantes. Pour voir les propriétés que vérifie la série matricielle formelle $R_{h,\boldsymbol{B}}$, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires.

Lemme 1. *Soit $l \in \mathbb{N}$ et $\zeta \in \Gamma_l$. Alors $|\zeta - 1| \leqslant \mu$ avec $\mu < 1$ et en particulier $|\zeta| = 1$. De plus, on peut prendre μ tel que*

$$\frac{1}{\log(1/\mu)} \leqslant K_1 p^l$$

avec K_1 une constante réelle indépendante de l.

Preuve. On note $\lambda = \zeta - 1$. Par ([DGS], I.9.3), on a

$$|\lambda| = |\pi|^{p^{1-l}} = p^{\frac{1}{(1-p)p^{l-1}}} < 1\,.$$

On a donc égalité dans l'inégalité ultramétrique $|\zeta| \leqslant \max\{|\zeta - 1|, |1|\}$, et ainsi $|\zeta| = 1$.

On trouve, d'autre part, pour $\mu = |\lambda|$,

$$\frac{1}{\log(1/\mu)} = \frac{(p-1)\,p^{l-1}}{\log p} \leqslant K_1 p^l,$$

pour $K_1 = (p-1)/(p \log p)$. ■

PROPOSITION 1. *Soit* $\mu < 1$ *tel que pour tout* $\zeta \in \Gamma_h^s$ *et pour tout* $i = 1, \dots, s$, *on ait* $|\zeta_i - 1| \leq \mu$;

Alors $Y_G(\boldsymbol{x}, \zeta\boldsymbol{x})$ *est une matrice à coefficients dans* $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$ *et il existe une constante* K_2 *telle que*:

$$\|Y_G(\boldsymbol{x}, \zeta\boldsymbol{x})\|_{\mathcal{C}} \leq K_2 \left(\frac{1}{\log(1/\mu)} \right)^{m-1}.$$

PREUVE. Pour $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{I}$, le Théorème de majoration explicite 1.2 donne

$$\left\| \frac{G_\alpha(\boldsymbol{x})}{\alpha!} \boldsymbol{x}^\alpha (\zeta - 1)^\alpha \right\|_{\boldsymbol{r}} \leq K_{\boldsymbol{r}} |\alpha|^{m-1} \mu^{|\alpha|}$$

avec

$$K_{\boldsymbol{r}} = \max_{|\alpha| \in \langle 0, m-1 \rangle} \{ \|G_\alpha(\boldsymbol{x})\|_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{r}^\alpha \}.$$

Ainsi

$$\left\| \frac{G_\alpha(\boldsymbol{x})}{\alpha!} \boldsymbol{x}^\alpha (\zeta - 1)^\alpha \right\|_{\mathcal{C}} := \sup_{\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{I}} \left\{ \left\| \frac{G_\alpha(\boldsymbol{x})}{\alpha!} \boldsymbol{x}^\alpha (\zeta - 1)^\alpha \right\|_{\boldsymbol{r}} \right\} \leq K_{\mathcal{C}} |\alpha|^{m-1} \mu^{|\alpha|}$$

avec

$$K_{\mathcal{C}} := \sup_{\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{I}} (K_{\boldsymbol{r}}) = \sup_{\boldsymbol{r} \in \delta \boldsymbol{I}} \left\{ \max_{|\alpha| \in \langle 0, m-1 \rangle} \{ \|G_\alpha(\boldsymbol{x})\|_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{r}^\alpha \} \right\} \in \mathbb{R}_+,$$

par log-convexité des fonctions $\boldsymbol{r} \mapsto \|G_\alpha(\boldsymbol{x})\|_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{r}^\alpha$ pour chaque $|\alpha| \in \langle 0, m-1 \rangle$. Comme $\mu < 1$ et $\lim_{|\alpha| \to +\infty} |\alpha|^{m-1} \mu^{|\alpha|} = 0$, la série

$$Y_G(\boldsymbol{x}, \zeta\boldsymbol{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^s} \frac{G_\alpha(\boldsymbol{x})}{\alpha!} \boldsymbol{x}^\alpha (\zeta - 1)^\alpha$$

converge uniformément sur $\mathcal{C}(\boldsymbol{I})$, si bien que $Y_G(\boldsymbol{x}, \zeta\boldsymbol{x}) \in M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}})$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|Y_G(\boldsymbol{x}, \zeta\boldsymbol{x})\|_{\mathcal{C}} &\leq \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^s} \left\{ \left\| \frac{G_\alpha(\boldsymbol{x})}{\alpha!} \boldsymbol{x}^\alpha (\zeta - 1)^\alpha \right\|_{\mathcal{C}} \right\} \\ &\leq K_{\mathcal{C}} \left(\frac{m-1}{\log(1/\mu)} \right)^{m-1} \mu^{(m-1)/\log(1/\mu)} \\ &\leq K_{\mathcal{C}} (m-1)^{m-1} \left(\frac{1}{\log(1/\mu)} \right)^{m-1}, \end{aligned}$$

ce qui donne la majoration uniforme de la Proposition 1 pour $K_2 = = K_{\mathcal{C}}(m-1)^{m-1}$. ■

Nous pouvons dès maintenant vérifier que $R_{h,\boldsymbol{B}}$, qui est dans $M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}})$ par la Proposition précédente, satisfait aux conditions 1) et 2) du Théorème, et cela même sans faire d'hypothèse supplémentaire sur $\boldsymbol{B}$.

La Proposition précédente associée au Lemme 1 donne

$$\|Y_G(\boldsymbol{x}, \zeta\boldsymbol{x})\|_{\mathcal{C}} \leqslant K_2(K_1 p^h)^{m-1} \leqslant K_3 p^{(m-1)h},$$

et donc

$$\|R_{h,\boldsymbol{B}}\|_{\mathcal{C}} \leqslant K_3 p^{(m-1+s)h}$$

qui est bien la condition 2) du Théorème 2.1.

D'autre part, on a, grâce au 1) de la Proposition 1, pour tout $\zeta \in \Gamma_h^s$ et tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} p^{sh}\zeta^{\boldsymbol{B}} R_{h,\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{\zeta' \in \Gamma_h^s} (\zeta'\zeta^{-1})^{-\boldsymbol{B}} Y_G(\boldsymbol{x}, \zeta'\boldsymbol{x}) \\ &= \sum_{\boldsymbol{u} = \zeta'\zeta^{-1} \in \Gamma_h^s} \boldsymbol{u}^{-\boldsymbol{B}} Y_G(\boldsymbol{x}, \zeta\boldsymbol{u}\boldsymbol{x}) \\ &= \sum_{\boldsymbol{u} \in \Gamma_h^s} \boldsymbol{u}^{-\boldsymbol{B}} Y_G(\zeta\boldsymbol{x}, \zeta\boldsymbol{u}\boldsymbol{x})\, Y_G(\boldsymbol{x}, \zeta\boldsymbol{x}) \\ &= p^{sh} R_{h,\boldsymbol{B}}(\zeta\boldsymbol{x})\, Y_G(\boldsymbol{x}, \zeta\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

$R_{h,\boldsymbol{B}}$ vérifie donc bien la condition 1) du Théorème 2.1.

Reste à voir désormais que, pour un bon choix de $\boldsymbol{B}$, 3) sera vérifié. Ce choix va se faire par récurrence sur h grâce à une formule qui va relier $R_{h,\boldsymbol{B}^{(h)}}$ et $R_{h+1,\boldsymbol{B}^{(h+1)}}$, ce qui nous permettra de choisir $\boldsymbol{B}^{(h+1)}$ en fonction de $\boldsymbol{B}^{(h)}$.

PROPOSITION 2. (*Formule du déterminant*); *On a la formule suivante*

$$\det(R_{h,\boldsymbol{A}^{(h)}}(\boldsymbol{x})) = \sum_{\boldsymbol{A}^{(h+1)} \succ \boldsymbol{A}^{(h)}} \det(R_{h+1,\boldsymbol{A}^{(h+1)}}(\boldsymbol{x}))$$

où la somme est prise sur l'ensemble des éléments $\boldsymbol{A}^{(h+1)}$ *qui donnent* $\boldsymbol{A}^{(h)}$ *après réduction modulo* p^h.

La démonstration de cette proposition requiert quelques lemmes.

LEMME 2. *Soit* $h \in \mathbb{N}$. *On note* $\delta_{[(\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{b})]}$ *le symbole de Kronecker associé à deux éléments* $\boldsymbol{a}$ *et* $\boldsymbol{b}$ *dans* $\mathfrak{A}^s$ *pour un anneau* $\mathfrak{A}$. *Pour* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *dans* $\mathcal{D}_m^s(\mathbb{Z}_p)$, *on note* $\Delta_{[\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}]}$ *la matrice diagonale* $m \times m$ *à éléments dans* $\{0, 1\}$ *telle que* $(\Delta_{[\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}]})_j = \delta_{[(A_\bullet)_j=(B_\bullet)_j]}$.

a) On considère $\boldsymbol{B} \in \mathcal{D}_m^s(\mathbb{Z}_p)$, *et* $\boldsymbol{B}^{(h)} = (B_1^{(h)}, \ldots, B_s^{(h)})$ *l'élément de* $\mathcal{D}_m^s(\mathbb{Z}/p^h\mathbb{Z})$ *correspondant. On a alors:*

$$\sum_{\zeta \in \Gamma_h^s} \boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{B}} = p^{sh} \Delta_{[\boldsymbol{B}^{(h)}=(0 \cdot I_m, \ldots, 0 \cdot I_m)]}.$$

b) *Soit* $\zeta \in \Gamma_h^s$. *On note* $\mathcal{L}^{(h)}$ *l'ensemble des s-uplets de matrices* $m \times m$ *diagonales de la forme* $\boldsymbol{L} = (l_1 I_m, \ldots, l_s I_m)$ *avec* $l_i \in \mathbb{Z}/p^h\mathbb{Z}$. *On a alors:*

$$\sum_{\boldsymbol{L} \in \mathcal{L}^{(h)}} \boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{L}} = p^{sh} \delta_{[(\zeta)=(1, \ldots, 1)]} I_m.$$

PREUVE. On rappelle que pour chaque h, Γ_h^* est un groupe multiplicatif cyclique d'ordre $p^h - 1$.

Par définition,

$$\sum_{\zeta \in \Gamma_h^s} \boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{B}} = \sum_{\zeta \in \Gamma_h^s} \boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{B}^{(h)}} = \begin{pmatrix} \sum_{\zeta \in \Gamma_h^s} \zeta_1^{B_{11}^{(h)}} \cdots \zeta_s^{B_{s1}^{(h)}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{\zeta \in \Gamma_h^s} \zeta_1^{B_{1m}^{(h)}} \cdots \zeta_s^{B_{sm}^{(h)}} \end{pmatrix}.$$

Or, pour tout $j \in \langle 1, m \rangle$,

$$\sum_{\zeta \in \Gamma_h^s} \zeta_1^{B_{1j}^{(h)}} \cdots \zeta_s^{B_{sj}^{(h)}} = \prod_{1 \leq i \leq s} \left(\sum_{\zeta_i \in \Gamma_h} \zeta_i^{B_{ij}^{(h)}} \right).$$

On est donc ramené au cas $s=1$, pour lequel on a:

$$\sum_{\zeta_i \in \Gamma_h} \zeta_i^{B_{ij}^{(h)}} = \begin{cases} \sum_{\zeta_i \in \Gamma_h} \zeta_i = \mathrm{Tr}(X^{p^h}-1) = 0 & \text{si } B_{ij}^{(h)} \neq 0\,, \\ \sum_{\zeta_i \in \Gamma_h} 1 = p^h & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

En effectuant le produit sur i pour j fixé, on en déduit que

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant s} \left(\sum_{\zeta_i \in \Gamma_h} \zeta_i^{B_{ij}^{(h)}} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } B_{\bullet j}^{(h)} \neq (0, \ldots, 0), \\ p^{sh} & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

La partie $a)$ du Lemme 2 s'en déduit par définition de $\Delta_{[B^{(h)}=(0\cdot I_m, \ldots, 0\cdot I_m)]}$.

Dans b), on part de $\boldsymbol{\zeta} \in \Gamma_h^s$ fixé. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{L \in \mathcal{L}^{(h)}} \boldsymbol{\zeta}^L &= \sum_{(l_1, \ldots, l_s) \in (\mathbf{Z}/p^h\mathbf{Z})^s} \zeta_1^{l_1 I_m} \ldots \zeta_s^{l_s I_m} \\ &= \left(\sum_{(l_1, \ldots, l_s) \in (\mathbf{Z}/p^h\mathbf{Z})^s} \zeta_1^{l_1} \ldots \zeta_s^{l_s} \right) I_m. \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{(l_1, \ldots, l_s) \in (\mathbf{Z}/p^h\mathbf{Z})^s} \zeta_1^{l_1} \ldots \zeta_s^{l_s} = \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} \left(\sum_{l_i \in \mathbf{Z}/p^h\mathbf{Z}} \zeta_i^{l_i} \right).$$

On est donc ramené au cas $s=1$, pour lequel on a:

$$\sum_{l_i \in \mathbf{Z}/p^h\mathbf{Z}} \zeta_i^{l_i} = \begin{cases} \sum_{\xi \in \Gamma_h} \xi = \mathrm{Tr}(X^{p^h}-1) = 0 & \text{si } \zeta_i \neq 1\,, \\ \sum_{\zeta_i \in \Gamma_h} 1 = p^h & \text{sinon}. \end{cases}$$

En effectuant le produit sur i, on en déduit b).

LEMME 3. (*Formule d'inversion de Fourier à l'ordre h*). *Pour tout* $\boldsymbol{\zeta} \in \Gamma_h^s$, *on a l'égalité suivante entre fonctions analytiques sur* $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}$

$$Y_G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\zeta x}) = \sum_{L \in \mathcal{L}^{(h)}} \boldsymbol{\zeta}^L R_{h,L}(\boldsymbol{x}).$$

PREUVE. Si on note

$$F_{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{L \in \mathcal{L}^{(h)}} \boldsymbol{\zeta}^L R_{h,L},$$

on trouve en remplaçant $R_{h,L}$ par sa définition et en utilisant le Lemme 2 précédent,

$$\begin{aligned} F_\zeta(\boldsymbol{x}) &= \sum_{L \in \mathcal{L}^{(h)}} \zeta^L \left(\frac{1}{p^{sh}} \sum_{\zeta' \in \Gamma_h^s} \zeta'^{-L} Y_G(\boldsymbol{x}, \zeta' \boldsymbol{x}) \right) \\ &= \frac{1}{p^{sh}} \sum_{\zeta' \in \Gamma_h^s} \left(\left(\sum_{L \in \mathcal{L}^{(h)}} (\zeta \zeta'^{-1})^L \right) Y_G(\boldsymbol{x}, \zeta' \boldsymbol{x}) \right) \\ &= \frac{1}{p^{sh}} \sum_{\zeta' \in \Gamma_h^s} (p^{sh} \delta_{[\zeta' = \zeta]} I_m Y_G(\boldsymbol{x}, \zeta' \boldsymbol{x})) \\ &= Y_G(\boldsymbol{x}, \zeta \boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Preuve de la Proposition 2. Pour chaque $\zeta \in \Gamma_h^s \subseteq \Gamma_{h+1}^s$, on applique la formule d'inversion de Fourier (Lemme 3) à l'ordre $h+1$ à $Y_G(\boldsymbol{x}, \zeta \boldsymbol{x})$ dans la formule

$$p^{sh} R_{h, A^{(h)}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\zeta \in \Gamma_h^s} \zeta^{-A^{(h)}} Y_G(\boldsymbol{x}, \zeta \boldsymbol{x}).$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} p^{sh} R_{h, A^{(h)}} &= \sum_{\zeta \in \Gamma_h^s} \left(\zeta^{-A^{(h)}} \left(\sum_{L \in \mathcal{L}^{(h+1)}} \zeta^L R_{h+1, L} \right) \right) \\ &= \sum_{L \in \mathcal{L}^{(h+1)}} \left(\sum_{\zeta \in \Gamma_h^s} \zeta^{L - A^{(h)}} \right) R_{h+1, L} \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2,

$$\sum_{\zeta \in \Gamma_h^s} \zeta^{L - A^{(h)}} = p^{sh} \Delta_{[L = A^{(h)}]}.$$

Les éléments $\boldsymbol{L} = (l_1 I_m, \ldots, l_s I_m) \in \mathcal{L}^{(h+1)}$ pour lesquels $(\Delta_{[L = A^{(h)}]})_j$ est non nulle sont ceux qui vérifie, pour tout i, $l_i = A_{ji}^{(h)}$ dans $\mathbb{Z}/p^h\mathbb{Z}$. Comme l_i parcourt $\mathbb{Z}/p^{h+1}\mathbb{Z}$, il s'agit des $l_i = A_{ji}^{(h)} + p^h (T_i)_j$ pour $(T_i)_j$ parcourant $\langle 0, p-1 \rangle$ pour chaque i, et pour j fixé. Pour $j = 1, \ldots, m$, on en déduit, respectivement, la forme de la 1-ère ligne à la m-ième ligne de la matrice $p^{sh}R_{h,A^{(h)}}$:

$$p^{sh}R_{h,A^{(h)}} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{(T_i)_1 \in \langle 0, p-1\rangle^s} p^{sh}\boldsymbol{R}^{(1)}_{h+1,([(A_1)^{(h)}_1 + (T_1)_1 p^h] I_m, \ldots, [(A_s)^{(h)}_1 + (T_s)_1 p^h] I_m)} \\ \vdots \\ \sum\limits_{(T_i)_m \in \langle 0, p-1\rangle^s} p^{sh}\boldsymbol{R}^{(m)}_{h+1,([(A_1)^{(h)}_m + (T_1)_m p^h] I_m, \ldots, [(A_s)^{(h)}_m + (T_s)_m p^h] I_m)} \end{pmatrix}.$$

D'autre part, si on note

$$\boldsymbol{A}^{(h+1)}_{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}^{(h)} + p^h \boldsymbol{T},$$

on a pour tout $1 \leqslant \nu \leqslant m$,

$$\boldsymbol{R}^{(\nu)}_{h+1,([(A_1)^{(h)}_\nu + (T_1)_\nu p^h] I_m, \ldots, [(A_s)^{(h)}_\nu + (T_s)_\nu p^h] I_m)} = \boldsymbol{R}^{(\nu)}_{h+1,\boldsymbol{A}^{(h+1)}_{\boldsymbol{T}}}.$$

Par multilinéarité du déterminant, on en déduit bien la formule du déterminant annoncée. ■

Preuve du Théorème 2.1.. Nous sommes maintenant en mesure de montrer l'existence d'un élément $\boldsymbol{A}$ et d'une suite (S_h) qui lui sera associée vérifiant les conditions 1), 2) et 3) du Théorème. Le candidat pour la suite (S_h) est $R_{h,\boldsymbol{A}}$, pour lequel il ne nous reste plus à voir qu'avec un bon choix de $\boldsymbol{A}$, $R_{h,\boldsymbol{A}}$ vérifie la condition 3) du Théorème.

Pour $f = \sum\limits_{l \in Z^s} a_l \boldsymbol{x}^l$, on pose $\mathrm{Res}_{\boldsymbol{x}=0}(f) := a_0$. L'application $\Phi : f \mapsto \mathrm{Res}_{\boldsymbol{x}=0}(f)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$ qui est telle que

$$|\mathrm{Res}_{\boldsymbol{x}=0}(f)| := |a_0| \leqslant \max_{l \in Z^s} |a_l| \boldsymbol{r}^l = |f|_{\boldsymbol{r}}.$$

Par conséquent, il nous suffit de trouver $\boldsymbol{A}$ telle que

$$|\mathrm{Res}_{\boldsymbol{x}=0} \det (R_{h,\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}))| \geqslant 1 .$$

Si on note, pour $h \in \mathbb{N}$, $r_{h,\boldsymbol{B}} = \det R_{h,\boldsymbol{B}}$, on a par la formule du déterminant et par linéarité de Φ, l'égalité suivante dans Ω

$$\mathrm{Res}_{\boldsymbol{x}=0}\, r_{h,\boldsymbol{B}^{(h)}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{B}^{(h+1)} \succ \boldsymbol{B}^{(h)}} \mathrm{Res}_{\boldsymbol{x}=0}\, r_{h+1,\boldsymbol{B}^{(h+1)}}(\boldsymbol{x}). \tag{1}$$

Pour $h = 0$, nous avons nécessairement $\boldsymbol{A}^{(0)} = 0I_m \times \ldots \times 0I_m$ pour lequel

$$\mathrm{Res}_{\boldsymbol{x}=0}\, r_{0,\boldsymbol{A}^{(0)}}(\boldsymbol{x}) = 1 ,$$

si bien que

$$|\operatorname{Res}_{x=0} r_{0,A^{(0)}}(x)| = 1 .$$

Supposons que l'on ait construit $A^{(h)}$ avec $|\operatorname{Res}_{x=0} r_{h,A^{(h)}}| \geqslant 1$. Si on applique alors la formule (1) à $A^{(h)}$, le fait que $|.|$ soit une norme ultramétrique sur Ω nous dit que nécessairement l'un des $B^{(h+1)} \succ A^{(h)}$ est tel que

$$|\operatorname{Res}_{x=0} r_{h+1,B^{(h+1)}}| \geqslant |\operatorname{Res}_{x=0} r_{h,A^{(h)}}| \geqslant 1 .$$

On choisit donc $A^{(h+1)}$ parmi de tels éléments $B^{(h+1)}$. On a donc déterminé par récurrence sur h les réductions successives $A^{(h)}$ d'un élément $A \in \mathcal{O}_m^s$ qui vérifie avec $S_h = R_{h,A}$ les hypothèses 1), 2) et 3) du Théorème 2.1. ■

2.2. *Premières propriétés des exposants et indépendance par spécialisation.*

Si on fixe (e) une base de $\mathcal{M}$, et G sa représentation, on note $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}(G)$ l'ensemble non-vide des éléments $A \in \mathcal{O}_m^s$ vérifiant les conditions 1), 2) et 3) pour une suite (S_h).

Afin d'obtenir des propriétés pour l'ensemble $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}(G)$, nous établissons quelques lemmes généraux.

LEMME 1. (*Minoration uniforme*). *Soit g une fonction analytique sur une polycouronne fermée $\mathcal{C}(I)$. Supposons qu'il existe des constantes M' et M telles que $\log \|g\|_{\mathcal{C}} \leqslant M$ et qu'en un certain $\varrho \in I^0$, on ait $\log |g|_{\varrho} \geqslant M'$.*

Alors il existe une constante $\tau = \tau(\varrho, I) > 0$ telle que

$$\forall r \in I^0, \qquad \log |g|_r \geqslant (1+\tau) M' - \tau M .$$

PREUVE. On remarque en premier lieu, que $M' \leqslant M$ du fait même que $|g|_{\varrho} \leqslant \|g\|_{\mathcal{C}}$. On note $\mathcal{L} := \log I \subseteq \mathbb{R}^s$, $\eta = \log r \in \mathcal{L}$ et $\eta_{\varrho} = \log \varrho \in \mathcal{L}^0$.

Pour $\eta \in \mathcal{L} \setminus \{\eta_{\varrho}\}$, on considère $\gamma(\eta)$ le point d'intersection entre la demi-droite $[\eta, \eta_{\varrho})$ et la frontière $\partial\mathcal{L}$ de $\mathcal{L}$. On a alors $\eta_{\varrho} \in]\eta, \gamma(\eta)[$, si bien que l'on peut poser

$$\eta_{\varrho} = \chi(\eta)\, \eta + (1 - \chi(\eta))\, \gamma(\eta) \qquad \text{avec } \chi(\eta) \in]0, 1[,$$

ou encore

$$\boldsymbol{\eta} = (1 + \tilde{\tau}(\boldsymbol{\eta}))\, \boldsymbol{\eta}_\varrho - \tilde{\tau}(\boldsymbol{\eta})\, \gamma(\boldsymbol{\eta}) \qquad \text{pour } \tilde{\tau}(\boldsymbol{\eta}) = \chi(\boldsymbol{\eta})^{-1} - 1 > 0 .$$

On sait d'autre part ([Rb], 2.7) que $\phi_g \colon \boldsymbol{\eta} = \log \boldsymbol{r} \mapsto \log |g|_r$ est une fonction convexe sur $\mathcal{L}$. Ainsi, on en déduit que

$$\phi_g(\boldsymbol{\eta}_\varrho) \leqslant \chi(\boldsymbol{\eta})\, \phi_g(\boldsymbol{\eta}) + (1 - \chi(\boldsymbol{\eta}))\, \phi_g(\gamma(\boldsymbol{\eta})) ,$$

ou encore

$$\begin{aligned} \phi_g(\boldsymbol{\eta}) &\geqslant (1 + \tilde{\tau}(\boldsymbol{\eta}))\, \phi_g(\boldsymbol{\eta}_\varrho) - \tilde{\tau}(\boldsymbol{\eta})\, \phi_g(\gamma(\boldsymbol{\eta})) \\ &\geqslant (1 + \tilde{\tau}(\boldsymbol{\eta}))\, M' - \tilde{\tau}(\boldsymbol{\eta})\, M \\ &\geqslant M' - \tilde{\tau}(\boldsymbol{\eta})(M - M') \qquad \text{avec } M - M' \geqslant 0 . \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est encore valable en $\boldsymbol{\eta}_\varrho$ si on pose $\tilde{\tau}(\boldsymbol{\eta}_\varrho) = 0$. Il suffit donc de montrer que $\tilde{\tau}$ est majorée sur $\mathcal{L}$ par une constante τ.

Or, on a l'expression de $\tilde{\tau}(\boldsymbol{\eta})$ sous la forme

$$\forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{L}, \qquad \tilde{\tau}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\eta_i - (\boldsymbol{\eta}_\varrho)_i}{(\boldsymbol{\eta}_\varrho)_i - (\gamma(\boldsymbol{\eta}))_i}$$

dont on déduit la continuité de $\tilde{\tau}$ sur le compact $\mathcal{L}$.

On pose donc $\tau = \sup_{\mathcal{L}} \tilde{\tau} \in \mathbb{R}_+^*$, et le Lemme 1 est démontré. ∎

Nous obtenons à partir de ce Lemme une condition nécessaire et suffisante d'appartenance à $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{G})$ qui s'avérera plus maniable.

LEMME 2. *Soit $\boldsymbol{A}$ un élément de $\mathcal{O}_m^s$.*

Alors $\boldsymbol{A} \in \mathcal{H}^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{G})$ si et seulement s'il existe une suite $(S_h)_{h \in \mathbb{N}}$ avec $S_h \in M_m(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})$ vérifiant les conditions 1) *et* 2) *du Théorème* 2.1 *avec de plus la condition*

3′) $\exists \varrho \in \boldsymbol{I}^0$, $\exists h_0 \in \mathbb{N}$, $\exists K' < 0$, tels que $\forall h \geqslant h_0$,

$$\log |\det S_h|_\varrho \geqslant K' h .$$

PREUVE. La condition 3′) étant plus faible que la condition 3), il suffit de traiter la condition suffisante.

Supposons par conséquent que $\boldsymbol{A}$ et (S_h) vérifient 1), 2) et 3′). On cherche à construire une suite $(\tilde{S}_h)$ qui vérifie vis-à-vis de A les conditions 1), 2) et 3) du Théorème 2.1.

Prenons $\tilde{S}_0 = I_m$, et pour $h > 0$, $\tilde{S}_h = \lambda_h S_h$ avec $\lambda_h \in \Omega$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{N}^*, \qquad K_{\mathcal{C},\varrho} h \leqslant \log |\lambda_h| \leqslant (K_{\mathcal{C},\varrho} + 1) h , \tag{1}$$

pour $K_{\mathcal{C},\varrho} > 0$ constante indépendante de h à préciser ultérieurement (λ_h existe nécessairement par densité de $|\Omega|$ dans $\mathbb{R}_+$).

Sans condition supplémentaire sur $K_{\mathcal{C},\varrho}$, les conditions 1) et 2) du Théorème 2.1 sont alors vérifiées avec une nouvelle constante $\tilde{K} = K_{\mathcal{C},\varrho} + 1 + K$.

Notons $g_h := \det S_h$, et $\tilde{g}_h := \det \tilde{S}_h = \lambda_h^m g_h$. Pour tout $h \in \mathbb{N}$, la condition 2) et (1) imposent comme majoration

$$\log \|\tilde{g}_h\|_{\mathcal{C}} \leqslant [m(K_{\mathcal{C},\varrho} + 1) + K] h . \tag{2}$$

Pour $h \geqslant h_0$, la condition 3') et (1) imposent comme minoration

$$\log |\tilde{g}_h|_\varrho \geqslant [mK_{\mathcal{C},\varrho} + K'] h \geqslant [mK_{\mathcal{C},\varrho} u + K'] h , \tag{3}$$

avec $0 < u < 1$ arbitraire.

Pour $0 < h < h_0$, on a d'autre part

$$\log |\tilde{g}_h|_\varrho \geqslant mK_{\mathcal{C},\varrho} h + \inf_{0<h<h_0} \{\log |g_h|_\varrho\} \geqslant [mK_{\mathcal{C},\varrho} u + K'] h , \tag{4}$$

à condition que

$$mK_{\mathcal{C},\varrho}(1-u) > K' \quad \text{et} \quad (mK_{\mathcal{C},\varrho}(1-u) - K') h_0 > - \inf_{0<h<h_0} \{\log |g_h|_\varrho\} . \tag{5_u}$$

Sous la condition (5_u), et pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\tilde{g}_h$ vérifie donc, par (3) et (4), les hypothèses du Lemme de minoration uniforme précédent. On en déduit que $\forall \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{I}^0$, $\forall h \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} \log |\tilde{g}_h|_r \geqslant (1+\tau)[mK_{\mathcal{C},\varrho} u + K'] h - \tau[m(K_{\mathcal{C},\varrho} + 1) + K] h , \\ \log |\tilde{g}_h|_r \geqslant [(1+\tau) u - \tau] mK_{\mathcal{C},\varrho} + (1+\tau) K' + \tau(m+K) . \end{cases} \tag{6}$$

On choisit donc $u_{\mathcal{C},\varrho} < 1$ suffisamment proche de 1 pour que $(1 + \tau) u_{\mathcal{C},\varrho} - \tau > 0$. Pour ce $u_{\mathcal{C},\varrho}$ fixé, on prend alors $K_{\mathcal{C},\varrho}$ vérifiant $(5_{u_{\mathcal{C},\varrho}})$ et la condition

$$[(1+\tau) u - \tau] mK_{\mathcal{C},\varrho} \geqslant - (1+\tau) K' - \tau(m+K) .$$

La minoration (6) donne alors la condition 3) du Théorème 2.1 pour $h \in \mathbb{N}^*$. Dans le cas où $h = 0$, la condition 3) est encore vérifiée, car $\tilde{S}_0 = I_m$.

Ainsi, la condition 3) est vérifiée pour tout $h \in \mathbb{N}$, et $\boldsymbol{A} \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{G})$. ∎

Nous allons vérifier à partir de ce Lemme 2 que l'ensemble $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{G})$ ne dépend pas, en fait, du choix du représentant $\boldsymbol{G}$.

Si $(\boldsymbol{e})$ est une base de $\mathcal{M}$ représentée par $\boldsymbol{G}$, et si $(\boldsymbol{f})$ CASest une base de $\mathcal{M}$ représentée par $\widetilde{\boldsymbol{G}}$, on a les relations suivantes, pour $H = Mat((\boldsymbol{e}),(\boldsymbol{f})) \in GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}})$:

$$\widetilde{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{G}_{[H]} := ((G_{\delta_1})_{[H]}, \ldots, (G_{\delta_s})_{[H]})$$

avec $(G_{\delta_i})_{[H]} := (\partial_{x_i} H) H^{-1} + H G_{\delta_i} H^{-1}$.

PROPOSITION 1. *Soit $\mathcal{M}$ un module libre de rang m à connexion intégrable ayant la propriété de Robba sur une polycouronne fermée $\mathcal{C}(\boldsymbol{I})$, et soit $(\boldsymbol{e})$ une base de $\mathcal{M}$.*

Alors l'ensemble $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{G})$ ne dépend pas de la représentation $\boldsymbol{G}$ de $\mathcal{M}$ dans $(\boldsymbol{e})$, et sera noté $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$.

PREUVE. Donnons-nous une autre base $(\boldsymbol{f})$ de $\mathcal{M}$.

Prenons $\boldsymbol{t} \in \mathcal{C}$ et $\boldsymbol{x} \in D(\boldsymbol{t}, |\boldsymbol{t}|^-)$. La solution matricielle locale du système linéaire aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_{x_1} Y(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) = \widetilde{\boldsymbol{G}}_1(\boldsymbol{x})\, Y(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \partial_{x_s} Y(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) = \widetilde{\boldsymbol{G}}_s(\boldsymbol{x})\, Y(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) \\ Y(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}) = I_m \end{cases}$$

est donnée par

$$Y_{\widetilde{G}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) = H(\boldsymbol{x})\, Y_G(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})\, H(\boldsymbol{t})^{-1}.$$

On a donc pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$ et $\zeta \in \Gamma_h^s$,

(1) $$Y_{\widetilde{G}}(\boldsymbol{x}, \zeta\boldsymbol{x}) = H(\zeta\boldsymbol{x})\, Y_G(\boldsymbol{x}, \zeta\boldsymbol{x})\, H(\boldsymbol{x})^{-1}.$$

Si on considère (S_h) associée à un élément $\boldsymbol{A} \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{G})$, on pose $T_h(\boldsymbol{x}) := S_h(\boldsymbol{x})\, H(\boldsymbol{x})^{-1}$.

En vue de la relation (1), (T_h) vérifie bien la condition 1) du Théorème 2.1 . La condition 2) est également vérifiée pour une nouvelle constante

$K' = K + \|H^{-1}\|_{\mathcal{C}}$, choisie de telle sorte que

$$\forall h \in \mathbb{N}, \qquad \log \|T_h\|_{\mathcal{C}} \leqslant K' h = Kh + \|H^{-1}\|_{\mathcal{C}} h\,.$$

Par le Lemme 2 précédent, il suffit alors de vérifier une condition du type 3′). Or, on a pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, et pour un certain $\boldsymbol{\varrho} \in \boldsymbol{I}^0$ donné préalablement,

$$\log |\det T_h|_{\boldsymbol{\varrho}} = \log |\det S_h|_{\boldsymbol{\varrho}} - \log |\det H|_{\boldsymbol{\varrho}} \geqslant - \log |\det H|_{\boldsymbol{\varrho}} \geqslant K' h\,,$$

si $K' = \min(0, -\log |\det H|_{\boldsymbol{\varrho}})$. Par conséquent, $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{G}) \subseteq \mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\widetilde{\boldsymbol{G}})$, et l'inclusion inverse s'obtient en permutant les rôles de (*e*) et (*f*). ■

Pour obtenir des propriétés plus fines sur l'ensemble $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$, nous allons utiliser une généralisation à plusieurs variables d'un lemme de zéros ([Dw], 1.2), qui nous servira sous la forme du Lemme 4.

LEMME 3. *Soit g une fonction analytique sur une polycouronne fermée $\mathcal{C}(\boldsymbol{I})$. On suppose que g vérifie les conditions suivantes*:

1) *Il existe $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^{*s}$ tel que pour tout $\boldsymbol{r}' \in \boldsymbol{I}$,*

$$\begin{cases} |\boldsymbol{z}| = \boldsymbol{r}' \\ g(\boldsymbol{z}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall 1 \leqslant i \leqslant s, \ \exists \mu_i \text{ valeurs distinctes de } z_i' \text{ telles que} \\ |z_i'| = r_i' \ \text{ et } g(z_1, \dots, z_{i-1}, z_i', z_{i+1}, \dots, z_s) = 0 \end{cases}$$

2) *il existe une constante M telle que* $\log \|g\|_{\mathcal{C}} \leqslant M$;

3) *pour tout $\boldsymbol{\varrho} \in \boldsymbol{I}^0$, on a* $\log |g|_{\boldsymbol{\varrho}} \geqslant 0$;

Alors, pour toute sous-polycouronne fermée $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(\boldsymbol{I}')$ de $\mathcal{C}(\boldsymbol{I})$ (donc avec $\boldsymbol{I}' \subset \boldsymbol{I}^0$), il existe une constante $\boldsymbol{K}_{\mathcal{C}'} \in (\mathbb{R}_+^*)^s$ telle que

$$\frac{M}{\mu_i} < K_{i, \mathcal{C}'} \quad (\forall i \in \langle 1, s \rangle) \ \Rightarrow \ \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{C}', \quad g(\boldsymbol{z}) \neq 0\,.$$

En particulier, g est inversible sur $\mathcal{C}'$ dans ce cas.

PREUVE. Traitons pour commencer le cas d'une polycirconférence de la forme $\mathcal{C}(\{\boldsymbol{\varrho}\})$ pour $\boldsymbol{\varrho} \in \boldsymbol{I}^0$. Pour une telle sous-polycouronne, nous allons montrer que la constante $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\varrho}}$ est donnée explicitement par la formule

$$(1) \qquad K_{i, \boldsymbol{\varrho}} = \left(\left(\log \frac{R_i}{\varrho_i} \right)^{-1} - \left(\log \frac{\varrho_i}{r_i} \right)^{-1} \right)^{-1}$$

où $\boldsymbol{I} = \prod_{i=1}^{s} [r_i, R_i]$.

Notons $L_\varrho(g)$ l'ensemble des indices $l' \in \mathbb{Z}^s$ en lesquels le maximum dans l'expression $|g|_\varrho := \max_{l \in \mathbb{Z}^s}\{|g_l|\varrho^l\}$ est atteint. Par ([Rb], 2.20), il nous suffit de montrer que si la condition

$$\frac{M}{\mu_i} < K_{i,\varrho} \tag{2}$$

est vérifiée, l'ensemble $L_\varrho(g)$ est réduit à un singleton.

Pour $\varrho \notin v(\Omega^s)$, g ne peut avoir de zéro dans $\mathcal{C}(\{\varrho\})$ sans même faire d'hypothèse. Supposons par conséquent que $\varrho \in v(\Omega^s)$.

Procédons par récurrence sur l'entier s.

Dimension $s = 1$.

On rappelle qu'en dimension 1 ([CR], 5.4.9), le nombre des zéros, comptés avec leur multiplicité, se trouvant dans $\mathcal{C}(\{\varrho\})$, vaut exactement

$$d^+\log|g|_\varrho - d^-\log|g|_\varrho,$$

où $d^+\log|g|_\varrho$ et $d^-\log|g|_\varrho$ désignent respectivement la dérivée à droite et la dérivée à gauche en $\log\varrho$ de la fonction $\log r \mapsto \log|g|_r$. Il nous suffit donc de voir que sous la condition (2), $d^+\log|g|_\varrho = d^-\log|g|_\varrho$.

Raisonnons par l'absurde. Par l'hypothèse 1), $d^+\log|g|_\varrho \neq d^-\log|g|_\varrho$ entraîne

$$d^+\log|g|_\varrho - d^-\log|g|_\varrho \geqslant \mu\,. \tag{3}$$

D'une part, on majore $d^+\log|g|_\varrho$ par la plus grande pente possible du polygone de valuation passant par le point $M_\varrho = (\log\varrho, \log|g|_\varrho)$ qui est

$$\frac{\log|g|_R - \log|g|_\varrho}{\log R - \log\varrho} \leqslant p^+ = \frac{M-0}{\log(R/\varrho)}$$

D'autre part, on minore $d^-\log|g|_\varrho$ par la plus petite pente possible du polygone de valuation

$$p^- = \frac{0-M}{\log(\varrho/r)}\,.$$

On a donc $p^+ - p^- = MK^{-1}$, et la condition (1) donne

$$d^+ \log |g|_\varrho - d^- \log |g|_\varrho \leq MK^{-1} < \mu ,$$

ce qui contredit bien (3).

DIMENSION $s \geq 2$. Pour initier un raisonnement par récurrence sur l'entier s, nous utiliserons, comme dans ([Rb], 2.20), la spécialisation de g en un point adéquat.

Reprenons la technique de démonstration de ([Rb], 2.20). Comme Ω est algébriquement clos, son corps des restes est infini, si bien qu'il existe $t_1 \in \Omega$ tel que $|t_1| = \varrho_1$, et

$$|g_{t_1}(x_2, \ldots, x_s)|_{(\varrho_2, \ldots, \varrho_s)} = |g|_{\boldsymbol{\varrho}},$$

où l'on a posé $g_{t_1}(x_2, \ldots, x_s) = g(t_1, x_2, \ldots, x_s)$. On remarque alors que g_{t_1} vérifie les trois conditions du Lemme au rang $s-1$.

Par hypothèse de récurrence, $L_{(\varrho_2, \ldots, \varrho_s)}(g_{t_1})$ est donc réduit à un singleton dès que la condition (2) est remplie pour $2 \leq i \leq s$, et pour les constantes $K_{i, \boldsymbol{\varrho}}$ données explicitement en (1) et indépendantes de la dimension $s-1$. Par conséquent, on a

$$\forall (x_2, \ldots, x_s) \in \mathcal{C}_{\varrho_2, \ldots, \varrho_s}, \qquad |g_{t_1}(x_2, \ldots, x_s)| = |g_{t_1}|_{(\varrho_2, \ldots, \varrho_s)}.$$

Prenons donc maintenant $\boldsymbol{t}_{\hat{1}} = (t_2, \ldots, t_s)$ un point quelconque de $\mathcal{C}_{(\varrho_2, \ldots, \varrho_s)}$, et notons

$$g_{t_{\hat{1}}}(x_1) := g(x_1, t_2, \ldots, t_s).$$

$g_{\geq \hat{1}}$ vérifie les hypothèses 1) et 2) du Lemme 3 pour la couronne $\mathcal{C}(\{\varrho_1\})$. D'autre part,

$$|g_{\geq \hat{1}}|_{\varrho_1} \leq |g|_{\boldsymbol{\varrho}} = |g_{t_1}|_{(\varrho_2, \ldots, \varrho_s)} = |g_{t_1}(\boldsymbol{t}_{\hat{1}})| = |g_{t_{\hat{1}}}(t_1)| \leq |g_{t_{\hat{1}}}|_{\varrho_1}.$$

Par conséquent, $g_{t_{\hat{1}}}$ vérifie également la condition 3) du Lemme 3.

En appliquant aux fonctions $g_{t_{\hat{1}}}$ le résultat pour $s = 1$ avec la constante (indépendante de $\boldsymbol{t}_{\hat{1}}$)

$$K_{1, \varrho} = \left(\left(\log \frac{R_1}{\varrho_1}\right)^{-1} - \left(\log \frac{\varrho_1}{r_1}\right)^{-1}\right)^{-1},$$

on voit que si $M/\mu_1 < K_{1, \varrho}$, quel que soit $x_1 \in \mathcal{C}_1$, $g_{t_{\hat{1}}}(x_1) \neq 0$. Ceci achève la démonstration par récurrence sur s lorsque $\mathcal{C}'$ est une polycirconférence de la forme $\mathcal{C}(\{\boldsymbol{\varrho}\})$.

Dans le cas général d'une sous-polycouronne fermée $\mathcal{C}(\boldsymbol{I}')$ de $\mathcal{C}$ (donc avec $I' \subset I$), on considère

$$K_{i,\mathcal{C}'} = \inf_{\varrho \in I'} K_{i,\varrho}.$$

Par compacité de I' et par continuité de l'application $\varrho \mapsto K_{i,\varrho}$ sur I', $K_{i,\mathcal{C}'}$ est strictement positif. Pour ce choix de $K_{i,\mathcal{C}'}$, le Lemme est alors conséquence du cas de la polycirconférence $\mathcal{C}(\{\varrho\})$, appliqué pour tout $\varrho \in I' \subseteq \subseteq I^0$. Comme la fonction g ne s'annule pas sur $\mathcal{C}'$, elle y est inversible en tant qu'élément de $\mathcal{A}_{\mathcal{C}'}$ par ([Rb], 8.1). ■

LEMME 4. *Soit $\mathcal{C}'$ une sous-polycouronne fermée de $\mathcal{C}$, $A \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$, et (S_h) une suite d'éléments de $M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}})$ vérifiant pour A les conditions* 1), 2) *et* 3) *du Théorème* 2.1.

Alors il existe $h_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $h \geq h_0$,

$$S_h \in GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}'}).$$

PREUVE. Vérifions que quelque soit $h \in \mathbb{N}$, $g_h := \det S_h$ satisfait, grâce aux conditions 1), 2) et 3) du Théorème 2.1, les hypothèses 1), 2) et 3) du Lemme 3 précédent avec $\boldsymbol{\mu} = (p^h, \ldots, p^h)$ et $M = Kh$.

En effet, c'est direct pour les conditions 2) et 3). D'autre part, si on prend le déterminant des deux membres de la condition 1) du Théorème 2.1, on trouve que: $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$, $\forall \boldsymbol{\zeta} \in \Gamma_h^s$,

$$\prod_{i=1}^{s} \zeta_i^{\sum_{j=1}^{m}(A_i)_j} g_h(\boldsymbol{x}) = g_h(\boldsymbol{\zeta x}) \det Y_G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\zeta x});$$

Par le Lemme 2.1.1 et le 3) de la Proposition 1.2.1, on a

$$\left| \prod_{i=1}^{s} \zeta_i^{\sum_{j=1}^{m}(A_i)_j} \right| = 1 \qquad \text{et} \qquad |\det Y_G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\zeta x})| = 1,$$

si bien que $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$, $\forall \boldsymbol{\zeta} \in \Gamma_h^s$,

$$|g_h(\boldsymbol{x})| = |g_h(\boldsymbol{\zeta x})|.$$

Ainsi, si $\boldsymbol{z}$ est un zéro de g_h tel que $|\boldsymbol{z}| = \boldsymbol{r}'$, pour chaque entier i entre 1 et s, l'ensemble

$$\{\boldsymbol{\zeta}^{(i)}\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{\zeta}^{(i)} = (1, \ldots, 1, \zeta_i, 1, \ldots, 1) \in \Gamma_h^s\}$$

correspond à p^h zéros dinstincts de g_h. D'autre part, $|\boldsymbol{\zeta}^{(i)}| = (1, \ldots, 1)$ d'après le Lemme 2.1.1, si bien que $|\boldsymbol{\zeta}^{(i)}\boldsymbol{z}| = \boldsymbol{r}'$. On a donc vérifié précisément que la condition 3) du Lemme 3 est satisfaite pour la valeur particulière de $\boldsymbol{\mu}$ telle que $\mu_i = p^h$.

Donnons-nous une sous-polycouronne fermée $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$. Étant donné que

$$\lim_{h \to +\infty} \left(\frac{h}{p^h} \right) = 0 ,$$

on peut trouver effectivement un rang h_0 (dépendant de façon essentielle de $\mathcal{C}'$) tel que

$$\frac{M}{p^h} = \frac{Kh}{p^h} < \min_{1 \leqslant i \leqslant s} K_{i, \mathcal{C}'} .$$

En appliquant le Lemme 3 en dimension s à g_h, on en déduit que pour $h \geqslant h_0$, g_h est inversible sur $\mathcal{C}'$, si bien que $S_h \in GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}'})$. ∎

Nous sommes maintenant en mesure de montrer une propriété importante de l'ensemble $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ qui va être à la base de la définition de l'ensemble des exposants. Cela nécessite pour commencer de donner quelques définitions généralisant des définitions de dimension 1 ([CMII], 4.4.1) et ([Dw], 4.3).

DÉFINITIONS. *Pour* $a \in \mathbb{Z}_p$ *et* $h \in \mathbb{N}$, *on note*

$\overline{a}^{(h)} =$ *l'unique représentant de* $a^{(h)}$ *dans* $\mathbb{Z} \cap]-p^h/2, p^h/2]$.

Plus généralement pour $\boldsymbol{A} \in \mathcal{O}_m^s$ *et* h *dans* $\mathbb{N}$, *on définit* $\overline{\boldsymbol{A}}^{(h)}$ *composante par composante.*

Soient $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *dans* $\mathcal{O}_m^s$. *On dit que* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *sont* faiblement équivalents *si pour tout* $h \in \mathbb{N}$, *il existe une permutation* σ_h *de l'ensemble* $\langle 1, m \rangle$ *telle que*:

$$\forall i, \forall j, \forall h, \qquad |(\overline{A}_i^{(h)})_j - (\overline{B}_i^{(h)})_{\sigma_h(j)}|_\infty = O(h).$$

On remarque que si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont faiblement équivalents, A_i et B_i sont faiblement équivalents au sens de la dimension 1 pour chaque i. De plus, la condition ci-dessus est asymptotique. Il suffit donc de la vérifier pour h suffisamment grand.

Cette définition est alors motivée par le théorème d'unicité dans $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ suivant dont la démonstration va consister à reprendre les idées de la dimension 1 ([Dw], 4.4).

THÉORÈME 1. *Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont dans $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$, alors $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont faiblement équivalents.*

PREUVE. Considérons (S_h) et (T_h) deux suites associées respectivement à $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ par le Théorème 2.1. Étant donnée une sous-polycouronne fermée $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$, on peut trouver par le Lemme 4 un rang h_0 à partir duquel det T_h soit inversible dans $\mathcal{C}'$. Pour $h \geqslant h_0$, la matrice T_h est donc inversible sur $\mathcal{C}'$. On définit alors $Q_h = S_h T_h^{-1}$.

On vérifie dans ce cas que (Q_h) satisfait les conditions 2) et 3') du Lemme 2. Par contre, Q_h satisfait à une nouvelle équation fonctionnelle différente de 1), et qui est

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}', \forall \boldsymbol{\zeta} \in \Gamma_h^s, \qquad \boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{A}} Q_h(\boldsymbol{x}) = Q_h(\boldsymbol{\zeta x})\boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{B}}.$$

D'autre part, la condition 3') pour Q_h signifie que, pour h suffisamment grand, et $\boldsymbol{\varrho} \in \boldsymbol{I}^0$,

$$\log \Big| \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \varepsilon_\sigma \prod_{1 \leqslant j \leqslant m} (Q_h)_{j,\,\sigma(j)} \Big|_{\boldsymbol{\varrho}} \geqslant K_1 h .$$

$|\,.\,|_{\boldsymbol{\varrho}}$ étant une valeur absolue ultramétrique, au moins l'un des termes de cette somme est de valeur absolue supérieure ou égale à $K_1 h$. Par conséquent, il existe une permutation σ_h pour laquelle

$$\log\Big[\prod_{1 \leqslant j \leqslant m} |(Q_h)_{j,\,\sigma_h(j)}|_{\boldsymbol{\varrho}}\Big] \geqslant K_1 h . \tag{2}$$

La condition 2) du Lemme 2 donne quant à elle une majoration de la forme

$$\log |(Q_h)_{j,\,\sigma_h(j)}|_{\boldsymbol{\varrho}} \leqslant \log \|(Q_h)_{j,\,\sigma_h(j)}\|_{\mathcal{C}'} \leqslant K_2 h$$

de chacun des termes dans (2). Par (2), on en déduit une minoration de chacuns des termes de (2) sous la forme

$$\log |(Q_h)_{j,\,\sigma_h(j)}|_{\boldsymbol{\varrho}} \geqslant K_3 h . \tag{3}$$

D'après le Lemme 2, quitte à effectuer une homothétie sur chacune des m suites $(Q_h)_{j,\,\sigma_h(j)}$, tout en gardant la propriété 2) et l'équation (1), on peut supposer que pour tout j, et pour tout $\boldsymbol{\varrho} \in \boldsymbol{I}'^0$, (3) peut être remplacé par

$$\log |(Q_h)_{j,\,\sigma_h(j)}|_{\boldsymbol{\varrho}} \geqslant 0 . \tag{4}$$

Si on se donne alors une nouvelle sous-polycouronne fermée $\mathcal{C}''$ de $\mathcal{C}'$, on peut trouver à nouveau (Lemme 4) un rang à partir duquel toutes les fonctions $(Q_h)_{j,\sigma_h(j)}$ sont inversibles. Par ([Rb], prop. 2.20), on sait que dans chacune des expressions de $|(Q_h)_{j\sigma_h(j)}|_{\boldsymbol{\varrho}}$, le maximum est atteint en un unique indice $\mathbf{v}_{j,h} \in \mathbb{Z}^s$ indépendant de $\boldsymbol{\varrho} \in \mathcal{C}''$.

Par les inégalités (2) et (3), on sait donc que

$$(5)\qquad K_3 h \leqslant \log|(Q_h)_{j,\sigma_h(j)}|_{\boldsymbol{\varrho}} = \log|a_{\mathbf{v}_{j,h}}| + \sum_{i=1}^{s} (\mathbf{v}_i)_{j,h} \log \varrho_i \leqslant K_2 h\,,$$

valable pour tout $\boldsymbol{\varrho}$ dans une polycourone $\mathcal{C}'' = \mathcal{C}(\boldsymbol{I}'')$ de la forme

$$|\mathcal{C}''| = \prod_{i=1}^{s} [r_i'', R_i'']$$

avec $r_i'' < R_i''$. Si on soustrait les inégalités (5) obtenues pour $\boldsymbol{\varrho} = (r_1'', \ldots, r_i'', \ldots, r_s'')$ et les inégalités (5) obtenues pour $\boldsymbol{\varrho} = (r_1'', \ldots, R_i'', \ldots, r_s'')$, on trouve

$$-|K_3 - K_2|h \leqslant (\mathbf{v}_i)_{j,h}(\log R_i'' - \log r_i'') \leqslant |K_3 - K_2|h\,,$$

qui donne pour chaque i les inégalités

$$\widetilde{K_{3,i}}\, h \leqslant (\mathbf{v}_i)_{j,h} \leqslant \widetilde{K_{2,i}}\, h\,.$$

Pour $K_4 = \min_{i=1}^{s} \widetilde{K_{3,i}}$, et $K_5 = \max_{i=1}^{s} \widetilde{K_{2,i}}$, on a pour tout i, j et h,

$$(6)\qquad K_4 h \leqslant (\mathbf{v}_i)_{j,h} \leqslant K_5 h\,,$$

alors que par (1), on a pour tout j et h, pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}''$, et pour tout $\boldsymbol{\zeta} \in \Gamma_h^s$,

$$\boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{A}_j}(Q_h)_{j,\sigma_h(j)}(\boldsymbol{x}) = (Q_h)_{j,\sigma_h(j)}(\boldsymbol{\zeta x})\, \boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{B}_{\sigma_h(j)}}\,.$$

Si on décompose $(Q_h)_{j,\sigma_h(j)}$ sous forme de série de Laurent $\sum_{\boldsymbol{l} \in \mathbb{Z}^s} a_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{l}}$ sur $\boldsymbol{I}'$, on trouve par unicité du développement en série de Laurent sur $\mathcal{C}''$ ([Rb], 2.13)

$$\forall \boldsymbol{\zeta} \in \Gamma_h^s, \qquad \boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{A}_j} a_{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{l} + \boldsymbol{B}_{\sigma_h(j)}} a_{\boldsymbol{l}}.$$

On a donc $a_{\boldsymbol{l}} = 0$ dès qu'il existe un entier i tel que $l_i + (B_i)_{\sigma_h(j)} \not\equiv (A_i)_j [p^h]$. En particulier, comme $\mathbf{v}_{j,h}$ est un indice vérifiant $a_{\mathbf{v}_{j,h}} \neq 0$, on trouve finalement que pour tout i

$$(7)\qquad (\nu_i)_{j,h} \equiv (A_i)_j - (B_i)_{\sigma_h(j)} [p^h]\,.$$

En comparant alors (7) avec (6), on obtient

$$|(\overline{A}_i^{(h)})_j - (\overline{B}_i^{(h)})_{\sigma_h(j)}|_{+\infty} \leqslant \max(|K_4|, |K_5|)\, h = O(h). \qquad \blacksquare$$

Le Théorème 1 va motiver la définition suivante pour l'ensemble des exposants.

DÉFINITION. *On appelle* ensemble des exposants *de $\mathcal{M}$ sur la polycouronne $\mathcal{C}$, noté $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$, la classe d'équivalence faible dans $\mathcal{D}_m^s(\mathbb{Z}_p)$ d'un élément quelconque $\boldsymbol{A} \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$.*

Par le théorème précédent, $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ *ne dépend effectivement pas du choix de l'élément $\boldsymbol{A} \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$.*

Nous allons montrer maintenant que l'ensemble des exposants est invariant par spécialisation suivant une direction donnée sous la forme suivante.

THÉORÈME. 2. *Soit $\mathcal{M}$ un module différentiel libre de rang m ayant la propriété de Robba sur une polycouronne fermée $\mathcal{C}_\Omega$. Prenons $\boldsymbol{A} \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$, $i \in \langle 1, s\rangle$ et $\boldsymbol{x_{\hat{\imath}}} \in \mathcal{C}(\boldsymbol{I}_{\hat{\imath}}^0)$.*

Alors $A_i \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}_i}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{x_{\hat{\imath}}}})$, et plus précisément si (S_h) est associée à $\boldsymbol{A}$, $((S_h)_{\boldsymbol{x_{\hat{\imath}}}})$ est associée à A_i sur $\mathcal{C}_i$.

En particulier, l'ensemble des exposants $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}_i}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{x_{\hat{\imath}}}})$ est indépendant du choix de $\boldsymbol{x_{\hat{\imath}}}$, correspond à une classe d'équivalence faible notée $\mathfrak{Exp}_i^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ et sera appelé ensemble des exposants suivant la i-ième variable.

PREUVE. Soit (S_h) une suite associée à $\boldsymbol{A} \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{G})$, vérifiant les conditions 1), 2) et 3) du Théorème 2.1. Il s'agit alors de trouver une suite (T_h) d'éléments de $M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}_1})$ associée à A_i, et vérifiant les conditions $\tilde{1}$), $\tilde{2}$) et $\tilde{3}$) pour le module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{x_{\hat{\imath}}}}$ obtenu par spécialisation de $\mathcal{M}$ en $\boldsymbol{x_{\hat{\imath}}}$.

Choisissons, comme indiqué dans le Théorème, $T_h(x_i) = S_h(x_i, \boldsymbol{x_{\hat{\imath}}}) = (S_h)_{\boldsymbol{x_{\hat{\imath}}}}(x_i)$ qui est bien dans $M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}_i})$. La condition 1) pour $\zeta_1 = \ldots = \zeta_{i-1} = \zeta_{i+1} = \ldots = \zeta_s = 1$ donne alors précisément la condition $\tilde{1}$), alors que la condition 2) donne $\tilde{2}$) avec $\widetilde{K} = K$. La principale difficulté de la démonstration est de montrer que la minoration 3) se comporte bien par spécialisation.

Donnons-nous $r_i \in I_i^0$, et pour $\boldsymbol{r_{\hat{\imath}}} = |\boldsymbol{x_{\hat{\imath}}}|$, notons $\boldsymbol{r} := (r_i, \boldsymbol{r_{\hat{\imath}}})$ élément de $\boldsymbol{I}^0$. Si on pose $g_h :=$ det S_h, on sait par hypothèse que $|g_h|_r \geqslant 1$. Or, par le Lemme 4 précédent, g_h est inversible dans $\mathcal{C}(\{\boldsymbol{r}\})$ pour $h \geqslant h_0$, si bien que par ([Rb], 2.20), on trouve $|g_h(., \boldsymbol{x_{\hat{\imath}}})|_{r_i} = |g_h|_r \geqslant 1$. (T_h) vérifie donc la condition 3') du Lemme 2, ce qui permet de conclure sur le fait que $A_i \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}_i}(\mathcal{M}_{x_i})$. Par définition, l'ensemble $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}_i}(\mathcal{M}_{x_i})$ coïncide avec la classe d'équivalence faible dans $\mathcal{O}^s_m(\mathbb{Z}_p)$ de A_i indépendant du choix de $\boldsymbol{x_i}$. $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}_i}(\mathcal{M}_{x_i})$ est donc constant comme indiqué dans l'énoncé du Théorème. ∎

Nous allons détailler quelques autres propriétés d'invariances de $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ qui vont nous permettre de donner une définition cohérente de $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ sur une polycouronne et un corps de base quelconques.

PROPOSITION 2. *Soit $\mathcal{M}$ un module libre de rang m à connexion intégrable ayant la propriété de Robba sur une polycouronne fermée $\mathcal{C}_\Omega(\boldsymbol{I})$. Alors l'ensemble des exposants $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{C}$ est invariant par restriction à une sous-polycouronne fermée $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$, et par toute extension de corps valué algébriquement clos Ω' de Ω.*

PREUVE. On définit $\mathcal{M}'$ à partir de $\mathcal{M}$ par extension du corps de base Ω à Ω' sans changer la connexion. Il s'agit d'un module libre de rang m à connexion intégrable ayant la propriété de Robba sur $\mathcal{C}_{\Omega'}$. Par définition de $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$, il suffit alors de montrer que $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M}') \cap \mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ contient un élément $\boldsymbol{A}$, ce qui se vérifie immédiatement sur les conditions 1), 2) et 3) du Théorème 2.1 pour $S_h = R_{h,\boldsymbol{A}}$.

Si $\mathcal{C}'$ est une sous-polycouronne fermée de $\mathcal{C}$, on note cette fois-ci $\mathcal{M}'$ le module $\mathcal{M}$ dans lequel les éléments de $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$ sont vu comme des éléments de $\mathcal{A}_{\mathcal{C}'}$. Il suffit alors de montrer que $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}'}(\mathcal{M}')$ ce qui se vérifie immédiatement sur les conditions 1), 2) et 3) du Théorème 2.1. ∎

Pour $\mathcal{M}$ un module libre de rang m à connexion intégrable ayant la propriété de Robba sur une polycouronne quelconque $\mathcal{C}_K$ avec K un corps p-adique quelconque, on définit $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ à partir de $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}'_\Omega}(\mathcal{M}_{|\mathcal{C}'_\Omega})$ pour le choix d'une extension algébriquement close Ω de K, et d'une sous-polycouronne fermée $\mathcal{C}'_\Omega$ de $\mathcal{C}_\Omega$.

Par la Proposition précédente, l'ensemble $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ est indépendant de ces choix.

REMARQUES. • *On ignore si, en toute généralité, les ensembles $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ et $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ coïncident. Comme on le verra au paragraphe sui-*

vant, si on impose la condition (DNL) *à* $\mathfrak{E}\mathrm{xp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$, *on peut en revanche répondre à cette question par l'affirmative. On rencontrera le même genre de problème au* § 3.2 *avec des ensembles* $\mathcal{H}$ et $\mathfrak{E}$.

• *La donnée, pour tout* $i \in \langle 1, s \rangle$, *des ensembles* $\mathfrak{E}\mathrm{xp}_i^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ *ne suffit pas en général pour reconstituer* $\mathfrak{E}\mathrm{xp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$. *En effet, si* $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{E}\mathrm{xp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$, *il n'y a aucune raison a priori pour que, par exemple, l'élément* $\boldsymbol{A}' = ((A_1)_{\sigma_1(j)}, (A_2)_j, \ldots, (A_s)_j)$ *soit dans* $\mathfrak{E}\mathrm{xp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ pour σ_1 une permutation non triviale de m éléments. Ceci correspond au fait que $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ peuvent ne pas être faiblement équivalents tandis que pour chaque i, A_i et B_i le sont.

2.3. *Propriétés remarquables pour les exposants.*

On donne dans ce paragraphe quelques définitions et résultats sur des propriétés remarquables des exposants en dimension s qui sont des généralisations plus ou moins directes du cas de la dimension 1.

DÉFINITIONS. • *Pour* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{O}_m^s$, *on dit que* $\boldsymbol{A}$ *a la* propriété (DNE) (D*ifférences* N*on*-E*ntières*), *si*

$$\forall i \text{ et } \forall k < l, \quad (A_i)_k - (A_i)_l \notin \mathbb{Z}^*.$$

On dit que $\boldsymbol{A} \in \mathcal{O}_m^s$ *a la* propriété (DNL) (D*ifférences* N*on*-L*iouville*), *si chacune de ces composantes* A_i *a la propriété* (DNL) *en dimension* 1 ([CMII], 4.3), *i.e.*

$$\forall i \text{ et } \forall k < l, \quad (A_i)_k - (A_i)_l \notin \mathcal{L},$$

pour $\mathcal{L}$ *l'ensemble des nombres de Liouville* (*on dit aussi que* $(A_i)_k - (A_i)_l$ *a la* propriété (NL)).

Les propriétés (DNE) *et* (DNL) *peuvent se vérifier composante par composante et se voient, pour chaque composante* i, *sur l'ensemble des classes* (*sans tenir compte des multiplicités*) $\{\overline{(A_i)_1}, \ldots, \overline{(A_i)_s}\} \in (\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z})^k$.

• *On dit que* $\mathfrak{E}\mathrm{xp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ *a la* propriété (DNL) *s'il existe un élément* $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{E}\mathrm{xp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ *ayant la propriété* (DNL). *Nous allons voir dans la Proposition* 1 *que cela ne dépend pas du choix de* $\boldsymbol{A}$. *En vue de cela, nous introduisons sur le modèle de la dimension* 1 ([Dw], 4.4.9) *une nouvelle relation d'équivalence sur* $\mathcal{O}_m^s$.

• *Nous aurons besoin également de définir une nouvelle relation d'équivalence sur* $\mathcal{O}_m^s$: *on dit que* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *dans* $\mathcal{O}_m^s$ *sont* fortement équivalents, *s'il existe une permutation* σ *de l'ensemble* $\langle 1, m\rangle$ *telle que*

$$\forall i, \forall j, \qquad (A_i)_j - (B_i)_{\sigma(j)} \in \mathbb{Z}\,.$$

On remarque immédiatement que si $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *sont fortement équivalents, ils sont faiblement équivalents. Nous allons voir dans la proposition suivante que la réciproque de ce résultat a lieu dans le cas où* $\boldsymbol{A}$ *ou* $\boldsymbol{B}$ *a la propriété* (DNL).

PROPOSITION 1. *Supposons que* $\mathfrak{Exp}^{\mathbb{C}}(\mathcal{M})$ *a la propriété* (DNL). *Alors* $\mathfrak{Exp}^{\mathbb{C}}(\mathcal{M})$ *coïncide avec une classe d'équivalence forte. En particulier,* $\mathfrak{Exp}^{\mathbb{C}}(\mathcal{M})$ *est égal à* $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}(\mathcal{M})$ *dont tous les éléments ont la propriété* (DNL), *et il existe toujours un élément dans* $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}(\mathcal{M})$ *ayant simultanément les propriétés* (DNE) *et* (DNL).

PREUVE. Soit $\boldsymbol{A}$ un élément de $\mathfrak{Exp}^{\mathbb{C}}(\mathcal{M})$ ayant la propriété (DNL), et $\boldsymbol{B}$ faiblement équivalent à $\boldsymbol{A}$. Pour i fixé, on trouve dans la démonstration de l'analogue de la Proposition 1 pour la dimension 1 ([Dw], th. 5.2) le fait suivant: si $\sigma_{i,h}$ est une permutation telle que

$$|(\overline{A}_i^{(h)})_j - (\overline{B}_i^{(h)})_{\sigma_{i,h}(j)}|_{+\infty} = O(h)\,, \tag{1}$$

et si A_i a la propriété (DNL), il existe un rang h_0 à partir duquel les permutations $\sigma_{i,h}$ sont égales à une même permutation σ_i pour laquelle

$$\forall j, \qquad (A_i)_j - (B_i)_{\sigma_i(j)} \in \mathbb{Z}\,.$$

Or, comme $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont faiblement équivalents, il existe une suite de permutations (σ_h), indépendante de i, telle $\sigma_{i,h} = \sigma_h$ vérifie toujours (1). Comme $\boldsymbol{A}$ a la propriété (DNL), chaque composante A_i a encore cette propriété, et on en déduit que pour h suffisamment grand, σ_h est une permutation constante σ telle que

$$\forall i, \forall j, \qquad (A_i)_j - (B_i)_{\sigma(j)} \in \mathbb{Z}\,. \tag{2}$$

$\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont fortement équivalents par (2), et on a donc montré que $\mathfrak{Exp}^{\mathbb{C}}(\mathcal{M})$ coïncidait avec la classe d'équivalence forte de $\boldsymbol{A}$.

Pour ce qui reste de la proposition, partons maintenant d'un élément $\boldsymbol{A} \in \mathcal{H}^{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{Exp}^{\mathbb{C}}(\mathcal{M})$, et de $\boldsymbol{B}$ quelconque dans $\mathfrak{Exp}^{\mathbb{C}}(\mathcal{M})$. Par ce qui précède, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont fortement équivalents. En conséquence, il existe $\boldsymbol{C} \in \mathcal{D}_m^s(\mathbb{Z})$ telle que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}$. Il est alors immédiat de vérifier comme en dimension 1 ([Dw], 4.1) que si (S_h) est une suite associée à $\boldsymbol{A}$ comme dans le Théorème 2.1, $(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{C}} S_h)$ est associée à

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}$. Ainsi $\boldsymbol{B}$ est élément de $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$, et on a montré l'égalité $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M}) = \mathfrak{E}\mathrm{xp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$.

Comme on l'a déjà remarqué, si $\boldsymbol{A}$ a la propriété (DNL), on vérifie composante par composante que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}$, pour $\boldsymbol{C} \in \mathcal{O}_m^s(\mathbb{Z})$, a la propriété (DNL).

Enfin, si $\boldsymbol{A}$ n'a pas la propriété (DNE), il suffit d'ajouter $\boldsymbol{C}$ choisi de façon adéquate pour que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ ait simultanément les propriétés (DNE) et (DNL). ■

Soit K un corps p-adique valué non nécessairement algébriquement clos. Un exemple important de modules différentiels ayant des exposants avec la propriété (DNL) est donné par des modules différentiels sur le bord d'un polydisque $D_K(0, 1^-)$, et ayant une structure de Frobenius au sens suivant (généralisation de ([CMII], 5.5.2)).

DÉFINITIONS. *On note* $\mathcal{R}_K(\mathbf{1})$ *l'anneau des* fonctions analytiques au bord du polydisque $D_K(0, \mathbf{1}^-)$, *c'est-à-dire*

$$\mathcal{R}_K(\mathbf{1}) = \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{A}_{\mathcal{C}_K(]1-\varepsilon,\, 1[^s)}.$$

On munit $\mathcal{R}_K(1)$ *d'un* morphisme de Frobenius

$$\begin{array}{rccc} \phi^*: & \mathcal{R}_K(\mathbf{1}) & \to & \mathcal{R}_K(\mathbf{1}) \\ & \sum\limits_{l \in \mathbf{Z}^s} a_l \boldsymbol{x}^l & \mapsto & \sum\limits_{l \in \mathbf{Z}^s} a_l \boldsymbol{x}^{pl}. \end{array}$$

Soit $\widehat{\mathcal{M}}$ *un* $\mathcal{R}_K(\mathbf{1})$*-module libre de rang m à connexion intégrable. On dit que* $\widehat{\mathcal{M}}$ *a une* structure de Frobenius *s'il existe un isomorphisme de modules à connexion pour lequel*

$$\phi^*(\widehat{\mathcal{M}}) \simeq \widehat{\mathcal{M}}.$$

Comme pour la dimension 1 ([CMII], 5.5.2), on dit que $\widehat{\mathcal{M}}$ a la propriété de Robba s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le module $\widehat{\mathcal{M}}_\varepsilon$ induit par $\widehat{\mathcal{M}}$ ait la propriété de Robba sur $\mathcal{C}_\varepsilon = \mathcal{C}_K(]1-\varepsilon,\, 1[^s)$. On définit ensuite $\mathfrak{E}\mathrm{xp}(\widehat{\mathcal{M}})$ comme étant $\mathfrak{E}\mathrm{xp}^{\mathcal{C}_\varepsilon}(\widehat{\mathcal{M}}_\varepsilon)$ qui est alors indépendant du choix de ε suffisamment petit par la Proposition 2.2.2. On a la proposition suivante qui fournit un exemple important de module dont l'ensemble des exposants a automatiquement la propriété (DNL):

PROPOSITION 2. *Soit $\widehat{\mathcal{M}}$ un $\mathcal{R}_K(1)$-module libre de rang m à connexion intégrable ayant la propriété de Robba. Supposons que $\widehat{\mathcal{M}}$ a une structure de Frobenius.*

Alors $\mathfrak{Exp}(\widehat{\mathcal{M}}) \subseteq \mathcal{D}^s_m(\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q})$. *En particulier,* $\mathfrak{Exp}(\widehat{\mathcal{M}})$ *a la propriété* (DNL).

PREUVE. Soit ε tel que le module $\widehat{\mathcal{M}}_\varepsilon$ induit par $\widehat{\mathcal{M}}$ ait la propriété de Robba sur $\mathcal{C}_\varepsilon$. Considérons $\boldsymbol{A} \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}_\varepsilon}(\widehat{\mathcal{M}}_\varepsilon)$. Par la Proposition précédente, il suffit de montrer que $\boldsymbol{A} \in \mathcal{D}^s_m(\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q})$. En vue de cela, nous allons montrer que $p\boldsymbol{A} := (pA_1, \ldots, pA_s) \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}'_\varepsilon}(\phi^*(\widehat{\mathcal{M}}_\varepsilon))$ pour $\mathcal{C}'_\varepsilon =](1-\varepsilon)^{1/p}, 1[^s \subset \mathcal{C}_\varepsilon$. On vérifie à l'aide de la Proposition 1.2.2 que ceci a un sens du fait que $\phi^*(\widehat{\mathcal{M}}_\varepsilon)$ a la propriété de Robba sur $\mathcal{C}'_\varepsilon$. Soit (S_h) une suite associée à $\boldsymbol{A}$ comme dans le Théorème 2.1. La condition 1) de ce Théorème impose l'identité

$$(1) \qquad \forall h \in \mathbb{N}, \quad \forall \boldsymbol{\zeta} \in \Gamma^s_h, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_\varepsilon, \qquad \boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{A}} S_h(\boldsymbol{x}) = S_h(\boldsymbol{\zeta x})\, Y_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\zeta x}),$$

où $\boldsymbol{G}$ représente $\widehat{\mathcal{M}}_\varepsilon$ dans la base $(\boldsymbol{e})$ qui était fixée.

Pour $h' \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{\zeta}' \in \Gamma^s_{h'}$ et $\boldsymbol{x}' \in \mathcal{C}'_\varepsilon$, on applique (1) avec

$$\begin{cases} h = h' - 1 & \in \mathbb{N}, \\ \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}'^p & \in \Gamma^s_h, \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'^p & \in \mathcal{C}_\varepsilon. \end{cases}$$

On obtient

$$\boldsymbol{\zeta}'^{p\boldsymbol{A}} S_{h'-1}(\boldsymbol{x}'^p) = S_{h'-1}(\boldsymbol{\zeta}'^p \boldsymbol{x}'^p)\, Y_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}'^p, \boldsymbol{\zeta}'^p \boldsymbol{x}'^p),$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$(2) \qquad \boldsymbol{\zeta}'^{p\boldsymbol{A}} T_{h'}(\boldsymbol{x}') = T_{h'}(\boldsymbol{\zeta}' \boldsymbol{x}')\, Y_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{\zeta}' \boldsymbol{x}'),$$

avec $T_{h'}(\boldsymbol{x}') = S_{h'-1}(\boldsymbol{x}'^p) \in M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}'_\varepsilon})$ et $F_{\delta_i}(\boldsymbol{x}') = px_i'^{p-1} G_{\delta_i}(\boldsymbol{x}'^p)$ par les règles de dérivations d'une composée de fonctions. D'autre part, l'équation (2) est vérifiée pour $h' = 0$ et $T_0 = I_m$, car pour $\boldsymbol{\zeta}' \in \Gamma^s_0 = \{(1, \ldots, 1)\}$, $Y_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{\zeta}'\boldsymbol{x}') = Y_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}') = I_m$. Par définition de $\phi^*(\widehat{\mathcal{M}}_\varepsilon)$, l'équation (2) correspond exactement à la condition 1) du Théorème 2.1. Les conditions 2) et 3) du Théorème 2.1 pour la suite (S_h) imposent, quant à elles, les conditions 2) et 3) pour $(T_{h'})$ par le fait que pour g une fonction analytique $|g(\boldsymbol{x}'^p)|_\varrho = |g(\boldsymbol{x}')|_{\varrho^p}$. Par conséquent, $p\boldsymbol{A}$ est un élément de $\mathcal{H}^{\mathcal{C}'_\varepsilon}(\phi^*(\widehat{\mathcal{M}}_\varepsilon))$ comme annoncé. Comme $\widehat{\mathcal{M}} \simeq \phi^*(\widehat{\mathcal{M}})$, il existe un élément $H \in GL_m(\mathcal{R}_K(1))$ tel que

$$(3) \qquad \forall i, \qquad \partial_{x_i} H(\boldsymbol{x}) = H(\boldsymbol{x}) G_{\delta_i}(\boldsymbol{x}) - p x_i^{p-1} G_{\delta_i}(\boldsymbol{x}^p) H(\boldsymbol{x}).$$

Choisissons $\varepsilon' > 0$ suffisamment petit pour que $H \in GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}_{\varepsilon'}})$. D'après l'équation (3), $p\boldsymbol{A} \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}'_{\varepsilon'}}(\boldsymbol{G}) = \mathcal{H}^{\mathcal{C}'_{\varepsilon'}}(\widehat{\mathcal{M}_\varepsilon})$ alors que $\boldsymbol{A} \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}_\varepsilon}(\widehat{\mathcal{M}_\varepsilon}) \subset \mathcal{H}^{\mathcal{C}'_{\varepsilon'}}(\widehat{\mathcal{M}_\varepsilon})$. On en déduit par le Théorème 2.2.1 dans $\mathcal{H}^{\mathcal{C}'_{\varepsilon'}}(\widehat{\mathcal{M}_\varepsilon})$ que $\boldsymbol{A}$ et $p\boldsymbol{A}$ sont faiblement équivalents. Ainsi, chacune des composantes A_i et pA_i sont faiblement équivalentes, et on peut appliquer le résultat correspondant à la dimension 1 ([CMII], prop. 5.5.3) qui est valable sans hypothèses sur le corps de base. Pour tout i, A_i est élément de $\mathcal{D}_m(\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q})$ ce qui veut dire que $\boldsymbol{A}$ appartient à $\mathcal{D}_m^s(\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q})$ et qui achève notre démonstration. ■

3. Structure fuchsienne d'un module différentiel de Robba.

Ce troisième et dernier chapitre consiste à démontrer que sur un corps p-adique quelconque, tout module différentiel $\mathcal{M}$ ayant la propriété de Robba sur une polycouronne ouverte, et soumis à la condition (DNL) pour ses exposants, se réduit à une forme normale de Fuchs que nous définissons précisément.

Au § 3.1, nous établissons, à l'aide de la suite d'approximants (S_h) associée à un exposant $\boldsymbol{A}$ bien choisi, un passage à la limite à plusieurs variables, avec une légère condition sur le corps de base K. Nous utilisons le résultat dans le cas d'une variable traité dans [Dw], et l'analogue ultramétrique du théorème de Hartogs démontré au § 1.1.

Au § 3.2, nous donnons deux définitions équivalentes de la notion de structure fuchsienne sur une polycouronne ouverte. Par le passage à la limite précédent, la restriction à $\mathcal{C}^0$ d'un module différentiel $\mathcal{M}$ libre de rang m sur une polycouronne fermée $\mathcal{C}_K$ ayant la propriété de Robba, et dont l'ensemble des exposants $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ a la propriété (DNL), admet une structure fuchsienne sur $\mathcal{C}_K^0 \neq \emptyset$ sous la forme de la première définition. On montre ensuite grâce à la deuxième définition, plus intrinsèque, comment supprimer toute hypothèse sur K.

3.1. *Passage à la limite.*

Soit K un corps p-adique et Ω une extension de corps valué algébriquement clos de K. Pour $\mathcal{M}$ un module sur une polycouronne $\mathcal{C}_K$, on notera encore $\mathcal{M}$ le module sur $\mathcal{C}_\Omega$ obtenu par extension des scalaires de K

à Ω. On rappelle que par la Proposition 2.2.2, l'ensemble des exposants $\mathfrak{E}\mathrm{xp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ ne dépend pas du choix de Ω. On note $\mathcal{C}^0$ la polycouronne ouverte correspondant à $\mathcal{C}(\boldsymbol{I}^0)$ où $\boldsymbol{I}^0$ désigne l'intérieur de $\boldsymbol{I}$.

Nous utiliserons de façon essentielle le passage à la limite effectué dans [Dw] en dimension 1 sous une forme très précise dont nous allons donner ici l'énoncé.

PROPOSITION 1 ([Dw], lem. 7.2). *Soit Ω un corps p-adique algébriquement clos, et soit $\mathcal{M}$ un module différentiel libre de rang m sur une couronne (de dimension* 1) *fermée $\mathcal{C}_\Omega$, ayant la propriété de Robba. Considérons (e) une base de $\mathcal{M}$ représentée par G, $A \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ ayant les propriétés* (DNE) *et* (DNL), *et (S_h) une suite associée à A et (e).*

Alors, il existe une suite (C_j) de matrices constantes inversibles dans Ω telle que pour tout x dans $\mathcal{C}^0$,

$$C_j S_{p^j}(x)$$

admet une limite $H(x)$ lorsque j tend vers $+\infty$, avec $H \in$ $\in GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}^0})$. ■

Nous allons généraliser cette proposition à la dimension supérieure sous une forme légèrement différente nous permettant d'effectuer une récurrence sur la dimension s. Ce résultat nécessitera le théorème d'indépendance des exposants par spécialisation et le théorème sur les fonctions séparément analytiques.

PROPOSITION 2. *Soit Ω un corps p-adique algébriquement clos, et soit $\mathcal{M}$ un module différentiel libre de rang m sur une polycouronne fermée $\mathcal{C}_\Omega$, ayant la propriété de Robba. Considérons $(\boldsymbol{e})$ une base de $\mathcal{M}$ représentée par $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{A} \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ ayant les propriétés* (DNE) *et* (DNL), *et (S_h) une suite associée à $\boldsymbol{A}$ et $(\boldsymbol{e})$.*

Alors, pour tout $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}$ dans $\mathcal{C}^0$,

$$S_{p^j}^{-1}(\boldsymbol{z})\, S_{p^j}(\boldsymbol{x})$$

admet, lorsque j tend vers $+\infty$, une limite $H(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) \in \Omega$ avec $H \in$ $\in GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}^0 \times \mathcal{C}^0})$.

PREUVE. Nous allons établir ce résultat par récurrence sur l'entier s.

Posons $T_j = S_{p^j}$, et donnons-nous $\mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}'$ une sous-polycouronne fermée de $\mathcal{C}$ (donc avec $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}^0$) et $\mathcal{C}''$ une sous-polycouronne ouverte de $\mathcal{C}'$ (donc avec $\mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}'^0$). L'ensemble des polycouronnes $\mathcal{C}''$ décrites comme ci-dessus (pour $\mathcal{C}'$ variable) coïncide avec l'ensemble des sous-polycouronnes ouvertes de $\mathcal{C}$. Par recollement ([Rb], cor. 2.15), il nous suffit donc de montrer que la conclusion de la Proposition 2 est valable sur $\mathcal{C}'' \times \mathcal{C}''$, pour la déduire sur $\mathcal{C}^0 \times \mathcal{C}^0$. On sait, d'autre part, par le Lemme 2.2.4, que $T_j \in GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}'})$ pour $j \geqslant j_0$.

Cas $s = 1$;

D'après la Proposition 1, la matrice

$$T_j^{-1}(z)\, T_j(x) = T_j^{-1}(z)\, C_j^{-1} C_j T_j(x)$$

admet bien une limite $H(z, x) = H(z)^{-1} H(x) \in GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}' \times \mathcal{C}'}) \subset GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}'' \times \mathcal{C}''})$.

Cas $s \geqslant 2$;

On fixe i le choix d'une coordonnée, $\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{x}$ dans $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}^0$. On pose alors dans $\mathcal{C}'$, pour $k \in \langle 1, s-i+1 \rangle$, $\boldsymbol{u}^{(k)} = (z_1, \ldots, z_i, \ x_{i+1}, \ldots, x_{k'-1}, z_{k'}, \ldots, z_s)$ avec $k' = k+i+1$, et pour $k \in \langle s-i+2, s \rangle$, $\boldsymbol{u}^{(k)} = (x_1, \ldots, x_{k''-1}, z_{k''}, \ldots, z_i, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ avec $k'' = k+i+1-s$. La suite $(\boldsymbol{u}^{(k)})_{k \in \langle 0, s \rangle}$ correspond à l'unique suite de $s+1$ éléments de $\mathcal{C}'$ telle que $\boldsymbol{u}^{(0)} = \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{u}^{(s)} = \boldsymbol{x}$, et pour $1 \leqslant k \leqslant s$, $\boldsymbol{u}^{(k)}$ diffère de $\boldsymbol{u}^{(k-1)}$ suivant la seule j_k-ième coordonnée pour

$$j_1 = i+1, \ldots, j_{s-i} = s, j_{s-i+1} = 1, \ldots, j_s = i\,.$$

On notera, respectivement,

$$\boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i,$$

les éléments de

$$\mathcal{C}^0_{\widehat{(i+1)}}, \ldots, \mathcal{C}^0_{\hat{s}}, \mathcal{C}^0_{\hat{1}}, \ldots, \mathcal{C}^0_{\hat{i}},$$

tels que

$$\boldsymbol{u}^{(1)} = (\boldsymbol{v}_{i+1}, x_{i+1}), \ldots, \boldsymbol{u}^{(s-i)} = (\boldsymbol{v}_s, x_s)\,,$$

$$\boldsymbol{u}^{(s-i+1)} = (\boldsymbol{v}_1, x_1), \ldots, \boldsymbol{u}^{(s)} = (\boldsymbol{v}_i, x_i)\,.$$

On peut alors décomposer, pour $j \geqslant j_0$, $T_j^{-1}(\boldsymbol{z})\, T_j(\boldsymbol{x})$ sous la forme

$$(1) \qquad T_j^{-1}(\boldsymbol{z})\, T_j(\boldsymbol{x}) = T_j^{-1}(\boldsymbol{u}^{(0)})\, T_j(\boldsymbol{u}^{(1)})\, T_j^{-1}(\boldsymbol{u}^{(1)})\, T_j(\boldsymbol{u}^{(2)}) \ldots T_j^{-1}(\boldsymbol{u}^{(s-1)})\, T_j(\boldsymbol{u}^{(s)})\,,$$

qui coïncide avec la forme suivante:

$$T_{j,\boldsymbol{v}_{i+1}}^{-1}(z_{i+1})\, T_{j,\boldsymbol{v}_{i+1}}(x_{i+1}) \ldots T_{j,\boldsymbol{v}_s}^{-1}(z_s)\, T_{j,\boldsymbol{v}_s}(x_s)\, T_{j,\boldsymbol{v}_1}^{-1}(z_1)\, T_{j,\boldsymbol{v}_1}(x_1) \ldots T_{j,\boldsymbol{v}_i}^{-1}(z_i)\, T_{j,\boldsymbol{v}_i}(x_i)\,.$$

Par la Théorème 2.2.2 d'indépendance de l'exposant par spécialisation suivant chaque coordonnée, on en déduit que

$$T_{j,\,v_{i+1}}(x_{i+1}),\ \ldots,\ T_{j,\,v_s}(x_s), \qquad T_{j,\,v_1}(x_1),\ \ldots,\ T_{j,\,v_i}(x_i)$$

sont des suites respectivement associées aux exposants

$$A_{i+1},\ \ldots,\ A_s, \qquad A_1,\ \ldots,\ A_i$$

qui ont tous simultanément les propriétés (DNE) et (DNL). Donc, par hypothèse de récurrence, les suites

$$T^{-1}_{j,\,v_{i+1}}(z_{i+1})\, T_{j,\,v_{i+1}}(x_{i+1}),\ \ldots,\ T^{-1}_{j,\,v_s}(z_s)\, T_{j,\,v_s}(x_s),$$

$$T^{-1}_{j,\,v_1}(z_1)\, T_{j,\,v_1}(x_1),\ \ldots\ T^{-1}_{j,\,v_i}(z_i)\, T_{j,\,v_i}(x_i)$$

convergent, si bien que leur produit admet une limite $H_i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})$.

D'autre part, par le choix de $(\boldsymbol{u}^{(k)})$, la variable x_i n'intervient que dans $\boldsymbol{u}^{(s)}$. Par conséquent, pour $k \neq s$, la limite de $T_j^{-1}(\boldsymbol{u}^{(k-1)})\, T_j(\boldsymbol{u}^{(k)})$ est indépendante de x_i, alors que par hypothèse de récurrence,

$$T_j^{-1}(\boldsymbol{u}^{(s-1)})\, T_j(\boldsymbol{u}^{(s)}) = T^{-1}_{j,\,v_i}(z_i)\, T_{j,\,v_i}(x_i)$$

admet une matrice limite dans $GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}'_i})$ suivant la variable $x_i \in \mathcal{C}'_i$.

On en déduit donc que $H_i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})$ est dans $GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}'_i})$ suivant la variable $x_i \in \mathcal{C}'_i$.

Par (1), $H_i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})$ ne dépend pas de i, et on peut permuter le rôle de x_i et z_i par la formule $H(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = H^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ obtenue par passage à la limite. Par restriction à $\mathcal{C}''$, il s'agit donc d'une matrice H définie sur $\mathcal{C}'' \times \mathcal{C}''$ et dont tous les coefficients sont des fonctions analytiques suivant chacune des variables z_i et x_i séparément sur la polycouronne ouverte $\mathcal{C}'' \times \mathcal{C}''$ de dimension $2s$.

Cette construction est valable quel que soit le corps de base Ω tant qu'il s'agit d'un corps p-adique algébriquement clos, et redonne par restriction la même matrice H par unicité de la limite. Si on fixe donc Ω un corps de base algébriquement clos, on note alors $\widetilde{\Omega}$ une extension de corps valué de Ω qui soit sphériquement close et algébriquement close (par ([VRo], chap. IV), il suffit de prendre la clôture sphérique de Ω), et par le Lemme 1.1.2, $\widehat{\Omega}$ une extension s-générique de $\widetilde{\Omega}$.

On peut donc appliquer le Théorème 1. 1 pour en déduire que $H \in GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}'' \times \mathcal{C}''})$, et par recollement, $H \in GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}^0 \times \mathcal{C}^0})$. ∎

Supposons dorénavant dans ce paragraphe que K soit un corps p-

adique tel que $\mathcal{C}_K^0$ soit non-vide, et fixons un élément $\boldsymbol{z} \in \mathcal{C}_K^0$. Nous allons exploiter la Proposition 2 à l'aide de la suite particulière $(R_{h,A})$ construite au § 2.1, et pour laquelle la limite H correspondante sera fonction analytique à coefficients dans K au lieu de Ω a priori. On vérifie ensuite, comme pour la dimension 1 ([Dw], thm. 7.1), que $H(\boldsymbol{z}, .)$ satisfait à un certain système d'équations aux dérivées partielles de la dimension 1 ([Dw], thm. 7.1).

REMARQUE. *On ne dispose a priori de l'unicité du développement en série de Laurent d'une fonction g sur* $\mathcal{C}_K \neq \emptyset$, *développable en série de Laurent sur* $\mathcal{C}_K$, *qu'à condition que K soit algébriquement clos* ([Rb], 2.13). *Toutefois, dans certains des cas qui vont suivre, on part d'un élément f que l'on sait être dans* $\mathcal{A}_{\mathcal{C}_K}$ *pour des raisons intrinsèques et on construit une fonction g coïncidant avec la fonction associée à f sur* $\mathcal{C}_\Omega$ *pour* $K \subset \Omega$ *algébriquement clos. On en déduit alors tout de même que l'égalité* $f = g$ *a lieu dans* $\mathcal{A}_{\mathcal{C}_K}$.

PROPOSITION 3. *Soit K un corps p-adique,* $\mathcal{C}_K$ *une polycouronne fermée telle que* $\mathcal{C}_K^0$ *soit non-vide, et soit* $\mathcal{M}$ *un module différentiel libre de rang m sur* $\mathcal{C}$, *ayant la propriété de Robba. Considérons* $(\boldsymbol{e})$ *une base de* $\mathcal{M}$ *représentée par* $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ *ayant les propriétés* (DNE) *et* (DNL), *et* $(R_{h,A})$ *la suite associée à* $\boldsymbol{A}$ *et* $(\boldsymbol{e})$ *du* § 2.1.

Alors, on a les résultats suivants:

1) $R_{h,A} \in M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}_K})$, *et pour tout* $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}$ *dans* $\mathcal{C}_K^0$,

$$R_{p^j,A}^{-1}(\boldsymbol{z})\, R_{p^j,A}(\boldsymbol{x})$$

admet, lorsque j tend vers $+\infty$, *une limite* $H(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})$ *qui est telle que* $H \in GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}_K^0 \times \mathcal{C}_K^0})$.

2) *Pour tout* $i \in \langle 1, s \rangle$, *et pour* $\boldsymbol{z} \in \mathcal{C}_K^0$ *fixé, la matrice*

$$(x_i G_{\delta_i}(\boldsymbol{x}))_{[H(\boldsymbol{z},\, .)]}$$

est une matrice $B^{(i)} = B^{(i)}(\boldsymbol{z})$ *indépendante de* $\boldsymbol{x}$.

3) *Pour* $z \in \mathcal{C}_K^0$ *fixé, il existe une base de trigonalisation commune des* $B^{(i)}$ *(pour* $i = 1, \ldots, s$*) dans laquelle* $(A_1^{(i)}, \ldots, A_m^{(i)})$ *correspond exactement à la partie diagonale de* $B^{(i)}$.

PREUVE. Notons Ω une extension de corps valué de K qui soit algébriquement close. Remarquons dès à présent que, comme K est un corps complet de caractéristique 0, K contient $\mathbb{Q}_p$ et donc a fortiori $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}_p$.

Par la Proposition 2 précédente, et pour $z, x \in \mathcal{C}_K^0 \subset \mathcal{C}_\Omega^0$, $R_{p^j, A}^{-1}(z)\, R_{p^j, A}(x)$ admet une limite $H(z, x)$ lorsque j tend vers $+\infty$, avec $H \in GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}_\Omega^0 \times \mathcal{C}_\Omega^0})$.

La suite $R_{p^j, A}^{-1}(z)\, R_{p^j, A}(x)$ converge vers $H(z, x)$ en tant que fonction sur $\mathcal{C}_\Omega^0 \times \mathcal{C}_\Omega^0$. Par conséquent, $(z, x) \mapsto R_{p^j, A}^{-1}(z)\, R_{p^j, A}(x)$ converge vers $(z, x) \mapsto H(z, x)$ dans $M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}^0 \times \mathcal{C}^0})$. Par complétude de K, il suffit de voir alors de façon générale que $R_{h, A} \in M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}_K})$.

Or,

$$(1)\, R_{h, A}(x) = \frac{1}{p^{sh}} \sum_{\zeta \in \Gamma_h^s} \zeta^{-A}\, Y_G(x, \zeta x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^s} \frac{x^\alpha G_\alpha(x)}{p^{sh}\, \alpha!} \sum_{\zeta \in \Gamma_h^s} \zeta^{-A} (\zeta - 1)^\alpha .$$

Comme G_α est dans $M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}_K})$, il en est de même de $x^\alpha G_\alpha(x)/p^{sh}\alpha!$, et il suffit de montrer que dans (1), et pour tout $A \in \mathcal{O}_m^s$,

$$\sum_{\zeta \in \Gamma_h^s} \zeta^{-A} (\zeta - 1)^\alpha \in M_m(K) .$$

Ceci s'obtient, en développant $(\zeta - 1)^\alpha$, comme conséquence du Lemme 2.1.2, qui donne, en effet, que si $u \in \mathbb{Z}_p^s$, $\sum_{\zeta \in \Gamma_h^s} \zeta^u$ est dans $\{0, p^{sh}\} \subset \mathbb{Q} \subset K$.

Ceci termine la partie 1) de la Proposition 3.

Reste à montrer que pour $z \in \mathcal{C}_K^0$ fixé, $H(z, .)$ vérifie un système d'équations aux dérivées partielles du type de celui annoncé en 2).

Notons $T_j = R_{p^j, A}$. On sait que pour tout $x \in \mathcal{C}_K^0$, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $\zeta \in \Gamma_{p^j}^s$,

$$\zeta^A\, T_j(x) = T_j(\zeta x)\, Y_G(x, \zeta x) .$$

Pour z élément de $\mathcal{C}_K^0$, et $j \geq j_0$,

$$(2) \qquad T_j^{-1}(z)\, \zeta^A\, T_j(z)\, T_j^{-1}(z)\, T_j(x) = T_j^{-1}(z)\, T_j(\zeta x)\, Y_G(x, \zeta x) .$$

Comme $T_j^{-1}(z)\, T_j(x)$ admet pour limite $H(z, x)$, $T_j^{-1}(z)\, T_j(\zeta x)$ admet pour limite $H(z, \zeta x)$. Par l'identité (2), $T_j^{-1}(z)\, \zeta^A T_j(z)$ admet pour limite

(3) $$T(z, \zeta, A) = H(z, \zeta x)\, Y_G(x, \zeta x)\, H^{-1}(z, x).$$

Effectuons le changement de base $(e') = H(z, x)(e)$ pour z fixé dans $\mathcal{C}_K^0$. Si on note $\tilde{G}(z, x) = G(x)_{[H(z, x)]}$ la représentation de $\mathcal{M}$ dans (e'), on trouve, en comparant (3) et la formule de changement de base vue en 2.2, que pour tout $x \in \mathcal{C}_K^0$ et $\zeta \in \Gamma_{p^j}^s$ $(j \geq j_0)$,

(4) $$T(z, \zeta, A) = Y_{\tilde{G}(z, x)}(x, \zeta x).$$

D'après la remarque précédente, (4) correspond en fait, pour $z \in \mathcal{C}_K^0$ fixé, à une égalité dans $M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}_K^0})$.

En appliquant alors ∂_{x_i} aux deux membres de (4), on a

$$0 = \zeta_i \tilde{G}_{\delta_i}(z, \zeta x)\, Y_{\tilde{G}}(x, \zeta x) - Y_{\tilde{G}}(x, \zeta x)\, \tilde{G}_{\delta_i}(z, x).$$

Si on pose dans $M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}_K^0})$

$$B^{(i)}(z, x) = x_i \tilde{G}_{\delta_i}(z, x),$$

on en déduit que

(5) $$B^{(i)}(z, \zeta x)\, T(z, \zeta, A) = T(z, \zeta, A)\, B^{(i)}(z, x).$$

Omettons momentanément l'indice i et la variable z, et montrons que $B(x) = B^{(i)}(z, x)$ est en fait une matrice indépendante de x.

La matrice B, en tant qu'élément de $M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}_K^0})$, s'écrit sous la forme

$$B(x) = \sum_{l \in \mathbf{Z}^s} B_l x^l,$$

et par l'identité (5), on a

(6) $$B_l \zeta^l\, T(z, \zeta, A) = T(z, \zeta, A)\, B_l.$$

On rappelle alors ([DGS], lem. III.8.4) que les valeurs propres de l'application

$$\Phi_{U, V} \colon T \mapsto TU - VT$$

sont les $\alpha_i - \beta_j$ pour $\{\alpha_i\}$ et $\{\beta_j\}$ l'ensemble des valeurs propres respectives de U et V. Dans notre cas, on sait que $T(z, \zeta, A)$ est la limite de $T_j^{-1}(z)\, \zeta^A T_j(z)$. Les valeurs propres de $T_j^{-1}(z)\, \zeta^A T_j(z)$ sont indépendantes de j et sont celles de ζ^A. Par passage à la limite dans le polynôme caractéristique de $T_j^{-1}(z)\,\zeta^A\,T_j(z)$, on en déduit que les valeurs propres de $T(z, \zeta, A)$ sont encore celles de ζ^A. De même, les valeurs propres de $\zeta^l\,T(z, \zeta, A)$ coïncident avec celles de ζ^{l+A}. Comme A a la propriété (DNE), les matrices $\zeta^l\,T(z, \zeta, A)$ et $T(z, \zeta, A)$ ne peuvent avoir de valeur propre commune pour tout $\zeta \in \Gamma^s_{p^j}$ et j suffisamment grand que si $l = 0$. Par conséquent, B_l dans (6) ne peut être un vecteur propre de $\Phi_{\zeta^l T(z, \zeta, A),\, T(z, \zeta, A)}$, donc non nul, qu'à condition que $l = 0$. On a donc montré que $B_l = 0$ si $l \neq 0$, et par conséquent $B(x)$ est une matrice indépendante de x notée $B^{(i)}(z)$. En appliquant ce résultat à chaque entier $i \in \in \langle 1, s \rangle$, on trouve bien la formule annoncée en 2).

Fixons toujours $z \in \mathcal{C}^0_K$, et omettons à nouveau dans l'écriture de $B^{(i)}(z)$ la référence à z. Par les conditions d'intégrabilité, on sait que pour tout (i, j),

$$[B^{(i)}, B^{(j)}] = 0\,,$$

si bien que $(B^{(i)})_i$ forme une famille de matrices permutables de $M_m(K)$. Par un résultat classique d'algèbre linéaire (cf par ex. [Bou], Alg. chap 7, § 5), on en déduit l'existence d'une base commune de trigonalisation sur une extension algébriquement close Ω de K. En reprenant l'identité (4) lorsque $K = \Omega$, on trouve que pour tout $\zeta \in \Gamma^s_{p^j}$,

$$T(z, \zeta, A) = Y_{\tilde{G}}(x, \zeta x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^s} \frac{\tilde{G}_\alpha(x)}{\alpha!} x^\alpha (\zeta - 1)^\alpha, \tag{7}$$

où $\tilde{G}_\alpha$ s'obtient à l'aide de la formule de récurrence

$$\tilde{G}_{\alpha + \delta_i} = \partial_{x_i} \tilde{G}_\alpha + \tilde{G}_\alpha \tilde{G}_{\delta_i},$$

avec $\tilde{G}_{\delta_i} = B^{(i)}/x_i$. Par cette formule de récurrence, et le fait que $B^{(i)}$ et $B^{(j)}$ commutent, on obtient que

$$\frac{\tilde{G}_\alpha}{\alpha!} = \binom{B^{(1)}}{\alpha_1} x_1^{-\alpha_1} \ldots \binom{B^{(s)}}{\alpha_s} x_s^{-\alpha_s},$$

où $\binom{B^{(i)}}{\alpha_i}$ est la matrice définie par $\binom{B^{(i)}}{0} = I_m$ et

$$(\alpha_i + 1)\binom{B^{(i)}}{\alpha_i + 1} = (B^{(i)} - \alpha_i I_m)\binom{B^{(i)}}{\alpha_i}.$$

En reprenant l'identité (7), on en déduit que

$$\begin{aligned} T(z, \zeta, A) &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^s} \binom{B^{(1)}}{\alpha_1} \dots \binom{B^{(s)}}{\alpha_s} (\zeta_1 - 1)^{\alpha_1} \dots (\zeta_s - 1)^{\alpha_s} \\ &= \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} \left(\sum_{\alpha_i \in \mathbb{N}} \binom{B_i}{\alpha_i} (\zeta_i - 1)^{\alpha_i} \right) \\ &= \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} (1 + \zeta_i - 1)^{B^{(i)}} \\ &= \zeta^{B}. \end{aligned}$$

Par conséquent, et pour tout $\zeta \in \Gamma^s_{p^j}$, les valeurs propres de $T(z, \zeta, A)$, et donc celles de ζ^A, coïncident avec celles de ζ^B. A une permutation σ de $\langle 1, m \rangle$ près, on en déduit que la composante diagonale de $B^{(i)}$ correspond à $(A^{(i)}_{\sigma(1)}, \dots, A^{(i)}_{\sigma(m)})$. Quitte à choisir la base de trigonalisation des $(B^{(i)})$ en tenant compte de σ, on peut supposer que σ est l'identité. Les valeurs propres des $B^{(i)}$ sont alors en fait dans $\mathbb{Z}_p \subset K$, et la trigonalisation commune a lieu dans $M_m(K)$ ([Bou], Alg. chap 7, §5). Ceci termine la démonstration de la partie 3) de la Proposition 3. ∎

3.2. *Théorème de structure fuchsienne.*

Nous commencerons par donner deux définitions équivalentes de la notion de structure fuchsienne sur une polycouronne ouverte. La première définition s'énonce à l'aide d'une base, et s'obtiendra naturellement pour la retriction à $\mathcal{C}^0_K$ non-vide de $\mathfrak{M}$ ayant la propriété de Robba par le passage à la limite du § 3.1. Pour descendre ce résultat à un corps p-adique quelconque, c'est la deuxième définition, plus intrinsèque, qui sera la plus adaptée.

On débute par quelques lemmes qui nous servirons à plusieurs reprises par la suite.

Lemme 1. *Soit $\mathcal{N}$ un module différentiel libre de rang m sur une polycouronne ouverte $\mathcal{C}_K$, ayant la propriété de Robba. Supposons qu'il existe une base de $\mathcal{N}$ dans laquelle $\nabla(x_i \partial x_i)$ est représenté soit par une matrice constante de $M_m(K)$, soit par une matrice triangulaire supérieure de diagonale constante ayant la propriété* (DNL).

Alors il existe une base (e) de $\mathcal{N}$ dans laquelle pour chaque indice i, $\nabla(x_i \partial_{x_i})$ est représenté par une matrice constante $B^{(i)} \in M_m(K)$ triangulaire supérieure de diagonale $A^{(i)} \in \mathcal{D}_m(\mathbb{Z}_p)$.

On note alors $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{O}_m^s(\mathbb{Z}_p)$ *l'ensemble des éléments* $\boldsymbol{A} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(s)})$ *correspondant à un ensemble de matrices triangulaires supérieures constantes* $\boldsymbol{B}$ *associées à un choix quelconque d'une base* $(\boldsymbol{e})$.

Preuve. Dans le premier cas, on part d'une base dans laquelle $\nabla(x_i \partial_{x_i})$ est représenté par une matrice constante $B^{(i)}$. Par les conditions d'intégrabilité, ces matrices commutent entre elles. Sur une clôture algébrique Ω de K, il existe donc une base de $\mathcal{N}$ dans laquelle les matrices $B^{(i)}$ sont des matrices constantes triangulaires supérieures avec $(A_1^{(i)}, \ldots, A_m^{(i)})$ pour diagonale ([Bou], Alg. chap 7, § 5). Par la condition de Robba, $A_j^{(i)} \in \mathbb{Z}_p$ ([ChI], prop. 6.2.9), si bien que la trigonalisation commune a lieu dans le corps de base K ([Bou], Alg. chap 7, §5). Dans le deuxième cas, $\nabla(x_i \partial_{x_i})$ est représenté par une matrice $B^{(i)}(\boldsymbol{x})$ de la forme

$$B^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} A_1^{(i)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Nous allons montrer dans un premier temps que l'on peut supposer que $\boldsymbol{A}$ ainsi défini a les propriétés (DNE) et (DNL). Quitte à effectuer une permutation sur les vecteurs de la base, on peut supposer que $A_1^{(i)} = \ldots = A_{k_i}^{(i)} \neq A_j^{(i)}$ pour $j > k_i$. On utilise, en vue de cela, les transformations de cisaillement suivantes, qui se déduisent du cas d'une variable ([Dw], III.8.2 et 8.3): pour i fixé,

$$H_i = \begin{pmatrix} x_i^{h_i} I_{k_i} & 0 \\ 0 & I_{m-k_i} \end{pmatrix}$$

pour $h_i \in \mathbb{Z}$ et k_i comme ci-dessus. H_i transforme $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ en $\widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x})$ avec:

- Suivant le i-ième variable, on a

$$\widetilde{B}^{(i)}(\boldsymbol{x}) = x_i \partial_{x_i} H_i H_i^{-1} + H_i B^{(i)} H_i^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} h_i I_{k_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1^{(i)} & & ** \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m^{(i)} \end{pmatrix},$$

qui est donc triangulaire supérieure de diagonale constante égale à

$$(A_1^{(i)} + h_i, \dots, A_{k_i}^{(i)} + h_i, A_{k_i+1}^{(i)}, \dots, A_m^{(i)});$$

- Suivant le j-ième variable ($j \neq i$), on a

$$\widetilde{B}^{(j)}(\boldsymbol{x}) = x_j \, \partial_{x_j} H_i H_i^{-1} + H_i B^{(i)} H_i^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1^{(i)} & & *** \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m^{(i)} \end{pmatrix},$$

qui est donc triangulaire supérieure de diagonale constante égale à $(A^{(j)})$.

Dans un deuxième temps, nous allons montrer par récurrence sur le rang m que le lemme est vérifié en partant de $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ lorsque l'ensemble $\boldsymbol{A}$ correspondant a les propriétés (DNE) et (DNL), et que de plus la partie diagonale $\boldsymbol{A}$ est conservée par ce changement de base. Ceci achèvera la démonstration du lemme.

Pour $m = 1$, il n'y a rien à montrer. Dans le cas général, on est ramené, en appliquant les hypothèses de récurrence au rang $m - 1$, à $\boldsymbol{B}$ ayant la forme suivante: pour tout i,

$$B^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} A_1^{(i)} & C^{(i)}(\boldsymbol{x}) \\ 0 & P^{(i)} \end{pmatrix}$$

avec $P^{(i)}$ triangulaire supérieure constante de diagonale $(A_2^{(i)}, \dots, A_m^{(i)})$. On cherche alors une matrice de changement de base de la forme

$$H = \begin{pmatrix} 1 & L(\boldsymbol{x}) \\ 0 & I_{m-1} \end{pmatrix}$$

après lequel $\nabla(x_i \, \partial_{x_i})$ sera représenté par

$$\begin{pmatrix} A_1^{(i)} & D^{(i)} \\ 0 & P^{(i)} \end{pmatrix}$$

avec $D^{(i)}$ constante. Pour $L = (L_1, \dots, L_{m-1}) \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{m-1}$ quelconque, on a

$$(B^{(i)})_{[H]} = \begin{pmatrix} A_1^{(i)} & D^{(i)}(\boldsymbol{x}) \\ 0 & P^{(i)} \end{pmatrix}$$

avec $D^{(i)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{m-1}$ vérifiant

(1) $$x_i \partial_{x_i} L + L(P^{(i)} - A_1^{(i)} I_{m-1}) = D^{(i)} - C^{(i)} =: E^{(i)}.$$

On veut réaliser cette relation avec $D^{(i)} = \mathrm{Res}_{\boldsymbol{x}=0}(\mathrm{C}^{(i)}(\boldsymbol{x}))$ matrice constante de $M_m(K)$, si bien que $\mathrm{Res}_{\boldsymbol{x}=0}(E^{(i)}(\boldsymbol{x})) = 0$.

En premier lieu, établissons la relation que l'on déduit des conditions d'intégrablité de la connexion de $\mathcal{N}$. Ces dernières conditions imposent la relation suivante dans $M_m(\mathcal{O}_{\mathcal{C}_K})$

$$x_i \partial_{x_i} B^{(j)} - x_j \partial_{x_j} B^{(i)} = B^{(i)} B^{(j)} - B^{(j)} B^{(i)}.$$

En identifiant chacun des blocs de ces matrices, on trouve que

(2) $$[P^{(i)}, P^{(j)}] = 0\,,$$

$$x_i \partial_{x_i} C^{(j)} - x_j \partial_{x_j} C^{(i)} = A_1^{(i)} C^{(j)} + C^{(i)} P^{(j)} - A_1^{(j)} C^{(i)} - C^{(j)} P^{(i)}.$$

On déduit de la deuxième égalité l'identité suivante sur les coefficients des séries de Laurent de $C^{(i)}$ et $C^{(j)}$:

$$\forall \boldsymbol{l} \in \mathbb{Z}^s, \qquad l_i C_{\boldsymbol{l}}^{(j)} - l_j C_{\boldsymbol{l}}^{(i)} = A_1^{(i)} C_{\boldsymbol{l}}^{(j)} + C_{\boldsymbol{l}}^{(i)} P^{(j)} - A_1^{(j)} C_{\boldsymbol{l}}^{(i)} - C_{\boldsymbol{l}}^{(j)} P^{(i)},$$

si bien que

(3) $$\forall \boldsymbol{l} \in \mathbb{Z}^s, \quad C_{\boldsymbol{l}}^{(j)}(P^{(i)} + (l_i - A_1^{(i)})\, I_{m-1}) = C_{\boldsymbol{l}}^{(i)}(P^{(j)} + (l_j - A_1^{(j)})\, I_{m-1})\,.$$

La matrice $P^{(i)} + (l_i - A_1^{(i)})\, I_{m-1}$ est triangulaire supérieure avec pour ensemble des valeurs propres $\{A_j^{(i)} - A_1^{(i)} + l_i\}_{2 \leq j \leq m}$. Si l_i est un entier non nul, on déduit de la propriété (DNE) pour $A^{(i)}$ le fait que $P^{(i)} + (l_i - - A_1^{(i)})\, I_{m-1}$ est inversible dans $M_{m-1}(K)$. D'autre part, s'il existe un autre indice j tel que $l_j \neq 0$. Par (2), les matrices $(P^{(i)} + (l_i - A_1^{(i)})\, I_{m-1})^{-1}$ et $(P^{(j)} + (l_j - A_1^{(j)})\, I_{m-1})$ commutent, et par (3), on en déduit que

$$C_{\boldsymbol{l}}^{(i)}(P^{(i)} + (l_i - A_1^{(i)})\, I_{m-1})^{-1} = C_{\boldsymbol{l}}^{(j)}(P^{(j)} + (l_j - A_1^{(j)})\, I_{m-1})^{-1}.$$

Par conséquent, on a montré que la matrice $C_{\boldsymbol{l}}^{(i)}(P^{(i)} + (l_i - A_1^{(i)}) \cdot \cdot I_{m-1})^{-1}$ est indépendante de i pour i tel que l_i soit non nul.

En deuxième lieu, on remarque que le système d'équations (1) est d'un type suffisamment simple pour déterminer formellement les coefficients du développement en série de Laurent de L: par (1), il suffit d'avoir

(4) $$\forall i, \forall \boldsymbol{l} \in \mathbb{Z}^s \qquad l_i L_{\boldsymbol{l}} + L_{\boldsymbol{l}}(P^{(i)} - A_1^{(i)} I_{m-1}) = E_{\boldsymbol{l}}^{(i)}.$$

En effet, prenons $L = \sum_{\boldsymbol{l} \in \mathbb{Z}^s} L_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{l}}$ avec $L_0 = 0$, et pour $\boldsymbol{l} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{0\}$,

$$L_{\boldsymbol{l}} = E_{\boldsymbol{l}}^{(i)} (P^{(i)} + (l_i - A_1^{(i)})\, I_{m-1})^{-1} = -C_{\boldsymbol{l}}^{(i)} (P^{(i)} + (l_i - A_1^{(i)})\, I_{m-1})^{-1}$$

avec i de telle sorte que $l_i \neq 0$. Pour $\boldsymbol{l} = 0$, (4) est bien vérifiée par le choix de $D^{(i)} = \mathrm{Res}_{\boldsymbol{x}=0}(C^{(i)}(\boldsymbol{x}))$. Pour $\boldsymbol{l} \neq 0$, $L_{\boldsymbol{l}}$ est indépendant du choix de i tel que $l_i \neq 0$ par ce qui précède, et pour un indice j quelconque, on trouve

$$\begin{aligned} l_j L_{\boldsymbol{l}} + L_{\boldsymbol{l}}(P^{(j)} - A_1^{(j)} I_{m-1}) &= L_{\boldsymbol{l}} (P^{(j)} + (l_j - A_1^{(j)})\, I_{m-1}) = \\ &= -\, C_{\boldsymbol{l}}^{(i)} (P^{(i)} + (l_i - A_1^{(i)})\, I_{m-1})^{-1} (P^{(j)} + (l_j - A_1^{(j)})\, I_{m-1})\,. \end{aligned}$$

Par (2), les matrices $(P^{(i)} + (l_i - A_1^{(i)})\, I_{m-1})^{-1}$ et $(P^{(j)} + (l_j - A_1^{(j)})\, I_{m-1})$ commutent, et par (3), on en déduit que

$$\begin{aligned} -C_{\boldsymbol{l}}^{(i)} (P^{(i)} &+ (l_i - A_1^{(i)})\, I_{m-1})^{-1} (P^{(j)} + (l_j - A_1^{(j)}) I_{m-1}) \\ &= -\, C_{\boldsymbol{l}}^{(i)} (P^{(j)} + (l_j - A_1^{(j)})\, I_{m-1})(P^{(i)} + (l_i - A_1^{(i)})\, I_{m-1})^{-1} \\ &= -\, C_{\boldsymbol{l}}^{(j)} (P^{(i)} + (l_i - A_1^{(i)})\, I_{m-1})(P^{(i)} + (l_i - A_1^{(i)})\, I_{m-1})^{-1} \\ &= -\, C_{\boldsymbol{l}}^{(j)} \\ &= E_{\boldsymbol{l}}^{(j)}, \end{aligned}$$

si bien que l'équation (4) est vérifiée.

Après l'avoir défini formellement, on va montrer que L est en fait analytique sur la polycouronne ouverte $\mathcal{C}_K(\boldsymbol{I}^0) = \mathcal{C}_K(\boldsymbol{I})$. Pour $l_i \neq 0$, et en utilisant le fait que $|l_i| \leqslant 1$, on trouve que

$$\begin{aligned} \|(P^{(i)} + (l_i - A_1^{(i)})\, I_{m-1})^{-1}\| &= \frac{\|{}^t\mathrm{com}\,(\mathrm{P}^{(\mathrm{i})} + (\mathrm{l_i} - \mathrm{A}_1^{(\mathrm{i})})\, \mathrm{I}_{\mathrm{m}-1})\|}{|\det\,(P^{(i)} + (l_i - A_1^{(i)})\, I_{m-1})|} \\ &\leqslant \frac{K_{m,i}}{\prod_{2 \leqslant j \leqslant m} |l_i + A_j^{(i)} - A_1^{(i)}|}\,, \end{aligned}$$

où $K_{m,i}$ est une constante indépendante de l_i. On en déduit que pour $\boldsymbol{l} \neq 0$, et pour i tel que $l_i \neq 0$,

$$\|L_{\boldsymbol{l}}\| \leqslant \|C_{\boldsymbol{l}}^{(i)}\| \times \frac{K_{m,i}}{\prod_{2 \leqslant j \leqslant m} |l_i + A_j^{(i)} - A_1^{(i)}|}\,.$$

Si on fixe $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{I}^0 = \boldsymbol{I}$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que $\boldsymbol{r} - (\eta, \ldots, \eta)$ et $\boldsymbol{r} + (\eta, \ldots, \eta)$ soient dans $\boldsymbol{I}$. Pour i tel que $l_i \neq 0$, on note $\boldsymbol{\eta}_i = (0, \ldots, \eta, \ldots, 0)$ avec η en i-ème position. On a alors les deux majorations suivantes qui sont indépendantes de tout choix de i, et qui sont valables pour tout $\boldsymbol{l} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{0\}$:

$$\|L_l\| \boldsymbol{r}^l \leqslant \min_{\{i \mid l_i \neq 0\}} \left(\|C_l^{(i)}\| (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\eta}_i)^l \times \frac{K_{m,i}}{\prod\limits_{2 \leqslant j \leqslant m} |l_i + A_j^{(i)} - A_1^{(i)}|} \left(\frac{r_i}{r_i - \eta} \right)^{l_i} \right),$$

$$\|L_l\| \boldsymbol{r}^l \leqslant \min_{\{i \mid l_i \neq 0\}} \left(\|C_l^{(i)}\| (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\eta}_i)^l \times \frac{K_{m,i}}{\prod\limits_{2 \leqslant j \leqslant m} |l_i + A_j^{(i)} - A_1^{(i)}|} \left(\frac{r_i}{r_i + \eta} \right)^{l_i} \right).$$

La première de ces majorations va nous servir lorsque $\boldsymbol{l}$ aura une composante $l_i < 0$, et la deuxième lorsque $\boldsymbol{l}$ aura une composante $l_i > 0$. Pour tout $i \in \langle 1, s \rangle$, $C^{(i)}$ est une fonction analytique sur $\mathcal{C}(\boldsymbol{I})$. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement fixé, il existe un entier S_i tel que si $|\boldsymbol{l}| := \sum_{i=1}^{s} |l_i| \geqslant S_i$,

$$\|C_l^{(i)}\| (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\eta}_i)^l \leqslant \|C_l^{(i)}\| (\boldsymbol{r} - (\eta, \ldots, \eta))^l \leqslant \varepsilon,$$

et un entier T_i tel que si $|\boldsymbol{l}| \geqslant T_i$,

$$\|C_l^{(i)}\| (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\eta}_i)^l \leqslant \|C_l^{(i)}\| (\boldsymbol{r} + (\eta, \ldots, \eta))^l \leqslant \varepsilon.$$

A l'aide des estimations classiques de $|l_i + A_j^{(i)} - A_1^{(i)}|$, lorsque $l_i \to \pm \infty$, et où les nombres $A_j^{(i)} - A_1^{(i)}$ sont, par hypothèse, Non-Liouville (cf par ex. [DGS], VI.1 et p. 209), on sait d'autre part qu'il existe des constantes $K'_{m,i}$ et $K''_{m,i}$ indépendantes de $l_i \in \mathbb{Z}$ telles que

$$\forall l_i < 0, \qquad \frac{K_{m,i}}{\prod\limits_{2 \leqslant j \leqslant m} |l_i + A_j^{(i)} - A_1^{(i)}|} \left(\frac{r_i}{r_i - \eta} \right)^{l_i} \leqslant K'_{m,i},$$

et

$$\forall l_i > 0, \qquad \frac{K_{m,i}}{\prod\limits_{2 \leqslant j \leqslant m} |l_i + A_j^{(i)} - A_1^{(i)}|} \left(\frac{r_i}{r_i + \eta} \right)^{l_i} \leqslant K''_{m,i}.$$

Par conséquent, si $|\boldsymbol{l}| \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \{S_i, T_i\}$, on a la majoration

$$\|L_l\| \boldsymbol{r}^l \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant s} \{K'_{m,i}, K''_{m,i}\} \, \varepsilon = K\varepsilon = \varepsilon',$$

avec $\varepsilon' > 0$ pouvant être choisi arbitrairement. On a donc montré que L

est une fonction analytique sur $\mathcal{C}(\boldsymbol{I}^0) = \mathcal{C}(\boldsymbol{I})$ comme annoncé. Finalement, on a donc trouvé une matrice

$$H = \begin{pmatrix} 1 & L(\boldsymbol{x}) \\ 0 & I_{m-1} \end{pmatrix} \in GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}})$$

telle que

$$\forall i \,, \qquad B^{(i)}_{[H]} = \begin{pmatrix} A_1^{(i)} & D^{(i)} \\ 0 & P^{(i)} \end{pmatrix}$$

soit une matrice constante tringulaire supérieure. Ceci établit que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang m, et termine la démonstration du Lemme 1. ■

LEMME 2. *Dans les même conditions que le Lemme précédent, si* $\boldsymbol{A}$ *et* $\tilde{\boldsymbol{A}}$ *sont éléments de* $\mathcal{H}$, *alors* $\boldsymbol{A}$ *est fortement équivalent à* $\tilde{\boldsymbol{A}}$.

On note $\mathfrak{E}$ *la classe d'équivalence forte d'un élément* $\boldsymbol{A}$ *de* $\mathcal{H}$. *Alors* $\mathfrak{E}$ *est indépendant du choix de* $\boldsymbol{A}$, *et s'il existe un élément de* $\mathfrak{E}$ *ayant la propriété* (DNL), *tous les éléments de* $\mathfrak{E}$ *ont la propriété* (DNL).

PREUVE. Choisissons $(\boldsymbol{e})$ et $(\tilde{\boldsymbol{e}})$ deux bases dans lesquelles $\mathcal{N}$ est respectivement représenté par $\boldsymbol{B}$ et $\tilde{\boldsymbol{B}}$ matrices constantes triangulaires supérieures ayant pour diagonales $\boldsymbol{A}$ et $\tilde{\boldsymbol{A}}$. Soit H la matrice de passage de $(\tilde{\boldsymbol{e}})$ à $(\boldsymbol{e})$. H vérifie ainsi, pour tout i, l'identité

$$x_i \,\partial_{x_i} H = B^{(i)} H - H \tilde{B}^{(i)}.$$

Quitte à changer H par $H'^{-1} H H''$ où H' et H'' sont dans $GL_m(\Omega)$ choisies de façon adéquate (avec Ω algébriquement clos contenant K), on peut supposer que tous les $B^{(i)}$ et les $\tilde{B}^{(i)}$ sont sous la forme

$$B^{(i)} = A^{(i)} + N^{(i)} \qquad \text{et} \qquad \tilde{B}^{(i)} = \tilde{A}^{(i)} + \tilde{N}^{(i)}, \tag{1}$$

avec $N^{(i)}$ et $\tilde{N}^{(i)}$ nilpotentes,

$$[A^{(i)}, N^{(i)}] = 0 \qquad \text{et} \qquad [\tilde{A}^{(i)}, \tilde{N}^{(i)}] = 0\,.$$

En effet, pour cela, il suffit d'utiliser ([Bou], Alg. chap 7, § 5) et la décomposition de Ω^m suivant les sous-espaces caractéristiques.

Pour i fixé et H vu comme une fonction analytique en la variable x_i à coefficients dans le corps $K_i = \mathrm{Frac}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}_{i,\Omega}})$, on reprend sous une forme particulière un résultat de dimension 1 ([DGS], V.2.4). On se propose de montrer que dans les conditions ci-dessus, si $H_{kl}(x_i) \neq 0$, alors $A_k^{(i)} - \widetilde{A}_l^{(i)} \in \mathbb{Z}$.

En effet, avec les mêmes notations que dans ([DGS], V.2.4), la matrice $C(x_i) = x_i^{-B^{(i)}} H(x_i)\, x_i^{\widetilde{B}^{(i)}}$ vérifie l'équation

$$x_i \,\partial_{x_i} C = 0 \,.$$

Par conséquent C est une matrice constante en x_i, et $H = x_i^{B^{(i)}} C x_i^{-\widetilde{B}^{(i)}}$. Comme $B^{(i)}$ et $\widetilde{B}^{(i)}$ sont la forme (1), on a donc

$$\begin{aligned} H &= x_i^{A^{(i)}} x_i^{N^{(i)}} C x_i^{-\widetilde{N}^{(i)}} x_i^{-\widetilde{A}^{(i)}} \\ &= (x_i^{A_k^{(i)}} x_i^{-\widetilde{A}_l^{(i)}} P_{kl}(\log x_i))_{k,\,l}, \end{aligned}$$

où P_{kl} est un polynôme à coefficients dans le corps des constantes en x_i. Comme $H(x_i)$ est élément de $M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}_i})$, on déduit de ([DGS], V.2.3) que P_{kl} est un polynôme constant, et que

$$\begin{aligned} H(x_i) &= x_i^{A^{(i)}} \overline{C} x_i^{-\widetilde{A}^{(i)}} \\ &= (x_i^{A_k^{(i)} - \widetilde{A}_l^{(i)}} \overline{C}_{kl})_{k,\,l}. \end{aligned}$$

En appliquant de nouveau ([DGS], V.2.3), on trouve bien que si H_{kl} est une fonction analytique non nulle, $A_k^{(i)} - \widetilde{A}_l^{(i)}$ est un entier relatif.

Comme $H \in GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}})$, il existe une permutation σ de l'ensemble à m éléments telle que pour tout $k \in \langle 1, m \rangle$, $H_{k,\,\sigma(k)}$ est une fonction non nulle. Pour chaque variable x_i, $H_{k,\,\sigma(k)}$ induit une fonction analytique non nulle en x_i. Par ce qui précède, on en déduit que

$$\forall i, \forall k, \qquad \widetilde{A}_k^{(i)} - A_{\sigma(k)}^{(i)} \in \mathbb{Z} \,.$$

C'est-à-dire que A et $\widetilde{A}$ sont fortement équivalents. Le reste du Lemme découle de cette propriété comme dans la Proposition 2.3.1. ■

Par analogie avec ([CMII], déf. 6.2.3), nous définissons le module suivant sur $\mathcal{C}_K$, ayant la propriété de Robba par la Proposition 1.2.2.

DÉFINITION *Pour* $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(s)}) \in \mathbb{Z}_p^s$, *on note* $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\boldsymbol{\alpha}}$, *ou encore* $\mathcal{A}^{\boldsymbol{\alpha}}$, *le* $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$*-module libre de rang* 1 *engendré par le symbole*

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} := x_1^{\alpha^{(1)}} \ldots x_s^{\alpha^{(s)}}$$

et muni de la connexion naturelle pour laquelle

$$\nabla(x_i \partial_{x_i})(\boldsymbol{x}^{\alpha}) = \alpha_i \boldsymbol{x}^{\alpha}.$$

PROPOSITION. *Soit $\mathcal{M}$ un module différentiel libre de rang m sur une polycouronne ouverte $\mathcal{C}_K$, ayant la propriété de Robba. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

1) *$\mathcal{M}$ admet une base $(\boldsymbol{e})$ dans laquelle $\nabla(x_i \partial_{x_i})$ est représenté par une matrice constante, et l'ensemble $\mathfrak{E}$ correspondant a la propriété* (DNL);

2) *$\mathcal{M}$ s'obtient par extensions successives de m modules à connexion intégrable isomorphes à $\mathcal{A}^{A_1}, \ldots, \mathcal{A}^{A_m}$ pour $A_j = (A_j^{(1)}, \ldots, A_j^{(s)}) \in \in \mathbb{Z}_p^s$ avec $\boldsymbol{A} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(s)})$ et la classe d'équivalence forte $\mathfrak{E}'$ de $\boldsymbol{A}$ a la propriété* (DNL);

Si l'une de ces propriétés équivalentes est vérifiée par $\mathcal{M}$, on dira alors que $\mathcal{M}$ admet une structure fuchsienne *sur $\mathcal{C}_K$, et on notera $\mathfrak{E}\mathrm{xp}_f^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ l'ensemble $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}'$.*

PREUVE. Supposons que $\mathcal{M}$ soit inscrit dans une suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{M} \to \mathcal{P} \to 0 .$$

Par la Proposition 1.2.2 et le résultat correspondant en dimension 1 ([CMII], th. 5.4.6, et [Dw], § 8), le fait que $\mathcal{M}$ ait la propriété de Robba entraîne que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{P}$ l'ont aussi.

2) $\Rightarrow$ 1)

Raisonnons par récurrence sur le rang m de $\mathcal{M}$. Par hypothèse, $\mathcal{M}$ s'inscrit dans une suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{M} \to \mathcal{P} \to 0 ,$$

dans laquelle, par exemple, $\mathcal{L}$ est isomorphe à $\mathcal{A}^{A_1}$ pour $A_1 \in \mathbb{Z}_p^s$, et $\mathcal{P}$ est un module de rang $m-1$ que l'on obtient à partir de $m-1$ modules respectivement isomorphes à $\mathcal{A}^{A_2}, \ldots, \mathcal{A}^{A_m}$ avec l'élément $\boldsymbol{A}$ correspondant (dans $\mathfrak{E}'$) ayant la propriété (DNL).

On en déduit que l'élément $\boldsymbol{A}_{\mathcal{P}} = (A_2, \ldots, A_m)$ a la propriété (DNL). Par hypothèse de récurrence, on peut alors trouver une base de $\mathcal{M}$ dans laquelle $\nabla(x_i \partial_{x_i})$ est représenté par une matrice de la forme

$$G_{\delta_i} = \begin{pmatrix} A_1^{(i)} & C^{(i)}(\boldsymbol{x}) \\ 0 & B^{(i)} \end{pmatrix} \tag{1}$$

avec $B^{(i)}$ matrice constante dont l'ensemble $\mathfrak{E}_{\mathcal{P}}$ correspondant coïncide avec la classe d'équivalence forte de $(A_2, \ldots, A_m)$. Par le premier cas du Lemme 1 précédent, on peut supposer que chaque $B^{(i)}$ est constante triangulaire supérieure à diagonale $(\widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_m)$. Par le Lemme 2 précédent, $(\widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_m)$ est dans la classe d'équivalence forte de $(A_2, \ldots, A_m)$. Par conséquent la partie diagonale $(A_1, \widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_m)$ de $\boldsymbol{G}$ a la propriété (DNL), et on se retrouve dans le deuxième cas du Lemme 1. Les ensembles $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$ sont tous deux la classe d'équivalence forte de $\boldsymbol{A}$.

1) $\Rightarrow$ 2)

Par le premier cas du Lemme 1 précédent, il existe une base $(\boldsymbol{e})$ de $\mathcal{M}$ dans laquelle $\nabla(x_i \partial_{x_i})$ est représenté par une matrice constante triangulaire supérieure

$$B^{(i)} = \begin{pmatrix} A_1^{(i)} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_m^{(i)} \end{pmatrix}$$

avec $A_j = (A_j^{(1)}, \ldots, A_j^{(s)}) \in \mathcal{H} \subset \mathfrak{E}$ ayant la propriété (DNL). Si on note H la matrice de passage de la base initiale à la base $(\boldsymbol{e})$, on trouve alors que la première colonne $h_1 \neq 0$ de H^{-1} est telle que h_1 engendre un sous-module différentiel non-trivial $\mathcal{L}$ de $\mathcal{M}$ isomorphe à $\mathcal{A}^{A_1}$.

Si $m = 1$, on en déduit donc que $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathcal{A}^{A_1}$, et la condition 2) est bien vérifiée.

Raisonnons par récurrence sur le rang m de $\mathcal{M}$. De la forme triangulaire supérieure des $B^{(i)}$, on déduit une suite exacte courte non-triviale

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{M} \to \mathcal{P} \to 0\,,$$

dans laquelle $\mathcal{L}$ est donc isomorphe à $\mathcal{A}^{A_1}$, et $\mathcal{P}$ vérifie les conditions de 1) avec $(A_2, \ldots, A_m) \in \mathfrak{E}_{\mathcal{P}}$ qui a la propriété (DNL). Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir la condition 2) au rang m, et l'égalité entre $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$ est alors immédiate. ∎

Notre résultat de structure fuchsienne pour un module différentiel de Robba, consiste en l'analogue suivant pour la dimension s du Corollaire 6.2.6 de [CMII].

THÉORÈME. *Soit $\mathcal{M}$ un module libre de rang m à connexion intégrable sur une polycouronne fermée $\mathcal{C}_K$, ayant la propriété de Robba. Supposons que $\mathfrak{E}\mathrm{xp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ a la propriété* (DNL), *et notons $\mathcal{M}^0$ la restriction de $\mathcal{M}$ à la polycouronne ouverte $\mathcal{C}_K^0$.*

Alors $\mathcal{M}^0$ admet une structure fuchsienne sur $\mathcal{C}_K^0$, et $\mathfrak{E}\mathrm{xp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M}) = \mathfrak{E}\mathrm{xp}_f^{\mathcal{C}^0}(\mathcal{M}^0)$.

Avant de donner la démonstration du Théorème, on en déduit deux corollaires. Tout d'abord, par recollement (comme en dimension 1 dans ([Dw], th. 7.1)), on obtient le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. *Soit $\mathcal{M}$ un module différentiel libre de rang m à connexion intégrable sur une polycouronne ouverte $\mathcal{C}_K$, ayant la propriété de Robba. Supposons que $\mathfrak{E}\mathrm{xp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ a la propriété* (DNL).

Alors $\mathcal{M}$ admet une structure fuchsienne sur $\mathcal{C}_K$, et $\mathfrak{E}\mathrm{xp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M}) = \mathfrak{E}\mathrm{xp}_f^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$. ∎

Soit $\widehat{\mathcal{M}}$ un $\mathcal{R}_K(1)$-module libre de rang m à connexion intégrable ayant la propriété de Robba. On dit que $\widehat{\mathcal{M}}$ admet une structure fuchsienne si c'est le cas pour le module $\widehat{\mathcal{M}}_\varepsilon$ induit par $\widehat{\mathcal{M}}$ sur $\mathcal{C}_\varepsilon = \mathcal{C}_K(]1 - \varepsilon, 1[^s)$ avec un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. C'est alors indépendant du choix de ε. On définit alors un ensemble $\mathfrak{E}\mathrm{xp}_f(\widehat{\mathcal{M}})$ à partir des ensembles $\mathfrak{E}\mathrm{xp}_f^{\mathcal{C}_\varepsilon}(\widehat{\mathcal{M}}_\varepsilon)$ qui sont indépendants de ε suffisamment petit. On déduit alors de la Proposition 2.3.2 et du Théorème ci-dessus le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2. *Soit K un corps p-adique, et $\widehat{\mathcal{M}}$ un $\mathcal{R}_K(1)$-module libre de rang m à connexion intégrable ayant la propriété de Robba, et possédant une structure de Frobenius.*

Alors $\widehat{\mathcal{M}}$ admet une structure fuchsienne et $\mathfrak{E}\mathrm{xp}(\widehat{\mathcal{M}}) = \mathfrak{E}\mathrm{xp}_f(\widehat{\mathcal{M}})$. ∎

PREUVE DU THÉORÈME. Soit K' un corps p-adique tel que la polycouronne ouverte $\mathcal{C}_{K'}^0$ soit non-vide, et fixons $\boldsymbol{z} \in \mathcal{C}_{K'}^0$. Par la Proposition 2.3.1, on peut trouver un élément $\boldsymbol{A}$ de $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ ayant simultanément les propriétés (DNE) et (DNL). Fixons $(\boldsymbol{e})$ une base de $\mathcal{M}$ représentée par

G et les éléments $R_{h,A}$ construits en § 2.1. Par la Proposition 3.1.3, il existe une matrice $H(z, .) \in GL_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}_{K'}^0})$ ayant les propriétés de la Proposition 3.1.3. Ainsi, dans la nouvelle base $(e') = H(e)$ de $\mathcal{M}^0$, $\mathcal{M}^0$ est représentée par une matrice $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{x} := (B^{(1)}/x_1, \ldots, B^{(s)}/x_s)$ avec $B^{(i)}$ des matrices de $M_m(K')$ triangulaires supérieures constantes ayant $A^{(i)}$ pour diagonale. Par conséquent, $\mathcal{M}^0$ vérifie la condition 1) de la Proposition précédente, et admet donc une structure fuchsienne sur $\mathcal{C}_{K'}^0$.

Il reste à montrer que cette structure descend au niveau d'un corps de base K pour lequel $\mathcal{C}_K^0$ est vide. Nous utiliserons pour cela, la définition 2) de la Proposition 3.2. Choisissons n un entier tel que $|K|^{1/n} \cap \boldsymbol{I}^0 \neq \emptyset$ (toujours possible car $p^{\mathbb{Z}} \subset |K|$), et K' l'extension algébrique finie de corps valué de K engendrée par les racines d'un polynôme de la forme $X^n - a$ avec $a \in K$ tel que $|a|^{1/n} \in \boldsymbol{I}^0$. L'ensemble $\mathcal{C}_{K'}$ est alors non-vide, si bien que $\mathcal{M}^0$ admet une structure fuchsienne sur $\mathcal{C}_{K'}^0$. Par la Proposition précédente, $\mathcal{M}^0$ s'obtient comme extensions successives de m modules sur $\mathcal{C}_{K'}^0$ respectivement isomorphes à $\mathcal{A}_{\mathcal{C}_K^0}^{A_1}, \ldots, \mathcal{A}_{\mathcal{C}_K^0}^{A_m}$ avec $(A_1, \ldots, A_m)$ ayant la propriété (DNL). Montrons que $\mathcal{M}^0$ admet un sous-module $\mathcal{L}^0$ sur $\mathcal{C}_K^0$ isomorphe à $\mathcal{A}_{\mathcal{C}_K^0}^{A_1}$. Il suffit pour cela de trouver $h \neq 0$ dans $\mathcal{A}_{\mathcal{C}_K^0}$ tel que

$$x_i \, \partial_{x_i} h = (G_{\delta_i}(\boldsymbol{x}) - A_1^{(i)} I_m)\, h\,, \tag{1}$$

sachant déjà qu'un tel élément $\tilde{h}$ existe dans $\mathcal{A}_{\mathcal{C}_{K'}^0}$.

Notons $(w_1, \ldots, w_k)$ une base de K' sur K, et décomposons $\tilde{h}$ sous la forme

$$\tilde{h} = \sum_{1 \leq r \leq k} h_r w_r$$

avec les $h_r \in \mathcal{A}_{\mathcal{C}_K^0}$ non tous nuls. Comme $G_{\delta_i}(\boldsymbol{x}) - A_1^{(i)} I_m \in M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}_K}) \subset \subset M_m(\mathcal{A}_{\mathcal{C}_K^0})$, on déduit de (1) que pour tout $r \in \langle 1, k \rangle$,

$$x_i \, \partial_{x_i} h_r = (G_{\delta_i}(\boldsymbol{x}) - A_1^{(i)} I_m)\, h_r.$$

Il suffit donc de prendre l'un quelconque des h_r non-nul.

Raisonnons alors par récurrence sur le rang m.

On note $\mathcal{P} = \mathcal{M}/\mathcal{L}$, qui est bien défini sur $\mathcal{C}_K^0$. Pour i fixé, par le Théorème 2.2.2 d'indépendance des exposants par spécialisation et un résultat de dimension 1 ([Dw], § 8), si $\tilde{A}_1^{(i)} \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}^0}(\mathcal{L}^0)$ et $(\tilde{A}_2^{(i)}, \ldots, \tilde{A}_m^{(i)}) \in \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}^0}(\mathcal{P}^0)$, alors $(\tilde{A}_1^{(i)}, \tilde{A}_2^{(i)}, \ldots, \tilde{A}_m^{(i)}) \in \mathcal{H}^{\mathcal{C}^0}(\mathcal{M}^0)$.

On en déduit que, pour tout i, $\tilde{A}^{(i)}$ et $A^{(i)}$ sont fortement équivalents, si bien que $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}^0}(\mathcal{P}^0)$ a la propriété (DNL). On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence, et plus particulièrement le Corollaire 1 au module différentiel $\mathcal{P}^0$ de rang $m - 1$ ayant la propriété de Robba sur la polycouronne ouverte $\mathcal{C}_K^0$. $\mathcal{P}^0$ s'obtient comme extensions successives de $m-$ -1 modules différentiels isomorphes à $\mathcal{A}_{\mathcal{C}_K}^{\tilde{A}_2}, \dots, \mathcal{A}_{\mathcal{C}_K}^{\tilde{A}_m}$. Par conséquent, $\mathcal{M}^0$ s'obtient comme extensions successives de m modules différentiels isomorphes à $\mathcal{A}_{\mathcal{C}_K}^{A_1}, \mathcal{A}_{\mathcal{C}_K}^{\tilde{A}_2}, \dots, \mathcal{A}_{\mathcal{C}_K}^{\tilde{A}_m}$. De plus, $\mathfrak{Exp}^{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ et $\mathfrak{Exp}_f^{\mathcal{C}^0}(\mathcal{M}^0)$ sont tous deux la classe d'équivalence forte de A. ∎

REFERENCES

[Ax] J. Ax, *Zeros of polynomials over local fields. The Galois action*, J. Algebra, **15** (1970), pp. 417-428.

[BC] F. Baldassarri - B. Chiarellotto, *On Christol's theorem; A generalization to systems of PDE's with logarithmic singularities depending upon parameters*, Contemporary Mathematics, **133** (1992), pp. 1-24.

[BGR] S. Bosch - U. Güntzer - R. Remmert, *Non-Archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 261, Springer-Verlag (1984).

[Bou] Bourbaki, *Eléments de mathématiques; Livre II: Algèbre*, Chapitres 4 à 7, Masson (1981).

[ChI] G. Christol, *Modules différentiels et équations différentielles p-adiques*, Queen's Papers in Pure Math. **66**, Kingston (1983).

[CMII] G. Christol - Z. Mebkhout, *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II*, Ann. of Maths, **146** (1997), pp. 345-410.

[CD] G. Christol - B. Dwork, *Modules différentiels sur des couronnes*, Ann. Inst. Fourier, tome **44**, fasc. 3 (1994), pp. 663-701.

[CR] G. Christol - P. Robba, *Equations différentielles p-adiques: application aux sommes exponentielles*, Collection Hermann (1993), p. 248.

[Dw] B. Dwork, *On exponents of p-adic differential modules*, J. Reine Ang. Math. (Crelle), **484** (1997), pp. 85-126.

[DGS] B. Dwork - G. Gerotto - F. Sullivan, *An introduction to G-functions (vol. I)*, Princeton University Press (1994).

[DR1] B. Dwork - P. Robba, *On ordinary linear p-adic differential equations*, Trans. A.M.S., **231** (1977), pp. 1-46.

[DR2] B. Dwork - P. Robba, *Effective p-adic bounds for solutions of homogeneous linear differential equations*, Trans. A.M.S., **259** (1980), pp. 559-577.

[Hö] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, North-Holland Mathematical Library, 2nd edition (1973).

[Rb] P. Robba, *Prolongement analytique pour les fonctions de plusieurs variables sur un corps valué complet*, Bull. S.M.F. **101** (1973), pp. 193-217.

[VRo] A. C. M. Van Rooij, *Non-archimedean functional analysis*, M. Dekker (1978).

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 dicembre 1997.